

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLIII

1956

---

SERIE OTTAVA

---

RENDICONTI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

VOLUME XXI

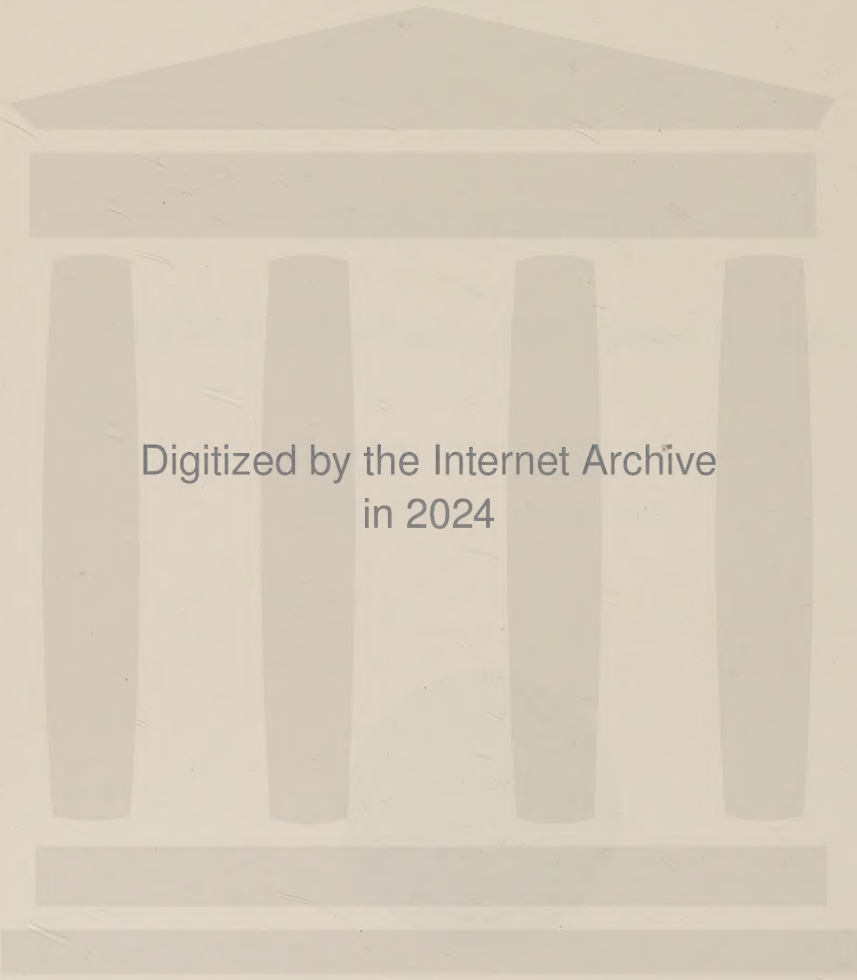
(2° semestre 1956)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1956



Digitized by the Internet Archive  
in 2024

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Ferie 1956 - Luglio-Agosto*

---

## NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

---

**Astronomia geodetica.** — *Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale in uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali.* — II. *Formule risolutive.* Nota (\*) del Socio GIOVANNI SILVA.

8. Supponiamo di aver misurate le irregolarità  $\Delta'(\theta)$  e  $\Delta''(\theta)$  di entrambi i perni per  $N$  valori di  $\theta$ , distanti di  $\mu$  gradi l'uno dall'altro, essendo  $\mu = 360/N$ ; supponiamo cioè di conoscere le dette irregolarità in corrispondenza di  $N$  coppie di punti uniformemente distribuiti sulle due sezioni  $\Omega', \Omega''$  dei perni, ogni coppia appartenendo ad un medesimo piano passante per l'asse geometrico  $O'O''$  dell'asse meccanico costituito dai due perni. Indichiamo con  $D$  la distanza fra le due sezioni  $\Omega', \Omega''$ , e, per ciascuna coppia  $\Delta'(\theta), \Delta''(\theta)$ , corrispondente agli  $N$  valori  $\theta$ , poniamo

$$(11) \quad \lambda(\theta) = \frac{\Delta'(\theta) - \Delta''(\theta)}{15 D \operatorname{arc} 1''}.$$

Esprimendo le  $\Delta$  e  $D$  in una stessa unità lineare, le  $\lambda(\theta)$  sono piccolissime quantità angolari, espresse in secondi di tempo, così come si esprimono ordinariamente gli errori di uno strumento dei passaggi. A mezzo di una rappresentazione grafica, o a mezzo di un'opportuna rappresentazione analitica degli  $N$  valori noti di  $\lambda(\theta)$ , potremo ritenere di conoscere tale grandezza per qualsiasi valore di  $\theta$ .

Consideriamo le due specie di valori  $a_z$  e  $a$ ,  $i_z$  e  $i$ ,  $I_z$  e  $I$ , che possono assumere rispettivamente l'errore dell'azimut strumentale, l'inclinazione del-

(\*) Presentata nella seduta dell'8 giugno 1956.

l'asse  $O'O''$ , l'inclinazione della retta  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$ , a seconda che si considerano perni non perfetti e quindi errori variabili con la distanza zenitale  $z$ , oppure perni matematicamente regolari e quindi errori costanti.

È ora facile determinare le differenze fra le due specie di valori, ponendoci nel caso più semplice di uno strumento dei passaggi in meridiano.

Allo scopo assumiamo positive le inclinazioni  $i_z$  e  $i$  dell'asse  $O'O''$  e le inclinazioni  $I_z$  e  $I$  del segmento  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$  quando l'estremità  $W$  di  $O'O''$ , o di  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$ , è più alta dell'estremità  $E$ , e ricorriamo alle (7), (8), (10), (11); se ne possono trarre senza difficoltà le seguenti espressioni della parte variabile con  $z$  degli errori  $a_z$ ,  $i_z$ ,  $I_z$ :

$$(12) \quad \Delta a_z = a_z - a = \frac{d'_z - d''_z}{15 D \operatorname{arc} 1''} = \frac{\lambda(\theta_1) - \lambda(\theta_2)}{2 \cos \alpha},$$

$$(13) \quad \Delta i_z = i_z - i = \pm \frac{(h'_z - h') - (h''_z - h'')}{15 D \operatorname{arc} 1''} = \pm \frac{\lambda(\theta_1) + \lambda(\theta_2)}{2 \sin \alpha},$$

$$(14) \quad \Delta I_z = I_z - I = \pm \frac{(H'_z - H') - (H''_z - H'')}{15 D \operatorname{arc} 1''} = \pm \frac{\lambda(\theta_1) + \lambda(\theta_2)}{2 \sin \alpha} \pm \frac{\lambda(\theta_3) + \lambda(\theta_4)}{2 \sin \beta},$$

intendendo qui e nel seguito che nelle espressioni con doppio segno quello superiore valga quando il cerchio verticale dello strumento è ad  $W$ , ossia quando sul cuscinetto  $W$  è appoggiato il perno  $I^0$ , e valga quindi il segno inferiore nel caso opposto. È opportuno ricordare che i valori  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ , che compariscono nelle tre precedenti relazioni sono quelli precisati dalle (6).

9. Insieme con le due rette  $O'O''$ ,  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$ , consideriamo anche la retta  $\bar{A}_e \bar{A}_w$  e l'asse della livella, che definiremo ricorrendo allo zero della graduazione, incisa sul tubo. Quando la livella è applicata all'asse dello strumento, il piano verticale che contiene l'asse del tubo della livella interseca superiormente la superficie interna di questo tubo secondo una curva, che è un arco di cerchio di grande raggio. Diremo asse della livella la tangente a questa curva in corrispondenza allo zero della graduazione. La definizione è particolarmente appropriata quando lo zero è al centro, ma può essere mantenuta anche se lo zero è ad un estremo.

Indichiamo con  $i_0$  l'inclinazione della retta  $\bar{A}_e \bar{A}_w$  e con  $j_z$  l'inclinazione dell'asse della livella. Anche queste inclinazioni saranno da considerarsi positive o negative a seconda che la parte  $W$  delle rette a cui si riferiscono è più alta o più bassa della loro parte  $E$ . Con la consueta convenzione di assumere positive o negative le letture agli estremi della bolla a seconda che questi estremi cadono dalla parte  $W$ , oppure dalla parte  $E$ , rispetto allo zero della graduazione, la semisomma algebrica delle due letture, moltiplicata per il valore angolare di una particella della graduazione, dà senz'altro, in valore e segno, l'inclinazione  $j$  della livella, che è la sola inclinazione determinabile direttamente.

Denominiamo infine  $\iota$  l'angolo costante fra l'asse della livella e la retta  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$  e, supposta la livella *appesa* all'asse, diamo a  $\iota$  segno positivo o nega-

tivo a seconda che il punto  $\bar{B}_2$  è più alto o meno alto del punto  $B_1$ , quando le altezze si contano a partire dall'asse della livella. Se questa è *sovrapposta* all'asse, la convenzione non cambia; soltanto conviene dire «meno basso o più basso» in luogo di «più alto o meno alto».

Chiamiamo diretta o rovesciata la posizione della livella a seconda che il punto  $\bar{B}_2$  si trova dalla parte W oppure dalla parte E, cioè, in conformità a quanto è stato detto al N. 7, a seconda che la graduazione incisa sulla livella cresce verso W oppure verso E, e distinguiamo le due posizioni con gli indici  $d$  ed  $r$ . Risulterà allora

$$(15) \quad j_{d.z} = I_z - \iota \quad j_{r.z} = I_z + \iota.$$

Quando le due misure siano state fatte lasciando il cannocchiale nella stessa giacitura e alla stessa distanza zenitale  $z$ , le (15) permettono di determinare sia l'errore di rettifica  $\iota$  della livella, sia l'inclinazione  $I_z$  della retta  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$ . La (14) permette allora di dedurre il valore dell'inclinazione  $I$  che avrebbe la  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$  se i perni fossero matematicamente regolari. Si avrebbe inoltre in tal caso, tenuto conto delle (5),

$$(16) \quad I - i = \pm \frac{k' - k''}{15 D \operatorname{arc} 1''} = \pm \frac{R' - R''}{15 D \operatorname{sen} \beta \operatorname{arc} 1''},$$

$$(17) \quad i - i_0 = \pm \frac{h' - h''}{15 D \operatorname{arc} 1''} = \pm \frac{R' - R''}{15 D \operatorname{sen} \alpha \operatorname{arc} 1''},$$

$$(18) \quad I - i_0 = \pm \frac{R' - R''}{15 D \operatorname{arc} 1''} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \right).$$

Indichiamo con  $I_w$ ,  $I_e$  i due valori che può avere l'inclinazione  $I$  della retta  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$  e precisamente  $I_w$  corrisponda al caso in cui il perno I° è ad W, il perno II° è ad E e nelle precedenti vale il segno superiore, ed  $I_e$  corrisponda al caso opposto. Dalla coppia delle due formule (18) che si possono scrivere per i due casi, risulta allora

$$(19) \quad \frac{R' - R''}{15 D \operatorname{arc} 1''} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \right) = \frac{I_w - I_e}{2}.$$

Questa formula (19) determina la differenza  $R' - R''$  fra i raggi medi dei due perni. La stessa coppia di formule potrebbe dare anche il valore di  $i_0$  che tuttavia, nella pratica, non ha alcun interesse. È invece importante notare che, con la (16), rimane pure determinato  $i$ . Con  $I$  ed  $i$  noti, la (12) e la (13) permettono poi di calcolare la variazione  $\Delta a_z$  e, rispettivamente, la variazione di  $\Delta i_z$  o addirittura  $i_z$ .

Questa inclinazione  $i_z$  può anche dedursi direttamente dalla  $I_z$  mediante la relazione:

$$(20) \quad i_z - I_z = \mp \frac{R' - R''}{15 D \operatorname{sen} \beta \operatorname{arc} 1''} \mp \frac{\lambda(\theta_3) + \lambda(\theta_4)}{2 \operatorname{sen} \beta}.$$

10. Per l'uso delle formule precedentemente indicate, consideriamo dapprima il caso in cui l'osservazione di una stella viene fatta lasciando attraversare all'immagine della stella tutto il campo utilizzato dell'oculare, senza interrompere la registrazione cronografica dei passaggi ai successivi fili fissi

o alle successive posizioni del filo mobile del micrometro impersonale, cioè senza invertire l'asse sui cuscinetti a metà osservazione al fine di eliminare l'influenza dell'errore di collimazione. È opportuno in tal caso leggere la livella in entrambe le sue posizioni diretta e rovesciata, dopo di che le (15) permettono di calcolare l'inclinazione  $I_z$  nella retta  $\bar{B}_1 \bar{B}_2$ . Determinata una volta per tutte la differente grossezza  $R' - R''$  dei perni, la (20) dà allora l'inclinazione  $i_z$  della effettiva posizione dell'asse  $O' O''$  al momento della osservazione, mentre la (12) dà quella parte  $\Delta \alpha_z$  dell'errore d'azimut che varia in causa delle irregolarità dei perni.

Ottenuto dalla media dei vari passaggi osservati, il tempo  $t$  dell'orologio corrispondente al passaggio della stella attraverso il filo centrale verticale, si corregge questo tempo, usando i coefficienti della formula di Mayer, per l'inclinazione  $i_z$  dell'asse e per la variazione  $\Delta \alpha_z$  dell'azimut.

Dopo di ciò si calcola la correzione dell'orologio  $\Delta t$  e gli errori strumentali  $\alpha$ , d'azimut, e  $c$ , di collimazione, come per uno strumento del tutto esente da irregolarità dei perni.

L'errore di collimazione  $c$  (differenza da  $90^\circ$  dell'angolo fra l'asse  $O' O''$  e la linea di collimazione) è una costante indipendente dalle irregolarità predette.

È tuttavia intuitivo che si può riversare le variazioni dell'inclinazione e dell'azimut, dovute alle irregolarità stesse, sul solo errore di collimazione, facendolo variare con la distanza zenitale  $z$  e mantenendo invece costanti l'azimut e l'inclinazione. Basta a tale scopo definire come errore di collimazione la differenza da  $90^\circ$  dell'angolo fra la linea di collimazione e la retta  $\bar{A}_1 \bar{A}_2$  (o una parallela a questa, od anche altra retta la cui direzione sia molto prossima a quella della  $\bar{A}_1 \bar{A}_2$ , e quindi anche a quella di  $O' O''$ , ma rimanga rigidamente collegata ai cuscinetti che sorreggono i perni). Su questo punto, mi limito a rimandare il lettore al mio vecchio lavoro, citato da principio.

Quanto qui è stato detto può essere facilmente esteso alle osservazioni di passaggi stellari attraverso un qualunque piano verticale quando si usa uno strumento universale. Le letture sul cerchio azimutale definiscono in tal caso i piani verticali successivamente prescelti.

II. Consideriamo ora il caso in cui il passaggio di una stella al meridiano si determina invertendo lo strumento a metà osservazione. La media dei tempi dei passaggi osservati a uno stesso filo ad E e ad W è indipendente dall'errore di collimazione e la media delle varie medie così ottenute è il tempo  $t$  osservato. Esso deve venire corretto:

1° per la media delle due inclinazioni  $i_z$  dell'asse  $O' O''$  relative alle due giaciture al fine di eliminare del tutto l'effetto della inclinazione;

2° per la media delle due deviazioni  $\Delta \alpha_z$  dell'azimut, dovute alla irregolarità dei perni, al fine di ridurlo al valore che detto tempo avrebbe se esistesse l'errore d'azimut incognito  $\alpha$  indipendente dalle irregolarità stesse.

Nelle due giaciture strumentali, la distanza zenitale  $z$  del cannocchiale, come è stata definita al N. 3, ma con l'eventuale sottrazione da essa di

360° quando cade nel quarto quadrante, ha uno stesso valore assoluto, che è quello della distanza zenitale della stella nel suo significato ordinario, ma ha segni opposti. Sarà qui opportuno indicare con  $z$  il valore algebrico che ha quella distanza zenitale quando lo strumento ha il suo cerchio graduato, e quindi anche il perno I°, ad W, e con  $-z$  il valore relativo all'altra giacitura.

Il valore  $z$  sarà dunque positivo o negativo a seconda che la stella culmina a nord o a sud dello zenit. È opportuno che la livella rimanga applicata all'asse, per cui la sua giacitura sarà diretta in un caso, rovesciata nell'altro. Chiamando queste due letture  $j_w$ ,  $j_e$ , risulta per le (15):

$$I_z + I_{-z} = j_w + j_e.$$

Immaginiamo ora scritte le due relazioni (20) relative alla giacitura W e alla giacitura E, la prima con i segni superiori e con il valore  $z$  anche nelle espressioni (6) di  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ , la seconda con i segni inferiori e con il valore  $-z$ . Sommandole membro a membro e tenendo conto della precedente risulta:

$$(21) \quad \frac{i_z + i_{-z}}{2} = \frac{j_w + j_e}{2} - \frac{\lambda(z - 90^\circ + \beta) + \lambda(z + 90^\circ - \beta) + \lambda(-z - 90^\circ + \beta) + \lambda(-z + 90^\circ - \beta)}{4 \sin \beta}.$$

Similmente, immaginando scritte le due relazioni (12) relative alle due giaciture e ricorrendo alle (6) per i corrispondenti valori di  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , risulta:

$$(22) \quad \frac{\Delta a_z + \Delta a_{-z}}{2} = \frac{\lambda(z + 90^\circ + \alpha) - \lambda(z - 90^\circ - \alpha) + \lambda(-z + 90^\circ + \alpha) - \lambda(-z - 90^\circ - \alpha)}{4 \cos \alpha}.$$

Le (21) e (22) risolvono il problema relativo a questo secondo caso, che più frequentemente si presenterà nella pratica.

È opportuno osservare che tanto nelle formule (12) e (20) da usarsi nel primo caso, quando nelle (21) e (22) da usarsi nel secondo caso, le correzioni per la irregolarità dei perni sono esclusivamente funzioni della distanza zenitale  $z$  variabile da  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ . Quindi per un determinato strumento che presenti irregolarità dei perni apprezzabili, una volta che esse siano state determinate, è facile calcolare delle tabelline che diano subito la correzione per l'inclinazione e per l'azimut in corrispondenza a valori della distanza zenitale succedentisi ad eguali intervalli scelti in guisa da rendere immediata l'interpolazione.

12. Si è qui parlato esclusivamente di correzioni a tempi di passaggi stellari a fili verticali del reticolo di strumenti dei passaggi e si è solo accennato al caso di strumenti universali.

È opportuno segnalare che la teoria qui svolta e in particolare la formula (12) trova importanti applicazioni anche nelle determinazioni degli azimut astronomici di punti trigonometrici e nelle eventuali determinazioni di precisione di differenze d'azimut fra punti che abbiano notevoli differenze d'altezza sull'orizzonte della stazione di osservazione.

**Astronomia.** — *Sopra l'orbita descritta da un astro in un ammasso stellare sferico.* Nota (\*) I del Socio GIUSEPPE ARMELLINI.

1. Le orbite descritte dagli astri di un ammasso sferico stellare nell'interno dell'ammasso stesso, sono state prevalentemente studiate <sup>(1)</sup> sia dal lato della stabilità e dal lato statistico (servendosi del teorema del viriale), sia nel caso particolare che esse presentino forma circolare o molto prossima alla circolare. Cercheremo quindi in questa Nota di studiare analiticamente l'orbita nel caso più generale.

A tal fine, indicando con  $O$  il centro dell'ammasso stellare, che supponiamo sferico e composto di strati sferici omogenei, con  $Q$  uno qualsiasi degli astri che lo compongono e con  $r$  il raggio vettore  $OQ$ , vediamo subito che la forza  $F$  che sollecita  $Q$  (almeno astraendo da perturbazioni prodotte da corpi estranei all'ammasso) risulta sempre diretta verso  $O$  ed è funzione della sola  $r$ . In conseguenza, per noti teoremi di meccanica,  $Q$  descriverà un'orbita piana con la legge delle aree

$$(1) \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$$

dove  $c$ ,  $t$  e  $\vartheta$  indicano la costante delle aree, il tempo e l'angolo di posizione, contato da una direzione fissa qualsiasi sul piano del moto.

Inoltre, se indichiamo con  $f$  il coefficiente attrattivo, con  $\rho(x)$  la densità dell'ammasso alla distanza  $x$  dal centro e con  $m(r)$  la massa contenuta in una sfera di centro  $O$  e raggio  $r$ , avremo per noti teoremi sopra l'attrazione newtoniana

$$(2) \quad F = -f \frac{m(r)}{r^2} = -\frac{4\pi f}{r^2} \int_0^r \rho(x) x^2 dx.$$

Ma, secondo le osservazioni astronomiche, la densità  $\rho(x)$  è data con molta approssimazione dalla formola di Plummer

$$(3) \quad \rho(x) = \frac{B}{(b^2 + x^2)^{5/2}}$$

dove  $B$  e  $b$  sono costanti positive, che hanno rispettivamente dimensioni  $[ML^2]$  ed  $[L]$ .

(\*) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1956.

(1) Cfr. per esempio O. HECKMANN, *Zur Dynamik kugelförmiger Sternhaufen*, in «Zeitschr. für Astroph.», Bd. I, Heft 2; F. ZAGAR, *Sopra la stabilità degli ammassi globulari di stelle*, in «Mem. Soc. Astron.», vol. XXV, n. 1; M. CIMINO, *Sopra la stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribuzione sferica della loro densità*, Nota I e II, in «Rend. Lincei», 1956, sem. I; A. MASOTTI, *Sopra alcuni problemi dinamici connettibili alla teoria degli ammassi stellari sferici*, in «Mem. Soc. Astron.», vol. XXVII, n. 2; L. CHIARA, *Sul moto di una stella all'interno di un ammasso globulare*, in «Pub. Oss. Palermo», IX, 20.

Per eseguire la quadratura, poniamo

$$(4) \quad x = \frac{b\xi}{\sqrt{1-\xi^2}};$$

avremo subito dalla (2)

$$(5) \quad m(r) = \frac{4\pi B}{b^2} \int_0^{r/\sqrt{r^2+b^2}} \xi^2 d\xi = \frac{4\pi B r^3}{3 b^2 (b^2+r^2)^{3/2}},$$

da cui, facendo tendere  $r$  ad  $\infty$ , si avrebbe per la massa totale  $M$  dell'ammasso secondo la legge di Plummer

$$(6) \quad M = \frac{4\pi B}{3 b^2}.$$

Osserviamo che, se  $b$  si annullasse, dovendo  $M$  mantenersi finita, anche  $B$  sarebbe nulla; e quindi per la (3) la densità  $\rho(x)$  si annullerebbe per tutti i valori di  $x$  diversi da zero: cioè la massa sarebbe concentrata in  $O$ .

Sostituendo ora nella (2) il valore di  $m(r)$  dato da (5) ed integrando, avremo per il potenziale  $P$  della forza  $F$  che sollecita l'astro  $Q$  (da non confondersi con l'autopotenziale dell'ammasso), a meno di una costante additiva

$$(7) \quad P = \int F(r) dr = - \frac{4\pi f B}{3 b^2} \int \frac{r dr}{(b^2+r^2)^{3/2}} = \frac{Mf}{\sqrt{b^2+r^2}},$$

dove il radicale va preso col segno *positivo*. Come si vede,  $P$  si riduce alla forma ordinaria newtoniana  $Mf/r$  nel caso di  $b=0$ ; ciò che è evidente, essendo allora la massa riunita in  $O$ . Ovviamente escludiamo il caso particolare di  $b=0$  dalle nostre considerazioni, giacché allora si ricade nell'ordinario problema dei due corpi.

Ora, secondo la cinematica, la velocità  $v$  dell'astro  $Q$ , tenendo conto della (1), è data dalla formola

$$(8) \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2},$$

onde si ha subito *l'integrale dell'energia*

$$(9) \quad v^2 - 2P = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} - \frac{2Mf}{\sqrt{b^2+r^2}} = 2h$$

dove  $h$  è una costante che ha dimensioni  $[L^2 T^{-2}]$ .

2. La (9) ci mostra subito che, se la costante  $c$  è diversa da zero, il raggio vettore  $r$  non può mai annullarsi. E ci mostra pure che si ha in ogni caso l'ineguaglianza

$$(10) \quad \frac{2Mf}{\sqrt{b^2+r^2}} + 2h \geq 0$$

da cui deduciamo subito che, *se la costante  $h$  dell'energia è negativa, il raggio vettore  $r$  non può crescere all'infinito*. E ne deduciamo pure che, se  $h$  è negativa, essa in valore assoluto è minore di  $Mf/b$ .

Per ottenere ora l'equazione dell'orbita, eliminiamo il differenziale del tempo tra la (9) e la (1). Otterremo

$$(11) \quad c^2 \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 = 2hr^4 + \frac{2Mfr^4}{\sqrt{b^2 + r^2}} - c^2 r^2.$$

Poniamo ora per semplicità

$$(12) \quad z = \sqrt{r^2 + b^2}$$

dove  $z$  sarà sempre *positivo*, essendo il radicale positivo, e maggiore di  $b$ .

Sostituiamo in (11), separiamo le variabili ed integriamo; otterremo

$$(13) \quad \vartheta = c \int \frac{z^2 dz}{(z^2 - b^2) \sqrt{(z^2 - b^2)(2hz^2 + 2Mfz) - c^2 z^2}}.$$

Come si vede, siamo pervenuti così ad un *integrale ellittico*; e precisamente (come è facile vedere, ponendo al numeratore  $z^2 - b^2 + b^2$  al posto di  $z^2$ ) ad un integrale che è somma di un integrale ellittico di prima specie e di un integrale ellittico di terza specie. Ovviamente, se fosse  $c = 0$ , si avrebbe  $\vartheta = \text{costante}$ ; ciò che è evidente, essendo allora il moto rettilineo, lungo il raggio vettore OQ.

Osserviamo che, dovendo il radicando mantenersi sempre positivo od al più nullo, la  $z$  sarà sempre *compresa tra due radici consecutive*, reali e positive, del radicando stesso.

In particolare, nel caso di un'orbita circolare, il radicando ha una radice doppia a cui la  $z$  si mantiene costantemente eguale; ciò che risulta evidentemente dalla (12) essendo allora  $r$  sempre costante. In tal caso il denominatore dell'espressione integranda è sempre nullo, come lo è pure il numeratore essendo  $z$  costante, onde la (13) diviene indeterminata; ciò che poteva prevedersi, *a priori*, giacché se l'orbita è circolare, l'anomalia  $\vartheta$  non dipende dal raggio  $r$  e quindi da  $z$ . Notiamo pure che, nel caso particolare di  $b = 0$ , il radicando ammette come fattore  $z^2$  che può essere portato fuori del segno di radice, riducendosi così ad un polinomio di secondo grado. L'integrazione si esegue allora con funzioni elementari; ciò che è logico, giacché se si ha  $b = 0$ , la massa si concentra in O e l'orbita dell'astro Q si riduce ad una conica avente per fuoco O. Noi *escluderemo, come abbiamo già detto, questi casi particolari* dalle nostre considerazioni.

3. Per eseguire l'integrazione nel caso generale, il metodo più semplice consiste nel ridurre il radicando alla forma canonica di Weierstrass; e cioè ad un polinomio di terzo grado, mancante del termine contenente la seconda potenza. A tale scopo, *essendo per ipotesi  $b$  diversa da zero*, prendiamo al posto di  $z$  una nuova variabile  $s$  legata a  $z$  dalla formola

$$(14) \quad z = - \frac{6Mfb^2}{12s + 2hb^2 + c^2}$$

dove ovviamente  $s$  avrà dimensioni  $[L^4 T^{-2}]$  e cioè le stesse dimensioni di  $c^2$ .

Notiamo che, essendo  $z$  sempre positiva e maggiore di  $b$ , il trinomio al denominatore sarà negativo e si avrà in modulo

$$(15) \quad |12s + 2hb^2 + c^2| < 6Mfb.$$

Sostituendo nella (13) al posto di  $z$  il suo valore dato da (14) ed eseguendo le opportune riduzioni, si trova senza difficoltà

$$(16) \quad \mathfrak{S} = 36M^2 f^2 b^2 c \int \frac{ds}{[36M^2 f^2 b^2 - (12s + 2hb^2 + c^2)^2] \sqrt{S}}$$

dove  $S$  è un polinomio di terzo grado, avente la forma canonica di Weierstrass, e cioè:

$$(17) \quad S = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

e dove  $g_2$  e  $g_3$  sono i cosiddetti *invarianti* di Weierstrass, e cioè due costanti date dalle formole

$$(18) \quad g_2 = \frac{[2hb^2 + c^2]^2}{12} + M^2 f^2 b^2$$

$$(19) \quad g_3 = \frac{(2hb^2 + c^2)^3}{216} + \frac{M^2 f^2 b^2}{12} (c^2 - 4hb^2)$$

ed hanno rispettivamente le stesse dimensioni di  $c^4$  e di  $c^6$ .

Ovviamente, poiché  $S$  non può mai divenire negativa,  $s$  varierà tra due radici consecutive di  $S$ ; onde, nel caso di orbite limitate,  $S$  dovrà avere tutte e tre le radici reali. Non occorre aggiungere che, essendo la somma delle tre radici eguale a zero (poiché in  $S$  manca la seconda potenza), una almeno di esse sarà positiva ed una almeno sarà negativa. Nel caso particolare, che abbiamo escluso dalle nostre considerazioni, di un'orbita circolare,  $S$  avrà due radici eguali e quindi <sup>(2)</sup> il suo *discriminante* sarà nullo, ed  $s$  costante.

(2) Notiamo che se il discriminante di  $S$  si annulla e cioè se si ha  $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ , si ha identicamente

$$(1) \quad S = 4\left(s - \sqrt[3]{g_3}\right)\left(s + \frac{1}{2}\sqrt[3]{g_3}\right)^2$$

e cioè  $S$  ha una radice eguale a  $\sqrt[3]{g_3}$  e due radici eguali a  $-\sqrt[3]{g_3}/2$ . Come è noto, in tal caso, la funzione ellittica di Weierstrass degenera in trascendenti elementari. Si vede immediatamente che il discriminante si annulla se  $b = 0$ , come pure si annulla se l'orbita è circolare. Supponendo per esempio che l'astro  $Q$  descriva intorno ad  $O$  un cerchio di raggio  $a$ , abbiamo eguagliando l'attrazione  $F$  alla accelerazione centripeta e tenendo presente l'integrale dell'energia

$$(2) \quad c^2 = \frac{Mfa^4}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$(3) \quad 2h = -\frac{Mf(a^2 + 2b^2)}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

donde si ricava

$$(4) \quad g_2 = \frac{M^2 f^2 (a^2 + 4b^2)^2}{12(a^2 + b^2)}$$

$$(5) \quad g_3 = \frac{M^3 f^3 (a^2 + 4b^2)^3}{216(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

e risulta immediatamente  $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ .

Poniamo ora

$$(20) \quad s = \wp(u; g_2; g_3)$$

dove con  $\wp(u; g_2; g_3)$  indichiamo la funzione ellittica fondamentale di Weierstrass, avente per invarianti  $g_2$  e  $g_3$ ; funzione che è doppiamente periodica e soddisfa all'equazione che la lega alla sua derivata:

$$(21) \quad \wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

Sostituendo nella (16) al posto di  $s$  il suo valore dato da (20) e tenendo presente la (21), abbiamo

$$(22) \quad \wp = 36 M^2 f^2 b^2 c \int \frac{du}{[6 M f b]^2 - [12 \wp(u) + 2 h b^2 + c^2]^2} = \\ = 3 M f b c \int \frac{du}{6 M f b c - 2 h b^2 - c^2 - 12 \wp(u)} + 3 M f b c \int \frac{du}{6 M f b + 2 h b^2 + c^2 + 12 \wp(u)}.$$

3. Ciò posto scegliamo una costante  $\beta_1$  tale che si abbia

$$(23) \quad 12 \wp(\beta_1) = 6 M f b - 2 h b^2 - c^2$$

ciò che è sempre possibile, giacché nel campo reale, la  $\wp(u)$  varia da  $-\infty$  a  $\infty$ .

Avremo allora, ricorrendo alla funzione ausiliaria di Weierstrass  $\zeta(u)$  e ricordando che  $\zeta(u)$  è funzione dispari dell'argomento, la nota <sup>(3)</sup> identità

$$(24) \quad \frac{1}{6 M f b - 2 h b^2 - c^2 - 12 \wp(u)} = \frac{1}{12 [\wp(\beta_1) - \wp(u)]} = \\ = \frac{1}{12 \wp'(\beta_1)} [\zeta(u + \beta_1) - \zeta(u - \beta_1) - 2 \zeta(\beta_1)].$$

Analogamente, se scegliamo una seconda costante  $\beta_2$  tale che si abbia

$$(25) \quad 12 \wp(\beta_2) = -6 M f b - 2 h b^2 - c^2$$

avremo identicamente

$$(26) \quad \frac{1}{6 M f b + 2 h b^2 + c^2 + 12 \wp(u)} = \frac{-1}{12 [\wp(\beta_2) - \wp(u)]} = \\ = \frac{-1}{12 \wp'(\beta_2)} [\zeta(u + \beta_2) - \zeta(u - \beta_2) - 2 \zeta(\beta_2)].$$

(3) Cfr. per esempio L. BIANCHI, *Lezioni sopra la teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, p. 283 (Pisa, Spoerri); E. PASCAL, *Funzioni ellittiche*, p. 172 (Milano, Hoepli). Notiamo che essendo  $\wp(u)$  funzione *pari* dell'argomento, la (23) è soddisfatta oltre che da  $u = \beta_1$  anche da  $u = -\beta_1$  e soltanto (per note proprietà generali delle funzioni di Weierstrass) da questi due valori. Ma, poiché la derivata  $\wp'(u)$  e la funzione  $\zeta(u)$  sono funzioni *dispari* dell'argomento, vediamo subito che la (24) resta inalterata cambiando  $\beta_1$  in  $-\beta_1$ . Analogamente possiamo dire per la (25) e la (26).

Sostituiamo ora i valori (24) e (26) nella (22) e ricordiamo che  $\zeta(u)$  è eguale alla derivata logaritmica dell'altra funzione ausiliaria di Weierstrass  $\sigma(u)$ . La (22) diverrà immediatamente integrabile e si avrà eseguendo la quadratura

$$(27) \quad \vartheta = \frac{M f b c}{4 p'(\beta_1)} \left[ \log \frac{\sigma(u + \beta_1)}{\sigma(u - \beta_1)} - 2 u \zeta(\beta_1) \right] - \\ - \frac{M f b c}{4 p'(\beta_2)} \left[ \log \frac{\sigma(u + \beta_2)}{\sigma(u - \beta_2)} - 2 u \zeta(\beta_2) \right] + \text{cost.}$$

Come sappiamo dalla teoria generale degli integrali ellittici, il termine lineare in  $u$  proviene dall'integrale ellittico di prima specie; mentre il termine contenente il logaritmo della funzione  $\sigma$  proviene dall'integrale ellittico di terza specie.

Alla (27) dobbiamo aggiungere l'equazione

$$(28) \quad r^2 = \left[ \frac{6 M f b^2}{12 h b^2 + c^2 + 12 p(u)} \right]^2 - b^2$$

che si ricava facilmente dalla (12), dalla (14) e dalla (20). Abbiamo così un sistema di due equazioni, la (27) e la (28), che ci danno le coordinate polari  $r$  e  $\vartheta$  dell'astro  $Q$  in funzione del parametro  $u$ ; abbiamo cioè ottenuto le *equazioni parametriche generali* dell'orbita.

Come è stato già detto, la  $s = p(u)$  deve variare tra due radici reali consecutive del trinomio  $S$  dato da (17); radici a cui corrispondono per il raggio vettore  $r$  valori massimi e minimi e cioè i *pericentri* e gli *apocentri* dell'orbita descritta dall'astro  $Q$  intorno ad  $O$  nell'ammasso stellare.

Secondo quanto insegna la teoria delle funzioni ellittiche, variando  $s = p(u)$  tra due radici consecutive di  $S$ , il parametro  $u$  varierà dal valore di un semiperiodo della funzione ellittica  $p(u)$  al valore di un altro semiperiodo, giacché le tre radici di  $S$  sono appunto i valori che  $p(u)$  acquista per  $u = \omega_1$ ;  $u = \omega_2$  ed  $u = \omega_1 + \omega_2$  essendo  $2\omega_1$  e  $2\omega_2$  i periodi della funzione ellittica. Ma, per mancanza di spazio, ci proponiamo di rimandare la discussione dei risultati ad altra Nota, in cui daremo anche l'equazione del tempo in funzione del parametro  $u$ . Per ora, ricordiamo soltanto che, *se il discriminante della  $S$  si annulla* (come avviene per esempio nel caso particolare dell'orbita circolare, escluso dalle nostre considerazioni) le funzioni ellittiche degenerano in trascendenti elementari.

**Fisica.** — *Sul significato, non einsteiniano, della relatività fisica.*  
Nota (\*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

SIGNIFICATO DELLA RELATIVITÀ. — Si può attribuire un duplice significato alla parola *relatività*, usata talvolta nella descrizione di fenomeni o fatti naturali. Il primo di essi corrisponde alla limitazione delle nostre conoscenze e teorie connesse, dovuta a quella delle nostre facoltà mentali e dei mezzi di osservazione che esse ci hanno fatto escogitare. Tale è il significato che alla parola *relatività* dava, verso la fine del secolo scorso, il fisico William Crookes. Così, questi adeguava quelle conoscenze alle capacità del nostro intelletto e della nostra esistenza. È però da dire che, per il continuo progresso della Scienza e della Tecnica, i nostri mezzi di osservazione si sono sempre più affinati e perfezionati, dando anche luogo alla scoperta ed allo studio di nuovi campi e fatti talvolta, prima del tutto ignorati. Forse Crookes non prevedeva tanto futuro progresso, benché la sua attività abbia contribuito al progresso stesso, con la scoperta dello stato raggiante della materia (atomi metallici ed elettroni).

È poi da ricordare, che in conseguenza del detto progresso, la relatività di Crookes è andata considerevolmente perdendo valore. Infatti, non tanto le nuove conquiste astronomiche, riguardanti l'immensità dello spazio che ci circonda, quanto le altre, concernenti la struttura della materia, ci permettono la comprensione (se non la visione) di un mondo di dimensioni estremamente ridotte, di cui l'uomo, nel secolo scorso, non aveva alcuna idea: dalle caratteristiche di tale mondo, dipendono anche molti fatti macroscopici!

Tali considerazioni fanno vedere come ormai non vi possa essere immobilismo, nelle nostre conoscenze. Talché la relatività di Crookes potrebbe venir limitata alla estrema intellettualità umana, che però mai verrebbe a conoscere l'intima essenza dei fatti naturali.

Ma, a parte tale riserva, si può dare alla parola *relatività*, un altro significato. Esso risponde ad una caratteristica di alcuni fatti fisici o di una loro qualità che, per esser stabilita, esige il riferimento contemporaneo ad almeno due enti distinti. È questo il caso della velocità del moto di traslazione uniforme; e, conseguentemente, della quantità di moto di un sistema. L'una e l'altra possono definirsi esattamente, se riferite al sistema che le possiede, ed inoltre ad un altro ente, come, per esempio, ad un sistema di assi coordinati. In mancanza di osservatori connessi con tali assi, non vi ha alcun modo di precisare quelle grandezze.

Nel caso in cui il moto uniforme di traslazione sia posseduto da masse materiali, alla considerazione del moto di determinata velocità, si aggiunge quella della energia cinetica. Ed ancora la valutazione di tale grandezza ha

(\*) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1956.

in tal caso, carattere relativo; occorre, infatti, fissare il riferimento del moto e dell'energia, per esempio, al solito sistema di assi coordinati.

I teoremi sulla quantità di moto e sulla forza viva od energia di un sistema stabiliscono i valori degli integrali  $\int v dm$  e  $1/2 \int v^2 dm$ , comunque estesi, mediante il riferimento di ciascun punto materiale  $dm$ , ai detti assi od ad un sistema fisso.

Ci siamo riferiti al caso di moto uniforme di traslazione, perché più semplice. Ma anche quello di moto vario, dà luogo alla considerazione relativistica. Infatti, prescindendo da eventuali attriti, se il moto di un sistema è vario, ossia comunque accelerato, tale fatto necessariamente corrisponde all'intervento di una forza esterna. Ciò vale tanto se si tratta di forza comunicata da organi materiali, o di causa newtoniana. Il moto vario, nel quale forze di coesione o newtoniane, insieme con quelle di inerzia, si avviciandano, nelle loro forme cinetica o potenziale, ha dunque la evidente caratteristica della relatività, non einsteiniana. Anche trattandosi di altre forme di energia, all'infuori di quella meccanica, si può fare analoga ammissione. Così, per l'energia termica, per la quale si può avere una forma degradata di tale ente, il moto disordinato delle ultime particelle materiali ha, per ciascuna di esse ed in ogni istante (sebbene in modo non perseguibile) il detto carattere relativistico. Infatti, esso è la risultante di tutte le forze del sistema, comprese quella di inerzia. Analoghe considerazioni si possono fare, per l'energia elettrica e magnetica.

Si deve tuttavia osservare, come si dia carattere assoluto alla energia termica, in quanto essa sia distribuita in modo uniforme in un ammasso materiale. In questo, gli ultimi elementi sono costituiti da particelle reciprocamente in moto. Questo fatto, per il loro grande numero, è, come si è detto, imprecisabile, nei suoi elementi, e ci si limita a computare in modo assoluto l'energia totale di tutto l'ammasso.

Risulta così, stabilita, l'inesistenza del moto assoluto uniforme. Ma si deve dire che le nostre abitudini contrastano talvolta con tale giudizio. Infatti, noi crediamo alla quiete della materia che irradia luce o fotoni, e che siano questi a viaggiare con la velocità  $c$ . Non avrebbe senso ritenere che dei fotoni siano in quiete e la materia si muova con tale velocità. In tale caso l'ammissione più semplice è quella della materia in quiete.

Fra i moti varii, occorre considerare anche quello di rotazione uniforme. Da quanto precede, risulterebbe che esso si debba considerare quale un fatto relativo. Tale dizione può essere esatta, riferendosi alle singole particelle di una massa rotante, che si muovono lungo la loro traiettoria circolare, perché sollecitate contemporaneamente, dalla forza di inerzia e dalla forza centripeta. Quest'ultima può essere di coesione (nel caso di masse materiali rotanti, o newtoniana od elettrica (nel caso astrale od atomico). Vi ha dunque il riferimento del moto, alla particella ed all'asse di rotazione. Ma in entrambi i casi, può considerarsi quale un sistema unico, l'insieme delle masse materiali in cui il moto si svolge. Con ciò, il moto di rotazione

può essere considerato assoluto. Esso può venire individuato dalle sole forze interne del sistema, indipendentemente dalle condizioni dell'osservatore esterno.

La relatività prospettata nei casi precedenti, è, in sostanza, quella galileiana, da distinguersi da quella crookesiana, che ha altro significato.

RELATIVITÀ SPECIALE DI EINSTEIN. - Va ora ricordata, quanta risonanza ha destato la cosiddetta relatività di Einstein. Essa, pur avendo in comune con quella galileiana il concetto del raffronto fra due sistemi (perché, per esempio, reciprocamente in moto) è del tutto inconsistente, per l'errore di qualche postulato su cui si fonda, come ora mostrerò.

Si sa che la teoria di Einstein prese le mosse dalla considerazione dei moti di traslazione uniforme (teoria speciale); per poi prendere in esame i moti accelerati (teoria generale). Per quanto concerne la relatività speciale, vogliamo ricorrere ad un semplice schema ideale, che potrebbe anche avere carattere sperimentale. Due regoli rettilinei,  $r = AB$ ,  $r' = A'B'$ , esattamente uguali e di lunghezza  $l$ , possono scorrere l'uno sull'altro, con velocità reciproca,  $v$ , grande a piacere. Se essi sono in riposo, può disporsi che  $A$  coincida con  $A'$ , e  $B$  con  $B'$ . Se in moto, come si è detto, supponiamo che avvenga, in un certo istante, la coincidenza di  $B$  con  $A'$ . Quella di  $A$  con  $A'$  avverrà qualche tempo dopo; classicamente, dopo il tempo  $l/v$ . Sempre nella meccanica classica, le due coincidenze  $AA'$  e  $BB'$ , avvengono contemporaneamente. La relatività speciale ammette invece, a giudizio di  $r$ , che la coincidenza  $BB'$  sia già avvenuta, prima ancora di quella di  $A$  ed  $A'$ ; mentre per il regolo  $r'$ , debba ancora avvenire. Il passato ed il futuro sono così, reciprocamente invertiti. Gli osservatori di uno dei due regoli hanno un tempo unico. Se essi si accordano, in qualche modo, di interrompere in un certo istante, il moto dell'altro regolo, potrà essere avvenuta, per il primo, una sola delle coincidenze  $AA'$ ,  $BB'$ , e per l'altro entrambe. E ciò, benché il processo fisico sia unico. Ciò vuol dire che, mentre per un regolo è avvenuta una coincidenza, per l'altro non avverrà mai! Questi strani fatti ed altri a cui qui non accenno, che sarebbero rilevabili da osservatori dei regoli, muniti di orologi, originariamente concordi, sono inammissibili, sia per ragioni di perfetta simmetria dei regoli in reciproco movimento; sia perché la loro assurdità potrebbe (se ve ne fosse bisogno) venir controllata sperimentalmente. Non vi ha ragione alcuna perciò, perché avvenga la pretesa alterazione delle misure dei tempi e delle lunghezze. Non si può ammettere, inoltre, che orologi, di perfetta uguale fattura, mutino di andamento per il loro, reciproco e simmetrico, moto; e che due di essi incontrandosi, diano, in tale istante indicazioni diverse ai due osservatori con essi coincidenti. Per di più, tali osservatori leggerebbero su di uno stesso orologio, ancora con essi coincidente, tempi diversi.

LA ASSERTITA EQUIVALENZA TRA MASSA ED ENERGIA. - Come è noto, uno dei risultati più sorprendenti della teoria speciale è l'asserita equivalenza tra massa ed energia. Ciò è tanto più vero, dopo le considerazioni ora fatte.

Esse hanno portato a dare un significato relativo all'ente energia, mentre si è intuitivamente indotti a ritenere che la massa materiale abbia caratteristiche assolute. Esaminiamo come Einstein sia pervenuto a stabilire il detto principio di equivalenza, che è espresso dalla nota relazione:

$$(1) \quad \varepsilon = mc^2.$$

Si osserva, anzitutto, che se tale principio fosse veramente attendibile, la energia  $\varepsilon$  dovrebbe avere la stessa dimensione della massa  $m$ , anziché quella classica; il coefficiente  $c^2$  non dovrebbe avere alcuna dimensione fisica. Per stabilire la (1), Einstein parte dalla nota ammissione del diminuire del rapporto  $e/m$ , al crescere della velocità dell'elettrone. È invalsa l'idea (non meglio giustificata) che quella diminuzione non potesse esser dovuta a corrispondente diminuzione di  $e$ , ma ad aumento di  $m$ . La misura di  $e/m$ , fatta con particolare precisione, da Bestelmeyer e da Bucherer, è un'applicazione delle regole dell'elettromagnetismo (legge di Laplace). Queste si riferiscono certamente alle forze ponderomotrici di un campo magnetico, su di una corrente in un filo conduttore. Per cui, il caso di elettroni liberamente moventisi, per la propria inerzia meccanica, dopo essere stati accelerati da un campo elettrico, è alquanto diverso. Forse sarebbe necessario uno studio approfondito di tale questione. Nell'asserire ciò si tralascia di discutere il necessario riferimento dell'accrescimento di velocità e di massa dell'elettrone, che è solo *relativo*. Lorentz ammette, comunque, che l'accrescimento della massa dell'elettrone, che passa dalla velocità zero a  $v$ , sia dato dalla relazione:

$$(2) \quad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Einstein, considerando che in tale relazione non figura il valore della carica elettrica dell'elettrone, volle ammettere che essa potesse valere anche nel caso della materia non elettrizzata. Giustificava ciò, in modo insoddisfacente, asserendo che una massa materiale può considerarsi come un elettrone, aggiungendo ad essa una quantità di elettricità negativa, piccola a piacere. Vogliamo prescindere da ciò, e cercare di seguire Einstein nelle sue ulteriori deduzioni. Ammesso che una massa materiale qualsiasi, si accresca con la sua velocità, conformemente alla (2), risulta che un impulso ad essa conferito, nel tempo  $dt$ , da una forza costante  $f$ , debba essere espresso da:

$$(3) \quad f dt = d(mv),$$

dove tanto  $m$  quanto  $v$ , sono variabili. Si ha così:

$$(4) \quad f dt = m dv + v dm.$$

Tenendo conto che l'incremento di energia, nel tempo  $dt$ , è dato da:

$$d\varepsilon = vf dt;$$

sostituendo nella (4), il valore di  $m$ , dato dalla (2), si ha:

$$(5) \quad d\varepsilon = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} dv + \frac{m_0 v^2}{(1 - (v/c)^2)^{3/2}} dv;$$

ed integrando:

$$(6) \quad \varepsilon = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right);$$

che sviluppata dà:

$$(7) \quad \varepsilon = m_0 c^2 \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{4} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

Quest'ultima relazione, per  $v$  piccola, coincide con la meccanica classica.

Osserviamo ora che, secondo l'ammissione di Einstein, l'incremento di massa, tra le due velocità 0 e  $v$ , si ottiene dalla (2):

$$(8) \quad \Delta m = m_v - m_0 = m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right).$$

Dividendo membro a membro la (6) per la (8), si ha:

$$(9) \quad \varepsilon = \Delta m c^2.$$

Le relazioni (7) e (9) ci danno due espressioni formalmente diverse della energia cinetica acquistata da  $m_0$ , nel passare dalla velocità zero a  $v$ . Per la (7), è confermata, con buona approssimazione, se  $v$  è piccola, la meccanica classica. Per la (9), tale valore, definito dall'ipotesi di Einstein, è dato in modo preciso, e corrisponde all'incremento di massa  $\Delta m$ , moltiplicato per  $c^2$ . Si ha dunque, con l'approssimazione consentita della (7):

$$(10) \quad \frac{1}{2} m_0 v^2 = \Delta m c^2 = \varepsilon.$$

Questa eguaglianza appare, in prima indagine, possibile, perché  $c$  è molto grande rispetto a  $v$ , ed  $m_0$  lo è rispetto a  $\Delta m$ . A questo punto, Einstein fa un'altra ipotesi, ammettendo che l'incremento  $\Delta m$ , che è nei casi pratici una quantità piccolissima, sia una massa grande a piacere, e perviene così alla relazione (1), già scritta,  $\varepsilon = mc^2$ . Ciò può essere lecito dal punto di vista strettamente simbolico e matematico; ma occorre esaminare se possa avere significato fisico. Osserviamo anzitutto, che la (2) ci dice qual sia, per la fatta ipotesi, l'incremento di una massa, per avere acquistato velocità. Per cui, perché si abbia formazione di massa (incrementale), occorre una massa originaria. La (2) non dice che sia l'energia a trasformarsi in massa. E se non esiste una massa originaria, non si ha, ai termini della (2), alcun incremento, ossia non si ha formazione di nuova massa.

Si vede dunque a quali incomprensibili conseguenze porta la ammissione della (2). La ipotesi di Einstein, della equivalenza tra massa ed energia, è perciò inammissibile.

Va ancora osservato come si usi controbattere le precedenti gravi obiezioni, ricordando talune pretese verifiche sperimentali, che confermerebbero la trasformazione dell'energia in materia e viceversa. Ma ad esse non si può dare gran peso: occorrerebbe discutere a fondo le caratteristiche sperimentali di tali pretese verifiche. Ricordo inoltre, come mie esperienze, tuttora

in corso, possano aprire una nuova via, nell'interpretazione di fatti del genere <sup>(1)</sup>.

Da quanto precede, risulta evidente l'inattendibilità della ipotesi di equivalenza, tra enti fisici tanto differenti quale energia e materia. Il grave equivoco della relatività di Einstein dipende dalla inesistenza dell'incremento di massa, per la sua crescente velocità. Ciò non può in alcun modo verificarsi, essendo la massa un ente con caratteristiche proprie assolute, e la velocità una qualità della materia, relativa fra due sistemi distinti.

RELATIVITÀ GENERALE DI EINSTEIN. — Passiamo ora ad occuparci della seconda teoria di Einstein, da lui chiamata generale. Già dalla lettura della sua prima Memoria, appare come egli, nel formulare tale teoria, parta dalla ipotesi inaccettabile del carattere relativo ad altri sistemi, della rotazione meccanica; secondo essa, tale rotazione, se uniforme, non rappresenta un fatto assoluto. Così, egli ritiene che la rotazione della Terra, intorno al suo asse polare, debba necessariamente essere riferita al sistema delle stelle lontane. Ma realmente la legge di inerzia, basata sulla tendenza della materia a muoversi in linea retta, ha carattere assoluto. È in conseguenza di ciò che la Terra si schiaccia ai poli, e non perché essa ruoti rispetto al sistema delle stelle lontane.

Lo sviluppo ulteriore della teoria generale porta ad un altro principio di equivalenza: quello fra campo gravitazionale e moto rettilineo, uniformemente accelerato. Vi sono vari argomenti che mostrano facilmente la completa differenza fisica, fra questi due fenomeni. Per convincersene, basta ricordare quanto si è esposto già in questa Nota, circa l'asserito incremento del valore di una massa materiale, con la sua velocità, dato dalla formula (2) di Lorentz. Einstein, osservando che apparentemente la massa, se accelerata, diventa pesante (il che è invece dovuto alla sua reazione d'inerzia), stabilisce l'inconsistente principio di equivalenza tra gravitazione e moto accelerato. Che tale equivalenza non sia vera, si può meglio comprendere, esaminando come si accresca nel tempo la massa, in base alle ammissioni dello stesso Einstein (il qual fatto, come si è già visto, non è nemmeno vero). Diciamo  $f$ , la forza costante, applicata alla massa  $m_0$ , che assume così il moto accelerato uniforme. Nel tempuscolo  $dt$ , essa riceve un impulso che è dato dalla (4), già vista. Tenendo conto della (2), si ha:

$$(11) \quad f dt = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} dv + \frac{m_0 v}{(1 - (v/c)^2)^{3/2}} dv.$$

Se supponiamo che la forza  $f$  agisca per il tempo  $T$ , la massa avrà acquistato la velocità  $V$ . Integrando la (11); ed estendendo fra tali limiti, si ha:

$$(12) \quad fT = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

(1) Ved. questi « Rendiconti », vol. XVI, p. 591 (1954).

Questa relazione ci dice che la massa  $m_0$ , al tempo  $T$ , ha acquistato una velocità  $V$ , ed un valore maggiore che è dato dalla (2). Essa dunque non resta costante, a differenza di quando viene sottoposta, staticamente, ad un campo gravitazionale. Per cui, come si è detto, i due casi non sono affatto equivalenti.

Le considerazioni esposte in questi ultimi paragrafi dimostrano chiaramente che le teorie di Einstein non possono fornirci un altro significato corretto ed attendibile della parola relatività, che può solo venire usata come in principio di questa Nota.

CONCLUSIONE. - Si deve dire che quando Einstein, al principio del secolo, cominciò ad elaborare le sue teorie, egli, come molti altri fisici, e matematici, aveva intravisto la crisi, in cui era caduta la fisica. Tale crisi durava, da una ventina di anni; da quando cioè la suggestiva teoria dell'etere si mostrò incapace di spiegare alcuni fatti nuovi. Tanto maggiore fu la sorpresa e forse l'incredulità, per la detta constatazione, in quanto quella teoria da più di un secolo aveva riportato incontrastati successi, sia nella mirabile opera di Fresnel, sia in quella di Maxwell. Del resto era assai strano che, ad un ipotetico ente, che sfuggiva a qualsiasi controllo diretto della sua presenza, fossero affidate le manifestazioni di azioni a distanza, tanto fondamentali, quali la trasmissione della luce e quelle elettriche e magnetiche. Non valsero inoltre, i tentativi di Lorentz per risolvere la detta crisi. Questa, a ben considerare i fatti, era ancor maggiore, in quanto un'altra importantissima azione a distanza, la gravitazione, era sempre apparsa misteriosa; né essa poteva trovare spiegazione alcuna nella vacillante ipotesi eterea. Ben venne, si disse e si dice ancora da parte della maggioranza degli studiosi, la teoria della relatività di Einstein che, a loro avviso, modificando inesatte credenze, avrebbe aperto una nuova via alla interpretazione dei fatti naturali.

Ma, come si è visto in questa Nota, la relatività di Einstein non ha alcuna base scientifica. Se lodevole fu l'iniziativa di lui, nel cercare di risolvere la detta crisi, il metodo seguito nel voler modificare teorie classiche e gloriose, non fu lecito. Tale metodo ha avuto spesso il difetto di appoggiarsi a postulati che, se preventivamente e attentamente discussi, avrebbero dovuto *a priori* venir rifiutati. Così, il principio della costanza della velocità della luce per qualunque osservatore, dotato cioè di qualsiasi velocità propria; così l'equivalenza tra massa ed energia, mentre questi due enti hanno caratteristiche del tutto diverse (assolute o relative); così, l'identificazione tra gravitazione ed inerzia, la cui reciproca proporzionalità non può autorizzare il fisico a confonderle e a ritenerne la loro reciproca trasformabilità, mentre egli non ha nessuna idea della loro intima essenza.

Per cui, la relatività di Einstein non può trovare sede in alcun modo, nel quadro delle razionali e concrete teorie fisiche, né rappresentare un nuovo modo lecito per raffigurare rapporti o riferimenti, tra due sistemi fisici differenti.

La possibilità della corretta interpretazione di fatti fisici vien favorita dall'abitudine alla ricerca sperimentale, che corrisponde alla precisa osservazione di fatti vecchi e nuovi, purché sia impostata su acuta e corretta intuizione, e sorretta da immaginazione, meglio se fervida ed audace, ma sempre logica. Si possono così formulare ipotesi, che, pur non offrendo sempre garanzie di sicuro successo, possono a volte aprire nuove vie di ricerca. Per quanto concerne la relatività di Einstein, si deve riconoscere che a lui, il desiderio di constatare con l'esperimento le sue asserzioni, è sempre mancato; così, quando egli ha asserito che orologi in moto reciproco hanno andamento diverso, o che osservatori su masse diverse anch'esse in moto reciproco, ritengono di trovarsi ciascuno sulla massa più leggera. E la formulazione di tali ipotesi, fatta con piena, aprioristica sicurezza, non fu mai accompagnata da tentativi di esperienze di controllo, od almeno da invito a tentarle. Si osserva inoltre che, del resto, sarebbe stato inutile un tentativo del genere, perché la più elementare logica, porta a far comprendere che, per ragioni di simmetria, tanto gli orologi quanto le masse non avrebbero subito alterazione alcuna, per il loro reciproco moto.

Chi vuol formulare una ipotesi o teoria sui fatti naturali, dovrebbe dunque, di preferenza, appoggiarsi all'esperienza. È questo il criterio che ho, modestamente, seguito nella lunga mia carriera di ricercatore. E che da tal metodo io abbia raccolto buoni frutti, vien confermato oltre che dalle mie precedenti ricerche, dalla critica che da molti anni io formulo sulla relatività di Einstein. Nessuno dei Colleghi competenti ribatte verbalmente o per iscritto le mie considerazioni.

A parte quanto precede, la crisi della fisica è tuttora in atto. Manca infatti un quadro esplicativo delle azioni a distanza, che non può esser costituito dalla teoria eterea, e tanto meno dalla relatività di Einstein. Può esser comodo, per i relativisti, asserire che questa teoria fornisca una nuova interpretazione del campo elettromagnetico ed ammetta la curvatura dello spazio, senza che in esso nulla esista. Ma quanto ho esposto mostra chiaramente l'inconsistenza di asserzioni del genere.

Tra le ricordate azioni a distanza, la più semplice, nelle sue manifestazioni, è quella gravitazionale. In conseguenza di tale semplicità, mi è stato possibile concretare uno schema di teoria, che appoggiandosi alla meccanica classica, ne spiega le caratteristiche <sup>(2)</sup>. Ma per le altre azioni, quelle elettriche, magnetiche ed elettromagnetiche, se si rinunzia definitivamente all'etere cosmico (come è assai probabile) incombe il più profondo mistero. Occupandomene recentemente, ho intravisto, in modo, per vero, assai schematico, una via per la sua risoluzione <sup>(3)</sup>. Ma affrontarlo seriamente e risolverlo, sarà benemerito compito dei ricercatori di un futuro, forse lontano.

(2) Ved. questi « Rendiconti », vol. XVII, p. 150; vol. XVIII, p. 577; vol. XIX, pp. 19, 95.

(3) Q. MAJORANA, *Sulla soglia di una nuova visione di alcuni fenomeni fisici*, « Atti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », 20 maggio 1956.

**Geologia.** — *Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna.* —  
II. *Gli scisti cristallini.* Nota <sup>(\*)</sup> del Corrisp. ANTONIO CAVINATO.

Il Lamarmora li riconobbe: non poteva farne una suddivisione. Altri dopo di Lui li nominano senza farli meglio conoscere.

Solamente Charrier ha saputo portare un utile effettivo contributo alla loro conoscenza <sup>(1)</sup>.

L'osservata continua crescente cristallinità dell'imbasamento antico da sud verso nord dell'Isola di Sardegna non consente di stabilire una esatta linea di demarcazione tra argilloscistoso, filladico e cristallino.

Tuttavia tutto ciò che di imbasamento antico (esclusi i graniti) ricorre a nord di una linea S. Lucia, M. Albo, Orune è scistoso-cristallino. Così scistoso-cristallini sono i terreni d'intorno a Stintino, Bortigiadas, Tula, Isola dell'Asinara. Qualche affioramento ricorre anche a sud di tale linea, ad esempio ad Orgosolo, a Correboi, ecc.

L'aspetto ed i caratteri di rocce paleozoiche è palese a sud di una tale linea, così grossolanamente definita. Frange e lembi di esse ricorrono però anche al nord di essa linea.

I nuclei scistoso-cristallini che sfumano in rocce a franco facies siluriano sono tre: quello d'intorno a M. Albo, quello di Stintino-Asinara, e l'altro a nord di Ozieri.

ORTOGNEIS ANTICHI.

1. *Descrizione.* — Gli ortogneis ricorrono a Punta Rossa dell'Isola di Caprera, all'Isola Pecora, all'isola dei Monaci (quella più meridionale; l'altra a nord è di granito), all'Isola delle Bisce, all'Isola dei Cappuccini: coprono tutta la penisola di Capo Ferro (M. Calagranu), la parte meridionale dell'imboccatura di Porto Cervo, una piccola zona a sud di Arzachena, tutta l'area di diecine di chilometri quadrati prospiciente il Golfo Aranci; la zona di M. Plebi a tutta l'area intorno a S. Teodoro (massiccio di M. Nieddu).

Si tratta di ortogneis acidi scistosi a struttura cristalloblastica a quarzo, ortoclasio, albite, molto fresca, microclino con poca biotite ed alquanto soizite. Ricorrono variazioni di facies repentine e frequenti verso ortogneis ricchi di biotite in cui sono presenti anche l'oligoclasio plurigeminato (Punta Rossa di Caprera, Isola delle Bisce, S. Teodoro, ecc.).

Frequenti sono anche i passaggi a gneis acidi a due miche privi di plagioclassi geminati, e ricchi di ortoclasio ed albite non geminati (Isola Pecora, Punta Rossa, Golfo Aranci), a gneis di color roseo violaceo per la presenza di una biotite rossastra (Golfo Aranci, Bivio per Posada) e di alquanto granato;

(\*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1956.

(1) G. CHARRIER, « Boll. Serv. Geol. d'Italia », 76° p. 155 e sg.

infine a gneis grigiastri muscovitico-cloritici ed a sola albite (Bivio Torpè) e talora con sensibili quantità di anfibolo, infine anche a gneis sillimannitici.

Le facies ortogneissiche granitoidi, del tutto analoghe a quelle che formano i nuclei centrali alpini, e, come queste, talora poco o punto scistose si sviluppano in minor grado alla Punta Rossa, ma ricorrono in facies franche ed in ammassi sulla sinistra del Coghinas (Nuraghe Mazzone); in tutta la R. S. Giorgio, prospiciente il bacino d'invaso del Coghinas; poco fuori Tempio verso Sassari, ecc. Essi risultano da una associazione di quarzo, ortoclasio, biotite, albite ed albite-oligoclasica: talvolta sono a due miche (Coghinas); talvolta sono ricchi di feldspati, e poveri di quarzo (al Km. 4,400 da Ozieri verso Oschiri). Tra questi ortogneis granitoidi non mancano facies aplitiche e pegmatitiche a grana grossa ed a quarzo - ortoclasio - muscovite, con variabili tenori in albite (Km. 8 della strada Olbia-Palau).

Gli ortogneis di S. Teodoro e quelli dell'Asinara sono ricoperti verso il sud, dalle concordanti coltri paragneissiche e micascistose, che hanno nette caratteristiche di tipici scisti cristallini, e non mai di rocce siluriane.

#### GLI ORTOGNEIS SILURIANI DELLA NURRA.

Anche nella Nurra, a nord di M. Giesgia, ricorrono dei tipici ortogneis, ma non più in forma di nuclei, bensì di banchi e di lenti, interstratificati, nel filladico siluriano, sottostante al grafitico gothlandiano, ed alle pietre verdi <sup>(2)</sup>. Per questi ortogneis della Nurra una datazione è quindi possibile: sono *ordoviciani*.

Il complesso dei terreni siluriani nei quali ricorrono interstratificati questi ortogneis sono essenzialmente delle filladi sericitiche quarzifere e non quarzifere, talora grafitiche, facenti passaggio a forme di transizione verso micascisti, talora ricche di granuli di calcite, ma non mai abbastanza fanero-cristalline da potersi ascrivere tra gli scisti cristallini. Solo in vicinanza degli gneis ricorrono facies di metascisti, forme che vanno da micascisti a gneis.

Questi ortogneis della Nurra hanno un color grigio chiaro, una tessitura nettamente scistosa, una struttura porfiroblastica. Su una massa di fondo minutamente cristallina, formata da quarzo, ortoclasio, muscovite, spiccano idioblasti di quarzo, di ortoclasio, di albite e oligoclasio, i cui orli sono stati fortemente frastagliati, in seguito ad un marcato e caratteristico riassorbimento.

Sono facies gneissiche molto acide prive di biotite e di plagioclasti basici: talvolta arieggiano a gneiss occhiadini alquanto minuti. Ma non mancano tipi di gneiss dioritici, ad albiti e plagioclasti acidi, clorite e muscovite ed in cui il quarzo è accessorio: questi gneis rappresentano forme di passaggio alle ortoprasiniti, altrove dall'Autore descritte (loc. cit.).

(2) Cfr. A. CAVINATO, *Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna*. - I. *Le rocce verdi*, questi « Rendiconti », vol. prec., pp. 572-575.

Ne mancano facies a solo quarzo e muscovite e, quindi, denominabili «ortomicascisti»: i quali, sfumano, talora, con l'ulteriore impoverimento in muscovite in «ortoquarziti».

Gli ortogneis e gli ortomicascisti possono riguardarsi come i prodotti di una evoluzione metamorfica rispettivamente dei porfiroidi gneissici e degli scisti sericitici porfiroidi, tanto comuni nel sud della Sardegna: come loro facies *lapidee più mature*: nelle quali, tra l'altro, il *sericitico*, che caratterizza il porfiroidico del sud e ricristallizzato in franche lamine di muscovite.

#### GLI ORTOGNEIS OCCHIADINI DI SINISCOLA.

Entro alla corteccia parascistosa, quella che si estende a nord di M. Albo, ricorrono banchi di tipici ortogneis occhiadini interstratificati concordemente. Il più caratteristico trovasi alla cantoniera di S. Anna, sulla strada Tula-Siniscola.

Esso è potente alcune decine di metri ed affiora per qualche centinaio di metri. Presumibilmente la sua forma è lenticolare appiattita: pende di una diecina di gradi a sud sud-est per modo da immergersi sotto a M. Albo, come tutta la concordante formazione paragneissico-micascistosa *della quale è coevo*.

Petrograficamente esso è identico ai gneis occhiadini delle Alpi, quali ad esempio quelli di Luserna S. Giovanni (Piemonte) e dell'imbocco della Valle Aurina (Alto Adige).

È uno gneis molto acido nel quale predominano quarzo ed ortoclasio (anche microclino) e grossi cristalli di ortoclasio-albite in associazione microperititica, con percentuali variabili di muscovite, e con accessori: il plagioclasio dell'andesina, biotite, tormalina, apatite, granato, orneblenda verde. Ha tessitura scistosa e struttura cristalloblastica. I feldspati hanno dimensioni di un centimetro, ed oltre, e sono di forma lenticolare.

#### LA FORMAZIONE PARAGNEISSICA E MICASCISTOSA.

Essa si estende in un'area che a nord è limitata da una linea che, grosso modo, va da Sa Caletta a Lodè; ed a sud da una linea che, grosso modo, va da Capo Comino ad Orune. Dopo le interruzioni dovute ai graniti essa ricompare intorno ad Ozieri, e quindi ancora, in tutto il territorio di Stintino e dell'Asinara.

Il complesso Stintino-Asinara è modulato ad ampia piega anticlinale con asse diretto, grosso modo, da nordovest a sudest. La coltre, potente qualche chilometro, che è a nord di M. Albo, ha una pendenza di 45-50° a sud 15 est, che con piccole oscillazioni conserva anche verso Siniscola.

1. *Paragneis*. - È essenzialmente composta di potenti strati di paragneis e di micascisti. Nella sua parte settentrionale prevalgono i paragneis, nella parte meridionale i micascisti: ma l'alternarsi tra essi, e lo sfumare gli uni negli altri è un fatto frequente.

Così tutto intorno alla miniera di Guzzurra ricorrono esclusivamente paragneis, con tessitura nettamente scistosa, ad alta fissilità, con struttura tipicamente cristalloblastica, e talora porfiroblastica, per la presenza di grossi granuli di albite, tendenti a forme idioblaste.

Questi paragneis sono caratterizzati dall'associazione: quarzo 50 %, albite circa 25-30 % con qualche idioblasto di andesina geminato di due individui cristallini, muscovite 15 %, biotite 8-10 %. Anche questi paragneis hanno i tipici caratteri geo-petrografici dei paragneis alpini, ossia la « sammelcrystallization », e quindi l'assenza di successione paragenetica, la persistente frastagliatura dei contorni dei singoli individui, le reciproche inclusioni tra minerali, ecc.

Singolari, ma frequenti, in tutta la formazione paragneissica la presenza di granoblasti di un'albite non geminata, talora limpida, ma più frequentemente ricca di inclusioni grafitose e di ossidi di ferro: in alcune zone questa albite è il minerale più abbondante.

Le variazioni di facies sono frequenti e marcate sia verso tipi ricchi in biotite (anche totalmente cloritizzata: paragneis-cloritoscistosi) sia verso tipi a quarzo, muscovite, albite; in fine anche verso tipi granatiferi (kinzigitici). Intercalati ricorrono lenti di scisti grafitosi che ricordano il descritto filladico sericitico della Nurra, ma con una netta più alta cristallinità. Infatti contengono granuli di albite e bei cristalli di muscovite. Paragneis ad alta cristallinità sono quelli dell'area di Stintino sino a Capo Falcone, e quelli dell'Asinara. Essi fanno passaggio a facies grafitiche, ma sempre con albite e granato e muscovite, e quindi con un grado di metamorfismo nettamente più alto del grafitico della Nurra (che racchiude gli ortogneis): il quale non accusa un metamorfismo che giunga alla albitizzazione, ma solo al filladico sericitico-cloritico.

Anche a Tula e nel circostante territorio ricorre una tipica formazione paragneissica a ridosso dell'ortogneis granitoide di Nuraghe Mazzone, pendente sia verso NE sia verso NO, dopo essere passata, gradualmente, a pendere verso nord.

2. *Micascisti*. — Ricorrono con prevalenza in livelli stratigrafici più alti, ma di frequente anche in alternanza ed in concordanza coi paragneis come a Stintino, tra Lula e Orune, ecc.

Sono ad alto grado di cristallinità, altamente scistosi, fibroblastici o granoblastici. Vi prevale l'associazione muscovite, clorite, quarzo, e subordinatamente la biotite ed il rutilo (tutta la zona da Cantoniera di S. Anna a Siniscola a S. Lucia). Essi fanno talora passaggio a micascisti in cui la biotite diventa predominante e sono subordinati il quarzo e la muscovite (miniere di Guzzurra e dell'Argentiera). Sono frequentemente granatiferi: i singoli cristalli di granato sono grossi idioblasti cribrati.

Il potente lembo esteso tra gli abitati di Orune e Bitti, stretto tra i graniti a nord ed a sud, rivela anche la presenza di strati paragneissici ad albite e granato intercalati tra i micascisti. In questo lembo i graniti, intrusi quando

il metamorfismo regionale era già completato, hanno indotto un metamorfismo di contatto che addizionandosi col primo, o variamente modificandolo, hanno dato origine a stupende aureole polimetamorfiche, caratterizzate dalla presenza di andalusite, chiastolite, cordierite, diopside granulare, ecc. Si osservano banchi grafitosi a sericite prevalente e subordinatamente quarzo ed albite; il cui metamorfismo è di grado più intenso del filladico: stadio più intenso denunciato dalla presenza della albite. In fine ricorrono anche lenti e banchi di *micascisti sericitico-muscovitici*, privi di quarzo e di un bel colore argenteo.

Potenti banchi di *micascisti granatiferi* ricorrono in tutta l'area di Marina di Siniscola, a nord dell'ammasso granitico di Capo Comino. Questi micascisti, unitamente a quelli di Stintino, sono i più tipici della Sardegna, e quelli a più alto grado di cristallinità. Associati al quarzo muscovite-granato, che sono i costituenti essenziali, ricorrono, in quantità variabile, la biotite, l'anfibolo, il pirosseno, l'albite: per cui essi fanno talora passaggio a micascisti anfibolico-granatiferi, pirossenico-granatiferi. E con l'arricchirsi in albite fanno passaggio a tipici paragneis granatiferi, anfibolici, pirossenici: i quali, anche qui, come nella penisola di Capo Falcone, si alternano ai micascisti.

Né mancano in questa area a sud-est di Siniscola facies prive di quarzo, e composte di muscovite-clorite-biotite-granato ed avente alta cristallinità e struttura fibroblastica.

Frequenti sono le facies «metascistose» conseguenti da depositi misti di materiale sedimentare e di materiale tufaceo eruttivo sottomarino.

3. *I calcari cristallini*. - Interstratificati nella corteccia, ricorrono anche lenti e banchi di calcari marmorizzati: ad esempio a Tula (Charrier l. c. pag. 163), ad Ozieri ecc.

Banchi di calcari cristallini ricorrono in altre località della Sardegna, anche all'infuori dello scistoso-cristallino. Alcuni ad orthoceratidi, quali: Mandas, R. Mulargia, Fluminimaggiore, Correboi, Pala Manna (Sarrabus) ecc.; altri, nei quali non sono stati ritrovati fossili, almeno sinora, quali: M. Cardiga (estesissimi), Azuni, S. Giorgio di Tartenia, Silanus, Aritzu ecc., ma per facies e giacitura analoghi ai precedenti (sopra al grafitoso variamente metamorfico, riferibile al londonderry).

Di qui muoveremo per un tentativo di datazione dei terreni scistoso-cristallini.

## CONCLUSIONI.

In Sardegna ricorrono dunque sia rocce ofiolitiche (rocce verdi, esclusi i serpentinoscisti) sia scisti cristallini con caratteri uguali alle rocce alpine e calabresi, e di ogni altro zoccolo scistoso cristallino del mondo.

Ciò che qui interessa metterè in evidenza, sono i rapporti di giacitura, dei vari tipi di scisti cristallini tra loro e col franco siluriano. Gli ortogneis

granitoidi rappresenterebbero i nuclei più antichi, e si potrebbero paragonare ai grandi nuclei ortogneissici centrali alpini (Catena dei Tauri. Gran Paradiso, Gruppo dell'Argentera). Questi nuclei della Sardegna, molto piccoli rispetto agli alpini, sono avvolti essi pure, come gli alpini, da una corteccia scistosa ortogneissica, e, successivamente, da una corteccia paragneissica e mica-scistosa. Entro questa corteccia si sviluppano lenti di gneis occhiadini (Cantoniera di S. Anna presso Siniscola), talvolta minuti (Nurra a nord di M. Giesgia) e le più franche facies di pietre verdi, banchi di calcari cristallini, in analogia con quanto si osserva nelle Alpi. Ma in Sardegna è meno agevole cogliere questi rapporti di giacitura (successione), perché l'imbasamento antico è rotto e spezzettato dalle estese intrusioni granitiche della Gallura, di Capo Comino, ecc.

Taluni autori <sup>(3)</sup> hanno erroneamente scritto che lo scistoso, cristallino di Sardegna è dovuto all'azione metamorfica dei graniti e da interpretarsi quale facies laterale dei graniti.

No: lo scistoso cristallino è caratterizzato da un metamorfismo regionale che era già completato ed aveva già l'assetto che oggidì presenta, quando furono messi in posto i magmi granitici: i quali, pertanto, sono estranei totalmente al metamorfismo regionale dell'imbasamento antico di *tutta* la Sardegna.

Questi magmi granitici indussero negli gneis (orto, meta e para) un metamorfismo di contatto, ben noto in altre parti del mondo (Harker, p. 101 e sg., Cap. VII) e per la Sardegna solo qui in questa Nota, per la prima volta accennato: metamorfismo che talora si sovrappose e si sommò all'esistente, e talvolta lo modificò: od anche, eccezionalmente, lo cancellò sostituendovisi integralmente.

Se si fosse dell'opinione di assegnare alla corteccia scistoso-cristallina una genesi dovuta anche ad una teleimpregnazione, ed a contatto; che sarebbe ipotesi altamente improbabile data la natura dei prodotti litoidi, e dato, soprattutto, la uniformità di intensità del metamorfismo che si mantiene costante su estese aree, si dovrebbe chiamare in causa, caso mai, non già i magmi granitici, che, ripetiamolo, ne sono totalmente estranei, bensì connetterla alla messa in posto di magmi ben più antichi: quelli, ad esempio, dalla cui consolidazione si originarono gli ortogneiss granitoidi.

Ma anche così rabberciata l'ipotesi non reggerebbe, perché è ben evidente che il para ed il meta scistoso cristallino consegue da metamorfismo termico (non di contatto) e di carico.

Per quanto riguarda il grado di metamorfismo dell'imbasamento antico sardo, vale che esso è al disotto del *filladico*, e conserva ancora quindi carattere argilloscistoso ed arenaceo sino al parallelo passante grosso modo per Escalaplano; si eleva quindi a filladico, e tale si conserva sino a nord del Genargentu: per assumere poi carattere di intensità per cui le facies litoidi vanno ascritte tra gli scisti cristallini.

(3) TEICHMÜLLER, *Zur geologie das Tyrrhenisgebietes*, p. 4 e p. 5.

Nella Nurra il filladico ha termine poco a nord di M. Canaglia e inizia lo scistoso cristallino. La zona a sud della Nurra ha metamorfismo tra l'argiloscistoso ed il filladico: quella di M. Canaglia ha subito lo stesso grado di metamorfismo del siluriano del Gennargentu. Da Stintino verso nord si ha una intensità di metamorfismo che è quella della zona Siniscola-Tula. Più a nord compaiono solo ortogneis.

Si sono così definite, sommariamente, le linee isogradometamorfiche per la Sardegna <sup>(4)</sup>.

Convieni far notare ancora che l'imbasamento è un complesso concordante: escluso ben si intende il cambriano dell'Iglesiente.

Infatti dalla punta meridionale sino alla settentrionale (stando sulla costa orientale), non si osservano discordanze stratigrafiche.

Questo poderoso complesso, potente oltre sei o sette chilometri, è tutto di età siluriana?

Le ultime assise che conservano franca facies siluriana sono quelle che stanno a riddosso delle formazioni paragneissiche-micascistose: ascriverle quindi al siluriano, anche in mancanza di testimonianze fossili, è ragionato e persuasivo: così come è persuasivo ammettere coevi gli ortogneis in esse interstratificate (quelli della Nurra). Questi ortogneis, e gli altri interstratificati nelle cortecce paragneissico-micascistose (gneis occhiadini di Siniscola ecc.) e le facies metascistose, conseguono da eruzioni laviche e tufacee sottomarine durante la sedimentazione, sono insomma formazioni di geosinclinale, e non iniezioni *dopo la fine della sedimentazione*.

Infatti non hanno nessuna autonomia statigrafica; hanno condiviso tutte le vicende tettoniche dei sedimenti nei quali sono interstratificate; sono caratterizzate da una evoluzione metamorfica provocata e controllata dalle identiche condizioni fisiche che provocarono e contrallarono quella dei sedimenti; non si osservano fatti che inducano a sospettare *un coimpaginamento tettonico* mascherante eventuali preesistenti discordanze.

Ma rimane aperto, a nostro avviso, il problema della età dei nuclei *ortogneissici granitoidi*, che affiorano più a nord (S. Teodoro, Coghinass, Caprera, ecc.) e delle formazioni paragneissiche-micascistose, che sono, con essi, scistose in concordanza, e che gli avvolgono, e ne costituiscono una corteccia, una «schiefer-hülle» analogamente a quanto è dato osservare nelle Alpi, in Calabria, nel Massiccio Centrale della Francia, ecc.

È una questione grossa che s'intreccia con l'altra anche essa insoluta, relativa alla genesi degli scisti cristallini.

L'affronteremo.

(4) Per i metamorfismi di contatto in aree peri ed apometamorfiche si veda la trattazione fattane dall'Autore in « Rendiconti dell'Associazione Mineraria Sarda », 58°, 1954.

**Biochimica.** — *L'azione agglutinante della bilirubina sui globuli rossi in assenza di ioni calcio e in presenza di ioni magnesio* (\*). Nota (\*\*) del Corrisp. ANTONINO CLEMENTI.

Le ricerche eseguite nel 1930 da me <sup>(1)</sup> in collaborazione con F. Condorelli, iniziate allo scopo di controllare l'affermazione di Hausmann <sup>(2)</sup>, secondo cui esisterebbe una emolisi fotodinamica causata dalla bilirubina, dimostrarono per la prima volta l'esistenza della proprietà della bilirubina di esplicare intensa azione agglutinante sui globuli rossi sospesi in liquido di Ringer: tale azione è esercitata dalla bilirubina sciolta allo stato di sale sodico anche a diluizioni altissime, è indebolita dalla presenza di siero di sangue e di sali biliari ed è caratterizzata dal cosiddetto «fenomeno paradossoso» noto nella agglutinazione serica.

Dalle successive ricerche eseguite nel 1933 da me e da F. Condorelli <sup>(3)</sup> risultò, che i globuli rossi sospesi in soluzioni isotoniche di cloruro di stronzio, di calcio o di bario sono intensamente agglutinati dalla bilirubina e invece, sospesi in soluzioni isotoniche di cloruro di sodio, di potassio o di magnesio, non sono agglutinati o lo sono lentamente e debolmente.

Negli anni successivi approfondii lo studio dell'azione agglutinante della bilirubina sui globuli rossi e nel 1941 <sup>(3)</sup> misi in evidenza i seguenti fatti, che ne spiegano il meccanismo fisico-chimico:

1° Piccole quantità di citrato di sodio aggiunte alla soluzione isotonica di cloruro di sodio, in cui sono sospesi i globuli rossi ripetutamente lavati, li rende nettamente inagglutinabili dalla bilirubina sciolta come bilirubinato di sodio anche a forte concentrazione; l'aggiunta successiva di piccole quantità di cloruro di calcio, di stronzio o di bario, ne determina istantaneamente l'agglutinazione; risultò così dimostrato, che l'azione agglutinante della bilirubina è condizionata dalla presenza degli ioni dei metalli alcalino-terrosi, che sono capaci di formare con essa sali insolubili, cioè elettroliticamente indissociabili.

2° La bilirubina aggiunta come bilirubinato di sodio viene fissata per adsorbimento orientato dalla membrana cellulare dei globuli rossi sospesi in soluzione isotonica di cloruro di sodio citratata: essi non vengono agglutinati e visti al microscopio appaiono colorati leggermente in giallo.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Catania.

(\*\*) Presentata nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) A. CLEMENTI e F. CONDORELLI, «Boll. Soc. ital. Biol. sper.», 5, 482 e 486 (1930); 8, 1548 (1933); «Biochem. Zeitschr.», 238, 278 (1931); 266, 221 (1933); «Atti Accad. Gioenia Sc. Natur. Catania», ser. 5<sup>a</sup>, 18 (1930); 20 (1933).

(2) HAUSMANN, «Biochem. Zeitschr.», 15 (1908).

(3) A. CLEMENTI, «Boll. Soc. ital. Biol. sper.», 8, 882 (1933); 10, 899 (1935); 16, 515, 517 e 519 (1941).

3° La biliverdina è, come la bilirubina, capace di formare col calcio, col bario e con lo stronzio sali praticamente insolubili, ma è priva della proprietà di essere fissata dai globuli rossi sospesi in soluzione isotonica di cloruro di sodio citratata ed è ugualmente priva della proprietà di agglutinare i corpuscoli rossi sospesi in liquido di Ringer.

4° I corpuscoli rossi, che in soluzione di cloruro di sodio citratata hanno fissato la bilirubina alla loro membrana cellulare e che vengono successivamente sospesi in soluzione di cloruro di sodio, non sono agglutinati e non hanno perduto la loro carica elettrica negativa; infatti sottoposti alla prova elettroforetica migrano al polo positivo. Essi per aggiunta di piccole quantità di cloruro di calcio sono istantaneamente agglutinati e contemporaneamente perdono la carica elettrica negativa.

Da questi fatti risultò chiaramente dimostrato, che il meccanismo dell'azione agglutinante della bilirubina è di natura elettrochimica e che l'agglutinazione dei globuli rossi sospesi in liquido di Ringer per azione della bilirubina si può distinguere in due tempi. Il primo tempo è rappresentato dalla fissazione della bilirubina per adsorbimento orientato sulla membrana cellulare dei globuli rossi, che non perdono la loro carica elettrica negativa e non sono agglutinati. Il secondo tempo è rappresentato dalla combinazione dei bilirubino-ioni, già fissati alla membrana cellulare, cogli ioni calcio e dalla consecutiva formazione del bilirubinato di calcio, il quale, essendo elettroliticamente indissociabile, causa la perdita della carica elettrica negativa dei globuli rossi e quindi la loro agglutinazione.

Con successive ricerche <sup>(4)</sup> nel 1951 dimostratei, che la bilirubina, sciolta come bilirubinato di sodio, anche a diluizioni elevatissime, esplica una intensa azione agglutinante sui batteri (*E. coli*) sospesi in liquido di Ringer; se essi invece vengono lavati ripetutamente per centrifugazione e vengono sospesi in soluzione fisiologica di cloruro di sodio citratata (assenza di ioni calcio) diventano inagglutinabili dal bilirubinato di sodio, anche se aggiunto a forte concentrazione; l'aggiunta successiva di piccole quantità di cloruro di calcio, di stronzio o di bario determina rapida agglutinazione. Da questi risultati trassi la conclusione, che il meccanismo con cui si svolge l'azione agglutinante della bilirubina sui batteri sospesi in liquido di Ringer non differisce da quello con cui si attua l'agglutinazione dei globuli rossi; formulai inoltre l'ipotesi, che anche nel caso della agglutinazione di globuli rossi o di batteri determinata dalle agglutinine seriche, gli elettroliti provocano la perdita della carica elettrica negativa delle cellule in quanto i loro cationi si combinano chimicamente con gli ioni globulinici delle agglutinine fissati alla membrana cellulare formando con essi composti salini elettroliticamente indissociabili.

Le mie precedenti ricerche hanno chiarito il meccanismo fisico-chimico col quale viene influenzata l'azione agglutinante della bilirubina dagli ioni sodio, potassio e litio (che formano bilirubinati solubili) e dagli ioni cal-

(4) A. CLEMENTI, « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 27, 512 (1951).

cio, stronzio e bario (che formano bilirubinati praticamente insolubili), ma non mi è stato possibile finora venire a conclusioni definitive circa l'influenza esercitata su di essa dall'ione magnesio, per la mancanza di notizie riguardanti la solubilità del bilirubinato di magnesio.

Il fatto che le soluzioni assai diluite di bilirubinato sodico restano perfettamente limpide dopo aggiunta di cloruro di magnesio, induceva a considerare il bilirubinato di magnesio come un sale solubile alla stregua del bilirubinato di sodio, di potassio e di litio e ad ammettere, che l'influenza dell'ione magnesio sulla emoagglutinazione da bilirubina sia del tutto analoga a quella degli ioni dei metalli alcalini. Approfondendo però lo studio di questo problema mi è stato possibile stabilire, che l'aggiunta di cloruro di magnesio a soluzioni di bilirubinato di sodio notevolmente concentrate, dà luogo prima alla formazione di flocculati, che ne causano l'intorbidamento, e poi alla deposizione di un precipitato, il quale si ridiscioglie per aggiunta di acqua. Questo fatto dimostra, che il bilirubinato di magnesio è un sale solubile, ma non così solubile come il bilirubinato di sodio, di potassio o di litio. Ho giudicato quindi importante determinare il limite della solubilità del bilirubinato di magnesio e stabilire, se in presenza di ioni magnesio l'azione agglutinante della bilirubina non si manifesta quando la quantità del bilirubinato di magnesio formatosi è inferiore al limite della sua solubilità e se invece si manifesta appena tale limite viene superato e una parte del bilirubinato di magnesio presente resta indissolto e quindi elettroliticamente indissociato.

Per raggiungere questo scopo nell'eseguire le presenti esperienze ho proceduto nel seguente modo:

Si distribuivano in una serie di provettine quantità crescenti (da cc 0,880 a cc 0,896) di una soluzione costituita da cc. 90 di NaCl 0,9% e cc 10 di citrato di sodio 4%; quindi si aggiungevano quantità decrescenti (da cc 0,02 a cc 0,004) di una soluzione all'1% di bilirubina allo stato di sale di sodio, e infine si aggiungeva ad ogni provettina cc 0,1 di una soluzione di cloruro di magnesio al 3,06%. Il volume finale del liquido risultava così in ogni provettina uguale a 1 cc e le diluizioni della bilirubina aumentavano progressivamente da 1:5.000 a 1:20.000 — 1:25.000. Si leggeva quindi l'intorbidamento dovuto al bilirubinato di magnesio formatosi per doppia decomposizione (dopo 15 m' o dopo 1 h alla temperatura di 28°C o di 37°C) e si stabiliva a quale diluizione della soluzione di bilirubina l'intorbidamento era intenso (+++), lieve (++—) o nettamente assente (— — —).

In una seconda serie di provettine si distribuivano quantità progressivamente crescenti (da cc 0,880 a cc 0,896) di una sospensione di globuli rossi di bue al 2% in una soluzione formata da cc 90 di NaCl 0,9% e da cc 10 di citrato di sodio 4%; quindi si aggiungevano quantità decrescenti (da cc 0,02 a cc 0,004) di una soluzione all'1% di bilirubina allo stato di sale di sodio e infine ad ogni provetta si aggiungeva cc 0,1 di una soluzione di cloruro di magnesio al 3,06%. Il volume finale del liquido risultava così in ogni provetta, come nella prima serie, uguale a 1 cc e le diluizioni della bili-

rubina aumentavano progressivamente da 1 : 5.000 a 1 : 20.000 — 1 : 25.000. Si allestivano anche controlli in cui o non si aggiungeva alla sospensione di globuli rossi il cloruro di magnesio (assenza di ioni magnesio e di ioni calcio) o i globuli rossi erano sospesi non in soluzione di NaCl citratata, ma in liquido di Ringer (assenza di ioni magnesio e presenza di ioni calcio). Si stabiliva così a quale diluizione della soluzione di bilirubina l'agglutinazione era intensamente positiva (+++), o debolmente positiva (++—) o nettamente negativa (— — —).

TABELLA I.

| Bilirubina<br>mg. 10<br>NaOH $\frac{N}{10}$ 0,4 cc.<br>Acqua 0,6 cc.<br>(Soluzione 1%)<br>cc. | NaCl 0,90 %<br>cc. 9<br>Citratato di sodio<br>4 % cc. 10<br>cc.                                       | MgCl <sub>2</sub> 6H <sub>2</sub> O<br>3,06 %<br>cc. | Diluizione<br>della solu-<br>zione di bili-<br>rubina | Concentra-<br>zione percen-<br>tuale della<br>soluzione di<br>bilirubina<br>mg. | Concentra-<br>zione percen-<br>tuale della<br>soluzione di<br>bilirubinato<br>di magnesio<br>(calcolata)<br>mg. | Intorbidamento<br>dovuto al<br>bilirubinato<br>di magnesio<br>dopo 15 m'<br>a 28° C. |
|---|---|--|---|---|---|--|
| 0,020   | 0,880   | 0,1  | 1 : 5.000   | 20,0  | 20,8  | +++  |
| 0,010   | 0,890   | 0,1  | 1 : 10.000  | 10,0  | 10,4  | +++  |
| 0,009   | 0,891   | 0,1  | 1 : 11.000  | 9,1   | 9,4   | +++  |
| 0,008   | 0,892   | 0,1  | 1 : 12.000  | 8,3   | 8,6   | +++  |
| 0,007   | 0,893   | 0,1  | 1 : 14.000  | 7,7   | 8,0   | ++—  |
| 0,006   | 0,894   | 0,1  | 1 : 16.000  | 7,1   | 7,4   | ± ± —  |
| 0,005   | 0,895   | 0,1  | 1 : 20.000  | 6,7   | 6,9   | — — —  |
|   | Sospensione<br>di globuli rossi<br>al 2 % in solu-<br>zione di NaCl<br>citratata come<br>sopra<br>cc. |  |   |   |   | Agglutina-<br>zione dei glo-<br>buli rossi<br>dopo 3 h. a<br>38° C                   |
| 0,020   | 0,880   | 0,1  | 1 : 5.000   | 20,0  | 20,8  | +++  |
| 0,010   | 0,890   | 0,1  | 1 : 10.000  | 10,0  | 10,4  | +++  |
| 0,009   | 0,891   | 0,1  | 1 : 11.000  | 9,1   | 9,4   | +++  |
| 0,008   | 0,892   | 0,1  | 1 : 12.000  | 8,3   | 8,6   | +++  |
| 0,007   | 0,893   | 0,1  | 1 : 14.000  | 7,7   | 8,0   | ++—  |
| 0,006   | 0,894   | 0,1  | 1 : 16.000  | 7,1   | 7,4   | ++—  |
| 0,005   | 0,895   | 0,1  | 1 : 20.000  | 6,7   | 6,9   | — — —  |
| 0,020   | 0,980   | 0  | 1 : 5.000   | 20,0  | 20,8  | — — —  |
| 0,001   | 0,999 (*)   | 0  | 1 : 100.000   | 5,0   | 5,2   | +++  |

(\*) Sospensione di globuli rossi al 2 % in liquido di Ringer.

Poiché, come ho già rilevato, il bilirubinato di magnesio, che si forma per doppia decomposizione dal bilirubinato di sodio e dal cloruro di magnesio, è un sale poco solubile, dalla presenza o dall'assenza di intorbidamento o di flocculati nelle soluzioni di bilirubina a diluizioni progressivamente crescenti

è stato possibile stabilire qual'è la diluizione delle soluzioni di bilirubina da cui si forma una quantità di bilirubinato di magnesio superiore o inferiore al limite della sua solubilità. Dalla lettura dell'intorbidamento (Tabella I e II) è risultato, che la quantità di bilirubinato di magnesio, che si forma dalle soluzioni di bilirubina alla diluizione di 1 : 20.000 o a diluizione maggiore non supera il limite della sua solubilità e lo supera invece quella che si forma dalle soluzioni di bilirubina a diluizioni minori, a cominciare dalla diluizione di 1 : 16.000. La solubilità del bilirubinato di magnesio dunque corrisponde alla quantità che si forma nelle condizioni suindicate dalle soluzioni di bilirubina alla diluizione di 1 : 16.000 e si può quindi calcolare come uguale a mg 6,9 in cento cc di acqua.

TABELLA II.

| Bilirubina<br>mg. 10<br>$\frac{N}{10}$ 0,4cc.<br>Acqua 0,6 cc.<br>Soluzione 1%)<br>cc              | NaCl 0,9 %<br>cc. 90<br>Citrato di sodio<br>4 % cc. 10<br>cc | MgCl <sub>2</sub> 6H <sub>2</sub> O<br>3,06 %<br>cc | Diluizione<br>della solu-<br>zione di bili-<br>rubina | Concentra-<br>zione percen-<br>tuale della<br>soluzione di<br>bilirubina<br>mg | Concentra-<br>zione percen-<br>tuale della<br>soluzione di<br>bilirubinato<br>di magnesio<br>(calcolata)<br>mg | Intorbidamento<br>dovuto al<br>bilirubinato<br>di magnesio<br>dopo 15 m'<br>a 28° C |
|--|--|---|---|--|--|---|
| 0,020  | 0,880  | 0,1   | 1 : 5.000   | 20,0   | 20,8   | + + +   |
| 0,010  | 0,890  | 0,1   | 1 : 10.000  | 10,0   | 10,4   | + + +   |
| 0,009  | 0,891  | 0,1   | 1 : 11.000  | 9,1  | 9,4  | + + +   |
| 0,008  | 0,892  | 0,1   | 1 : 12.000  | 8,3  | 8,6  | + + +   |
| 0,007  | 0,893  | 0,1   | 1 : 14.000  | 7,7  | 8,0  | + + +   |
| 0,006  | 0,894  | 0,1   | 1 : 16.000  | 7,1  | 7,4  | + + —   |
| 0,005  | 0,895  | 0,1   | 1 : 20.000  | 6,7  | 6,9  | — — —   |
| 0,004  | 0,896  | 0,1   | 1 : 25.000  | 6,2  | 6,5  | — — —   |
|  |  |   |   |  |  | Agglutina-<br>zione dei glo-<br>buli rossi<br>dopo 3 h.<br>a 38° C                  |
| Sospensione<br>di globuli rossi<br>al 2 % in solu-<br>zione di NaCl<br>citrata come<br>sopra<br>cc |  |   |   |  |  |   |
| 0,020  | 0,880  | 0,1   | 1 : 5.000   | 20,0   | 20,8   | + + +   |
| 0,010  | 0,890  | 0,1   | 1 : 10.000  | 10,0   | 10,4   | + + +   |
| 0,009  | 0,891  | 0,1   | 1 : 11.000  | 9,1  | 9,4  | + + +   |
| 0,008  | 0,892  | 0,1   | 1 : 12.000  | 8,3  | 8,6  | + + +   |
| 0,007  | 0,893  | 0,1   | 1 : 14.000  | 7,7  | 8,0  | + + +   |
| 0,006  | 0,894  | 0,1   | 1 : 16.000  | 7,1  | 7,4  | + + —   |
| 0,005  | 0,895  | 0,1   | 1 : 20.000  | 6,7  | 6,9  | + — —   |
| 0,004  | 0,896  | 0,1   | 1 : 25.000  | 6,2  | 6,5  | — — —   |
| 0,010  | 0,890  | 0   | 1 : 10.000  | 10,0   | 10,4   | — — —   |
| 0,001  | 0,999 (*)  | 0   | 1 : 100.000   | 5,0  | 5,2  | + + +   |
| 0,0005   | 0,999 (*)  | 0   | 1 : 200.000   | 2,5  | 2,6  | + + +   |

(\*) Sospensione di globuli rossi al 2 % in liquido di Ringer.

Dalla lettura dell'agglutinazione d'altra parte è risultato (Tabelle I e II), che i globuli rossi sospesi nelle soluzioni isotoniche di cloruro di sodio citratate, a cui è stato aggiunto cloruro di magnesio, non sono agglutinati se la diluizione della soluzione della bilirubina è di 1 : 20.000 o più, cioè se la quantità del bilirubinato di magnesio formatosi è inferiore al limite della sua solubilità e invece sono agglutinati, se le diluizioni delle soluzioni di bilirubina sono minori, a cominciare dalla diluizione di 1 : 16.000, cioè quando la quantità del bilirubinato di magnesio formatosi supera il limite della sua solubilità e rimane in parte elettroliticamente indissociato (figg. 1 e 2).

MECCANISMO CHIMICO-FISICO DELL'AGGLUTINAZIONE DEI GLOBULI ROSSI, SOSPESI IN SOLUZIONE CITRATATA ISOTONICA DI CLORURIO DI SODIO E DI CLORURIO DI MAGNESIO, CONSECUTIVA ALL'AGGIUNTA DI BILIRUBINA COME SALE SODICO.

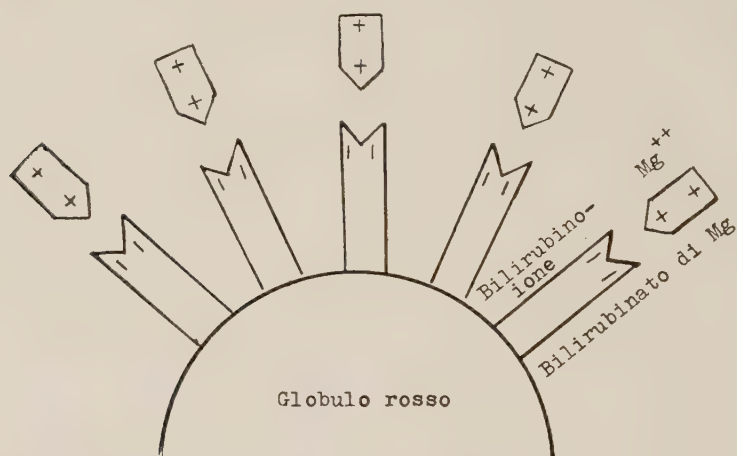


Fig. 1. - Diluizione della soluzione di bilirubina superiore a 1 : 16.000. Il bilirubinato di magnesio formatosi è tutto dissociato elettroliticamente e i globuli rossi non sono agglutinati.

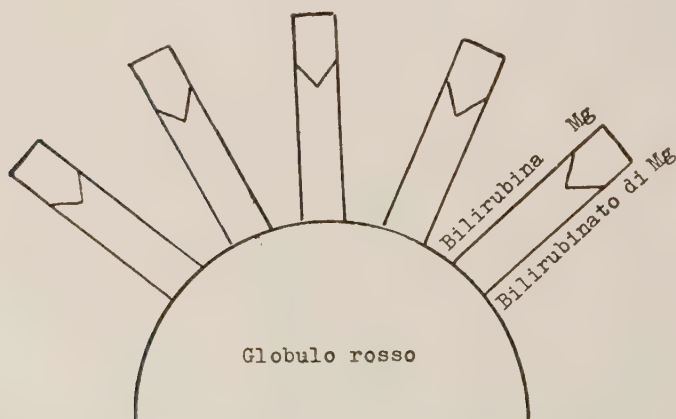


Fig. 2. - Diluizione della soluzione di bilirubina inferiore a 1 : 16.000. Il bilirubinato di magnesio formatosi è in gran parte elettroliticamente indissociato e i globuli rossi sono agglutinati.

I dati analitici riguardanti i controlli, in accordo con quelli delle mie ricerche precedenti, dimostrano che i globuli rossi sospesi nelle soluzioni isotoniche di cloruro di sodio citratate, ma senza aggiunta di cloruro di magnesio, non sono agglutinati, anche se le diluizioni delle soluzioni di bilirubina sono bassissime (1 : 5.000), cioè anche se il bilirubinato di sodio (sale solubilissimo) è presente a forte concentrazione; i globuli rossi sospesi in liquido di Ringer d'altra parte sono agglutinati anche se le diluizioni delle soluzioni di bilirubina sono altissime (1 : 100.000–1 : 200.000) e la quantità di bilirubinato di calcio che si forma (sale praticamente insolubile) è piccolissima.

Dai risultati surriferiti viene confermata limpidamente e definitivamente la conclusione tratta dalle mie precedenti ricerche, secondo cui il fattore determinante l'agglutinazione dei globuli rossi sospesi in soluzioni di sali inorganici e di bilirubina è rappresentato non dalla sola fissazione degli ioni bilirubinici alla membrana cellulare, ma anche dalla indissociabilità o dalla debole dissociazione elettrolitica del sale che essi formano combinandosi chimicamente con determinati cationi presenti nelle soluzioni saline. La spiegazione di questo fatto è la seguente: la semplice fissazione dei bilirubino-ioni col loro polo positivo ai gruppi polari elettronegativi della membrana cellulare dei globuli rossi non determina per sé la perdita della loro carica elettronegativa (essi conservano la loro convezione anodica) quando il sale che formano, combinandosi con i cationi degli elettroliti presenti, è tutto dissociato elettroliticamente (bilirubinato di sodio, di potassio, di litio, o bilirubinato di magnesio a una concentrazione che non supera il limite della sua solubilità) (fig. 1); solamente nel caso in cui il sale è elettroliticamente indissociato nella sua totalità (bilirubinato di calcio, di stronzio, di bario) o in parte (bilirubinato di magnesio a concentrazioni superiori al limite della sua solubilità) (fig. 2) ha luogo la perdita della carica elettrica negativa dei corpi cellulari, accompagnata dalla perdita della loro idrofilia, e quindi la loro agglutinazione.

**Fisiologia.** — *Gli effetti della stimolazione diretta del N. ottico sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto* (\*). Nota (\*\*) di GIAN PIETRO VON BERGER, ETTORE FADIGA e GIULIO CESARE PUPILLI, presentata dal Socio G. C. PUPILLI.

È noto che la stimolazione luminosa della retina e quella elettrica del N. ottico provocano stati di eccitamento delle vie di conduzione che non sono confrontabili tra loro. La presenza del recettore retinico introduce per un lato una desincronizzazione degli elementi afferenti e per l'altro condizioni di sommazione spaziale e temporale, le quali possono influire sulle caratteri-

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1956.

stiche della risposta finale [cfr. Buser <sup>(1)</sup>]: le articolazioni sinaptiche contenute nella retina realizzano infatti interconnessioni multiple, per le quali si effettuano processi di facilitazione e d'inibizione. Tali meccanismi, e inoltre il fatto che per ciascun recettore attivato dallo stimolo luminoso compare nella fibra corrispondente una scarica ripetitiva invece di un impulso isolato [Hartline <sup>(2,3)</sup>; cfr. Gastaut <sup>(4)</sup>], si possono ritenere determinanti rispetto alla differenza generale di andamento che presentano le due forme di risposta dell'area visiva cerebrale di Gatto <sup>(5)</sup>.

Dopo aver studiato la topografia e i caratteri dei potenziali provocati dallo stimolo fotico nella corteccia cerebellare del Gatto non narcotizzato [Fadiga, Pupilli e von Berger <sup>(6)</sup>] ovvero in narcosi cloralosica [Fadiga, Pupilli e von Berger <sup>(7)</sup>], con ricerche successive abbiamo indagato anche la risposta cerebellare alla stimolazione diretta del N. ottico, sotto gli stessi aspetti precedentemente esaminati. Tali ricerche qui riferiamo.

Per quanto riguarda il procedimento generale degli esperimenti, vedasi la Nota precedente [Fadiga, Pupilli e von Berger <sup>(6)</sup>]. Alla stimolazione elettrica del N. ottico, eseguita col metodo monopolare, si provvedeva con un apparecchio Grass mod. S4B: il nervo veniva eccitato in corrispondenza della papilla mediante singoli impulsi rettangolari, della durata di msec 0,1 e di voltaggio compreso tra 0,5 e 6 V; come elettrodo attivo era usato un filo di acciaio, del diametro di 500  $\mu$ , isolato interamente fuorché in punta. Aneste-

(1) P. BUSER, *Contribution à l'étude des potentiels lents centraux. Analyse de l'activité électrique du lobe optique de deux Vertébrés inférieurs*, « Arch. Sci. physiol. », III, 471 (1949).

(2) H. K. HARTLINE, *Intensity and duration in the excitation of single photoreceptor units*, « J. cell. comp. Physiol. », V, 229 (1934).

(3) H. K. HARTLINE, *The response of single optic nerve fibers of the Vertebrate eye to illumination of the retina*, « Amer. J. Physiol. », CXXI, 400 (1938).

(4) H. GASTAUT, *Manifestations électrographiques de l'activité des voies optiques*, « Riv. Neurol. », XXI, 261 (1951).

(5) MARSHALL, TALBOT e ADES [*Cortical response of the anesthetized cat to gross photic and electrical afferent stimulation*, « J. Neurophysiol. », VI, 1 (1943)] ritengono che l'aspetto della risposta cerebrale ottenuta mediante la stimolazione fotica sia il risultato della somma algebrica e della dispersione temporale di una serie di *spikes* registrabili in conseguenza della stimolazione elettrica del N. ottico: tali *spikes* sono stati interpretati da CHANG e KAADA [*An analysis of primary response of visual cortex to optic nerve stimulation in cats*, « J. Neurophysiol. », XIII, 305 (1950)] essenzialmente come l'effetto degl'influssi che nelle radiazioni ottiche si propagano per fibre di diverso diametro. Anche secondo BREMER e STOUPEL [*Interprétation de la réponse de l'aire visuelle corticale à une volée d'influx sensoriels*, « Arch. internat. Physiol. Bioch. », LXIV, 234 (1956)], che hanno recentemente ripreso l'argomento, il fenomeno è da ritenersi di natura presinaptica, ma la separazione reciproca delle singole punte risulterebbe da un processo intracorticale, e cioè dalla diversa velocità di propagazione che gl'impulsi acquisterebbero a livello delle terminazioni amieliniche delle fibre afferenti.

(6) E. FADIGA, G. C. PUPILLI e G. P. VON BERGER, *Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8<sup>a</sup>, questo volume.

(7) E. FADIGA, G. C. PUPILLI e G. P. VON BERGER, *Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto trattato con cloralosio*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8<sup>a</sup>, questo volume.

tizzata la congiuntiva con novocaina, l'elettrodo veniva introdotto nel bulbo oculare per un pertugio fatto nel lato temporale della sclerotica e precisamente 4 o 5 mm dietro il *limbus*; sotto controllo oftalmoscopico l'elettrodo stesso era spinto fino alla papilla, nel cui centro veniva infisso per circa 1 mm, rispettando i vasi. A fine di garantire la immobilità del bulbo, necessaria per la collocazione e fissazione dell'elettrodo, mediante sutura eseguita pure in anestesia novocainica si assicurava al *limbus* corneale un anello metallico, munito di un'asticciuola ricurva che veniva saldata con ceralacca alla teca cranica; in egual modo era poi fissato all'apparecchio di contenzione l'estremo isolato ed emergente dell'elettrodo, di guisa che tutto il sistema diveniva rigido e non erano quindi da temersi spostamenti della punta stimolante. L'elettrodo indifferente, costituito da un grosso ago a sezione triangolare, era infisso sotto la cute dell'arto posteriore ipsilaterale rispetto alla sede dell'elettrodo attivo.

Il metodo di preparazione dell'animale a cui ci siamo attenuti per effettuare la stimolazione diretta del N. ottico, a nostro parere racchiude i vantaggi sia di quello più comunemente seguito, secondo cui il nervo viene eccitato nella sua porzione immediatamente retrobulbare e l'occhio è lasciato *in situ* [cfr. Bishop e O'Leary<sup>(8)</sup>], sia dei procedimenti conforme ai quali la stimolazione del nervo in corrispondenza della papilla è messa in atto dopo la resezione del bulbo alla periferia del disco ottico [cfr. Marshall, Talbot e Ades<sup>(9)</sup>]. Nel nostro caso, stimolare la papilla era infatti preferibile, in modo da non provocare l'eccitamento anche delle branche del N. ciliare lungo<sup>(10)</sup> che per breve tratto, prima di perforare la sclerotica, decorrono accolte alla porzione retrobulbare del N. ottico [cfr. Reighard e Jennings<sup>(11)</sup>]; dall'altro canto abbiamo creduto che fosse opportuno evitare le conseguenze della demolizione quasi totale del bulbo oculare. In conclusione, il metodo descritto permette osservazioni protratte in preparati, che per la integrità della retina e dei suoi vasi conservano la sensibilità alla luce: nell'animale in esperimento, è così possibile da uno stesso lato alternare la stimolazione diretta del nervo e quella fotica.

Le risposte cerebellari sono state studiate tanto in mancanza di narcosi quanto in Gatti trattati con cloralosio, somministrato nella dose di 70 mg/kg per via intraperitoneale. Nell'animale non narcotizzato, a differenza di ciò che si osserva con l'impiego dello stimolo luminoso [cfr. Fadiga, Pupilli e von Berger<sup>(6)</sup>], la stimolazione elettrica della papilla provoca costantemente risposte cerebellari: per stimoli di poco sopraliminali, esse si derivano da tutta la corteccia messa allo scoperto, fuorché dalla porzione più caudale dell'*uvula*.

(8) G. H. BISHOP a. J. S. O'LEARY, *Electrical activity of the lateral geniculate of cats following optic nerve stimuli*, « J. Neurophysiol. », III, 308 (1940).

(9) W. H. MARSHALL, S. A. TALBOT a. H. W. ADES, *Cortical response of the anesthetized cat to gross photic and electrical afferent stimulation*, « J. Neurophysiol. », VI, 1 (1943).

(10) SNIDER [*A fifth cranial nerve projection to the cerebellum*, « Feder. Proc. », II, 46 (1943)], ha descritto nella corteccia cerebellare di Gatto un'area di proiezione trigeminale, che in molte zone si sovrappone a quella visiva.

(11) J. REIGHARD a. H. S. JENNINGS, *Anatomy of the cat*, New York, Holt a. Co. (1951).

La forma delle oscillazioni di potenziale che si registrano dal verme per stimolazione diretta del nervo (fig. 1, A e B), è del tutto simile a quella delle onde elettriche che lo stimolo luminoso provoca nella stessa sede; e anche le risposte derivate dagli emisferi (fig. 1, C e D) sono analoghe, quanto al segno e alla forma, a quelle talora destinate dal *flash*. Il tempo di latenza varia da 7 a 15 msec: sulla latenza della risposta e sull'ampiezza delle oscillazioni riflesse, l'aumento d'intensità della stimolazione provoca effetti analoghi a quelli che si osservano con lo stimolo luminoso, giacché la prima diminuisce e la seconda aumenta. Inoltre, col crescere del voltaggio dello stimolo, a partire dal valore liminale, cresce l'area di distribuzione delle risposte: l'aumento è

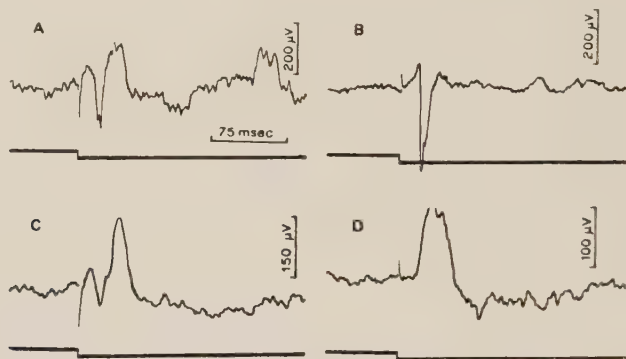


Fig. 1. - Risposte alla stimolazione elettrica del N. ottico registrate dalla corteccia cerebellare di Gatto.

Animale non narcotizzato. Derivazione dalla superficie del *folium vermis* (A e B), del *crus II* di sinistra (C) e del *crus I* dello stesso lato (D); gli stimoli sono indicati dall'artefatto inscritto negli elettrogrammi cerebellari e dalla deflessione sincronizzata del secondo pennello catodico. In questa figura e nella seguente, le deflessioni verso l'alto corrispondono alla polarità negativa.

molto rapido, tanto che per un voltaggio poco più elevato di quello dello stimolo-soglia la reazione della corteccia cerebellare è generalizzata. Nella fig. 2 si osserva come lo stimolo minimo sufficiente per destare la risposta del *paleocerebellum* non abbia provocato variazioni dell'attività elettrica del lobulo ansoparamediano, conforme a quanto avviene in genere: nel caso in esame, la reazione della corteccia neocerebellare è comparsa per un aumento del voltaggio dello stimolo pari al 40% circa del valore di soglia.

Per quanto concerne le osservazioni eseguite su animali trattati con cloralosio, quando si prescinde dalla minore durata della latenza (11-19 msec), i potenziali riflessi ottenuti con lo stimolo elettrico sono del tutto analoghi a quelli provocati da stimoli fotici, tanto per distribuzione topografica quanto per forma; il che ci dispensa dal riferirne partitamente. E anche confrontando tra loro le risposte che la stimolazione elettrica del nervo provoca in uno stesso animale, prima e dopo il trattamento con cloralosio, si notano gli stessi fatti osservati negli esperimenti eseguiti impiegando lo stimolo specifico [Fadiga, Pupilli e von Berger<sup>(7)</sup>]: così, nell'elettrogramma derivato dal Gatto in narcosi cloralosica, si rileva la maggiore ampiezza delle oscilla-

zioni riflesse, come pure l'allungamento del tempo di latenza. Le relazioni che a proposito delle prove attuate col *flash* abbiamo detto esistere tra latenza e ampiezza delle risposte, da un lato, e intensità della stimolazione dall'altro, si sono verificate anche in questi esperimenti; esse pertanto acquistano, com'era ovvio, un valore generale.

Prima e dopo la somministrazione di cloralosio, l'applicazione sulla corteccia cerebellare di soluzioni di farmaci (nitrato di stricnina al 0,1%; cloridrato di cocaina al 5%; Nembutal Abbott al 6%) provoca nelle risposte alla stimolazione diretta del nervo modificazioni in tutto corrispondenti a quelle che compaiono nei potenziali destati dallo stimolo specifico.

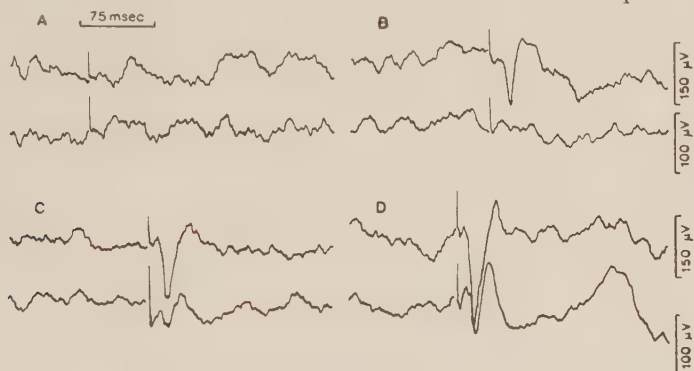


Fig. 2. — Confronto della soglia della risposta alla stimolazione elettrica del N. ottico registrata dal verme con quella della reazione ottenuta contemporaneamente dal lobulo ansiforme, nel Gatto.

Animale non narcotizzato. In A, B, C e D, l'elettrogramma superiore è derivato dalla superficie del *folium vermis* e l'inferiore da quella del *crus II* di sinistra; le stimolazioni (indicate dall'artefatto) sono effettuate con impulsi di crescente voltaggio, a partire da valori infraliminali, e cioè rispettivamente con V 1,8 (A), 2,1 (B), 3 (C) e 5 (D). L'ampiezza dell'artefatto non è proporzionale al voltaggio degli stimoli.

Da quanto si è riferito intorno ai caratteri generali delle risposte derivabili dalle varie regioni corticocerebellari per effetto della stimolazione diretta del N. ottico, risulta che non sussistono diversità di forma tra questi potenziali riflessi e quelli provocati nelle stesse sedi dallo stimolo luminoso. La sola differenza che nei nostri esperimenti si nota nettamente, riguarda il tempo di latenza: per tutti i valori di illuminamento e voltaggio utilizzati, tale durata è sempre maggiore con l'impiego del *flash* che con la stimolazione del nervo. La qual cosa è facilmente spiegabile, considerando che l'effetto dello stimolo specifico si svolge con la mediazione dei fotocettori; e un'analoga osservazione è stata fatta anche a proposito delle reazioni che si ottengono dall'area striata [Marshall, Talbot e Ades<sup>(9)</sup>]. La uniformità sostanziale con cui a differenza delle risposte derivabili da altre sedi<sup>(12)</sup> si svolge

(12) Oltre ai dati concernenti la risposta dell'area di proiezione cerebrale, citati all'inizio, ricordiamo anche le recenti osservazioni di BUSER [*Analyse des réponses électriques du lobe optique à la stimulation de la voie visuelle chez quelques Vertébrés inférieurs*. Thèse de Paris, Masson (1955)] intorno alle reazioni elettriche dei lobi ottici di Pesce-Gatto, Tinca, Rana e Piccione.

la reazione cerebellare, qualunque sia la stimolazione messa in atto, è in modo attendibile la conseguenza dei processi di moltiplicazione, diffusione e somministrazione degl'influssi centripeti che nell'interno della corteccia del cervelletto si svolgono, per la sua stessa disposizione architettónica, e che mascherano le differenze di organizzazione spazio-temporale dei messaggi cerebellipeti.

Quanto alla topografia dei potenziali riflessi da noi studiati, le presenti indagini hanno dato evidenza a una distribuzione delle risposte che è diffusa al verme e agli emisferi anche in Gatti non trattati con cloralosio, quando il voltaggio dello stimolo abbia raggiunto un valore di poco superiore a quello della soglia. Sotto questo aspetto, i risultati delle prove eseguite con la stimolazione diretta del nervo differiscono da quelli ottenuti con la stimolazione luminosa: come abbiamo fatto noto precedentemente [Fadiga, Pupilli e von Berger <sup>(6)</sup>], lo stimolo specifico, anche massimale, nel Gatto non narcotizzato desta comunemente risposte circoscritte nel verme. Una possibile interpretazione di tale differente ampiezza dell'area di proiezione sarà discussa nel lavoro *in extenso*.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes.* Nota II <sup>(\*)</sup> di J. SEBASTIÃO E SILVA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

4. DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR. — Considérons  $n + 1$  espaces localement convexes  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$  et, dans chaque espace  $X_i$ , un ensemble  $\mathfrak{B}_i$  de bornés de  $X_i$  vérifiant les conditions indiquées au n. 1. Désignons par  $\mathbf{X}$  l'espace produit  $\prod_1^n X_i$  et par  $\mathbf{B}$  l'ensemble des bornés  $B_1 \times \dots \times B_n$  de  $\mathbf{X}$ , avec  $B_i \in \mathfrak{B}_i$ . Nous représenterons par  $\Lambda(\mathbf{X}; Y)$  l'espace vectoriel des fonctions multilinéaires  $G(x_1, \dots, x_n)$  définies dans  $\mathbf{X}$  et prenant leurs valeurs dans  $Y$ . Par le symbole

$$\Lambda_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}; Y) \quad [\text{ne pas confondre avec } \Lambda_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}, Y)]$$

nous désignerons le sous-espace de  $\Lambda(\mathbf{X}; Y)$  constitué par les fonctions  $G(x_1, \dots, x_n)$  qui sont bornées sur tout ensemble  $B \in \mathbf{B}$ , cet espace étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles  $B \in \mathbf{B}$ .

Nous supposons maintenant  $X_1 = \dots = X_n$  et  $\mathfrak{B}_1 = \dots = \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}$ ; alors  $\mathbf{X} = X^n$ . Posons

$$Y^{(0)} = Y, \quad Y^{(n)} = \Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y^{(n-1)}), \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

(\*) Cette Note est la continuation d'une autre avec le même titre publiée dans ces « Rendiconti », 8, XX, pp. 743-750.

(\*\*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

Alors on démontre que, si l'on pose pour tout  $\Theta \in Y^{(n)}$ :

$$\hat{\Theta}(h_1, \dots, h_n) = (((\Theta h_1) h_2) \dots) h_n, \quad \text{pour } h_1, \dots, h_n \in X,$$

la correspondance  $\Theta \leftrightarrow \hat{\Theta}$  est un isomorphisme entre les espaces vectoriels topologiques  $Y^n$  et  $\Lambda_{\mathbf{B}}(X^n; Y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (cf. [12], pp. 20, 21). Nous pourrions donc identifier  $\Theta$  avec  $\hat{\Theta}$ . Pour  $h_1 = \dots = h_n = h$ , nous écrivons

$$\Theta \cdot h^{[n]} \text{ comme abbréviation de } \Theta(h, \dots, h).$$

Cela étant, reprenons la fonction  $f(x)$  définie dans l'ouvert  $D$  de  $X$ , à valeurs dans  $Y$ , et soit  $a$  un point de  $D$ . Nous dirons que  $f(x)$  est *une fois différentiable* ( $\mathfrak{B}$ ) *en*  $a$ , si elle est différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) en  $a$ ; et nous poserons  $f^{(1)}(a) = f'(a)$ . Cela étant, nous dirons, pour  $n = 2, 3, \dots$ , que  $f(x)$  est  *$n$  fois différentiable* ( $\mathfrak{B}$ ) *en*  $a$ , si  $f(x)$  est  $n - 1$  fois différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans un voisinage de  $a$  et  $f^{(n-1)}(x)$  est différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) en  $a$ ; nous désignerons alors par  $f^{(n)}(a)$  (*dérivée d'ordre  $n$  de  $f(x)$  en  $a$* ) la dérivée de  $f^{(n-1)}(x)$  en  $a$ ; il est évident que  $f^{(n)}(a) \in Y^{(n)}$ . Nous pouvons donc envisager  $f^{(n)}(a)$  comme opérateur multilinéaire, élément de  $\Lambda_{\mathbf{B}}(X^n; Y)$ . On a en outre le résultat suivant:

(4.1) *Si  $f(x)$  est  $n$  fois bi-différentiable en  $a$ , sa dérivée d'ordre  $n$  en  $a$ , considérée comme élément de  $\Lambda(X^n; Y)$ , est un opérateur symétrique, c'est-à-dire, la valeur de*

$$F^{(n)}(a)(h_1, h_2, \dots, h_n), \quad \text{pour } h_1, \dots, h_n \in X,$$

*ne dépend pas de l'ordre de  $h_1, h_2, \dots, h_n$ .*

La démonstration est essentiellement la même que l'on donne dans le cas des espaces normés (cf. [12], pp. 25-26). Il convient de souligner que, pour la symétrie de l'opérateur  $f^{(n)}(a)$ , il suffit que  $f(x)$  soit  $n$  fois différentiable en  $a$  par rapport aux bornés de dimension 2. Observons encore que

(4.2) *Quels que soient  $\Theta \in Y^{(n)}$  et  $p = 1, 2, \dots$ , la fonction  $\Theta x^{[n]}$  est  $p$  fois différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $X$ . Si en outre  $\Theta$  est symétrique, on a*

$$\frac{d^p}{dx^p}(\Theta x^{[n]}) = n(n-1) \dots (n-p+1) \Theta x^{[n-p]}, \text{ pour } p \leq n.$$

5. FORMULE DE TAYLOR. RAPPORT ENTRE LES DIFFÉRENCES FINIES ET LES DIFFÉRENTIELLES. — Considérons encore la fonction  $f(x)$  définie dans  $DCX$  et prenant ses valeurs dans  $Y$ . Les propositions (2.2), (3.2) et (4.2) nous permettent d'établir aisément le résultat suivant:

(5.1) *Si  $f(x)$  est  $n$  fois différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) en  $a$ , on aura, dans un voisinage convenable de  $a$ , le développement de Taylor généralisé*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) h^{[i]} + R(h),$$

où  $R(h)$  est un infiniment petit avec  $h$ , d'ordre supérieur à  $n$  par rapport à  $\mathfrak{B}$ .

Avec l'hypothèse que  $f(x)$  soit  $n$  fois différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans un voisinage  $V$  quelconque de  $a$ , la formule de Taylor prend la forme suivante, généralisation de (3.2):

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) h^{[i]} + \int_{\Gamma}^{\wedge} f^{(n)}(x) (h-x)^{[n-1]} dx,$$

où  $\Gamma$  est une ligne quelconque, d'extrêmes  $a, a+h$ , contenue dans  $V$  et rectifiable ( $\mathfrak{B}$ ). (En particulier,  $\mathfrak{B}$  peut se réduire aux bornés de dimension 1).

Posons, comme d'habitude,  $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ ,  $\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h(\Delta_h f(x))$ , etc. De (5.1) on déduit alors, avec l'hypothèse de cette proposition, que la différence

$$\Delta_h^n f(a) - f^{(n)}(a) h^{[n]}$$

est un infiniment petit avec  $h$ , d'ordre supérieur à  $n$ , par rapport à  $\mathfrak{B}$ .

6. THÉORÈME DE LA DIFFÉRENTIELLE EXACTE. - Soit  $D$  un ouvert de  $X$ . Nous dirons que  $D$  est *non percé*, si, pour toute ligne polygonale  $P$ , simple et fermée, contenue dans  $D$ , il existe au moins une surface polyédrique de contour  $P$ , contenue dans  $D$ , qui soit homéomorphe à un cercle (disque) du plan <sup>(1)</sup>.

Soit maintenant  $F(x)$  une fonction définie dans l'ouvert  $D$  de  $X$  et prenant ses valeurs dans  $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ . Par un raisonnement semblable à celui de Goursat, dans sa démonstration du théorème de Cauchy sur les fonctions holomorphes (cf. [12], pp. 40-41), on démontre le théorème suivant:

(6.1) *Supposons que la fonction  $F(x)$  est différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  et que, pour tout  $x \in D$ , la dérivée  $F'(x)$  de  $F(x)$ , considérée comme élément de  $\Lambda(X^2; Y)$ , est un opérateur symétrique. Alors, si  $D$  est non percé et si  $\mathfrak{B}$  contient au moins les bornés de dimension 2, on peut affirmer que*

$$\int_C F(x) dx = 0$$

*pour toute ligne  $C$ , fermée et rectifiable ( $\mathfrak{B}$ ), contenue dans  $D$ .*

Il en découle, avec les mêmes hypothèses, que:

(6.2) *Si, en outre,  $Y$  est complet par rapport aux suites, on peut affirmer qu'il existe une fonction  $f(x)$  différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ , telle que  $f(x) = F(x)$  sur  $D$ , cette fonction étant donnée, dans chaque composante  $D_i$  de  $D$ , par la formule*

$$f(x) = \int_{c_i}^x F(x) dx,$$

*en fixant arbitrairement  $c_i$  dans  $D_i$ .*

C'est là une conséquence immédiate de (6.1), (3.3) et (1.5).

(1) Nous considérons seulement des lignes polygonales avec un nombre fini de côtés et de surfaces polyédriques avec un nombre fini de faces.

7. DÉRIVÉES PARTIELLES; THÉORÈME DE SCHWARZ GÉNÉRALISÉ. — Considérons  $n + 1$  espaces  $X_1, \dots, X_n, Y$ , et, dans chaque espace  $X_i$ , une classe  $\mathfrak{B}_i$  de bornés. (Nous adoptons encore ici les notations du n. 4). Soit d'autre part  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  une fonction définie dans un ouvert  $D$  de l'espace  $\mathbf{X} = \prod_1^n X_i$  et prenant ses valeurs dans  $Y$ . Les notions de différentiabilité partielle et de dérivée partielle s'introduisent ici d'une façon tout à fait semblable à celle classique, avec les mêmes notations; on trouve aussitôt le résultat suivant:

(7.1) *Si  $f(\mathbf{x})$  est différentiable ( $\mathbf{B}$ ) en un point  $\mathbf{a}$  de  $\mathbf{X}$ , alors cette fonction est différentiable ( $\mathfrak{B}_i$ ) en  $\mathbf{a}$  par rapport à  $x_i$ , quel que soit  $i = 1, 2, \dots, n$ , et on a précisément*

$$f'(\mathbf{a})(h_1, \dots, h_n) = f'_{x_1}(\mathbf{a})h_1 + \dots + f'_{x_n}(\mathbf{a})h_n$$

pour tout élément  $(h_1, \dots, h_n)$  de  $\mathbf{X}$ .

Limitons-nous maintenant au cas d'une fonction  $f(x, y)$  des deux variables  $x, y$  définie dans un ouvert  $D$  de  $X \times Y$  et prenant ses valeurs dans un autre espace  $Z$ . Étant donné un opérateur bilinéaire  $\Theta$  défini dans  $X \times Y$ , nous appelons *opérateur conjugué* de  $\Theta$ , et nous désignons par  $\overleftarrow{\Theta}$ , l'opérateur défini par la condition

$$\overleftarrow{\Theta}(h, k) = \Theta(k, h), \quad \text{pour } h \in X, k \in Y.$$

Cela étant, par un raisonnement semblable à celui classique, en remplaçant le théorème des accroissements finis par le th. (3.1), on parvient à la généralisation suivante du théorème de Schwarz:

(7.1) *Supposons que la fonction  $f(x, y)$  est uni-différentiable par rapport à  $x$  et uni-différentiable par rapport à  $y$  dans un voisinage de  $(a, b) \in D$ . Supposons en outre que la fonction  $f'_x(x, y)$  est uni-différentiable par rapport à  $y$  dans un voisinage de  $(a, b)$  et que la différence  $f''_{xy}(x, y) - f''_{xy}(a, b)$  est un infiniment petit avec  $(x - a, y - b)$  par rapport à tous les bornés de  $X \times Y$ . Alors la fonction  $f'_y(x, y)$  est totalement différentiable par rapport à  $(x, y)$  au point  $(a, b)$  et on a*

$$f''_{yx}(a, b) = \overleftarrow{f''_{xy}(a, b)}.$$

8. FONCTIONS ANALYTIQUES — Nous supposerons maintenant que le corps des scalaires, pour les espaces  $X, Y, \dots$  considérés, est le corps complexe,  $\mathbb{C}$ . Soit encore  $f(x)$  une fonction définie dans un ouvert  $D$  de  $X$  et prenant ses valeurs dans  $Y$ . Le concept le plus général de fonction analytique qui se présente dans la littérature courante est celui de Gâteaux (généralisé): On dit que  $f(x)$  est analytique dans  $D$  au sens de Gâteaux généralisé (ou  $G$ -analytique), si  $f(x + \lambda h)$  est une fonction holomorphe de la variable complexe  $\lambda$  pour tout  $x \in D$  et tout  $\lambda \in X$ . Il est aisé de voir que

(8.1) Si  $f(x)$  est  $G$ -analytique dans  $D$ ,  $f(x)$  est finiment différentiable en tout point de  $D$  et réciproquement; et de même pour  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ , ... On a alors le développement en série de Taylor généralisée

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^{[n]},$$

pour tout  $x \in D$  et tout  $h$  appartenent à un voisinage de 0 (cf. [7], p. 71-74; le passage des espaces de Banach aux espaces l. c. quelconques n'offre aucune difficulté).

En général, étant donné un ensemble  $\mathfrak{B}$  de bornés de  $X$  vérifiant les conditions indiquées au n. 1, nous employerons maintenant l'expression « analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  » comme synonyme de « différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  » (nous supposons que  $X, Y$  sont des espaces vectoriels complexes!).

Dans le cas où  $Y$  vérifie la seconde condition de dénombrabilité de Mackey (cf. [3], p. 77), on a le critère suivant, assez simple:

(8.2) Pour que  $f(x)$  soit analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ , il faut et il suffit que, pour tout  $x \in D$ , la fonction de  $h$

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}$$

soit uniformément convergente sur tout  $B \in \mathfrak{B}$ , lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

Nous dirons que  $f(x)$  est localement bornée dans  $D$  par rapport à  $\mathfrak{B}$ , si, pour tout  $x \in D$ , il existe un scalaire  $\lambda \neq 0$  tel que  $f(x)$  soit bornée dans  $x + \lambda B$ . Compte tenu des propriétés des fonctions vectorielles analytiques d'une variable complexe, on généralise de la façon suivante le résultat de Hille concernant les fonctions localement bornées:

(8.3) La classe des fonctions analytiques ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  coïncide avec la classe des fonctions  $G$ -analytiques dans  $D$  et localement bornées dans  $D$  par rapport à  $\mathfrak{B}$ .

C'est ce résultat qui justifie notre définition de différentiabilité. D'ailleurs, il permet de démontrer (8.2), ainsi que d'autres propositions, avec la seule hypothèse supplémentaire que  $Y$  vérifie la seconde condition de dénombrabilité de Mackey.

On voit en même temps que:

(8.4) Si  $f(x)$  est analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ , toutes ses dérivées  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ , ... seront aussi analytiques ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ .

Nous avons établi l'unicité du prolongement analytique déjà dans [13] th. (8.1), même pour les fonctions  $G$ -analytiques. En outre:

(8.5) Soit  $f_k(x)$  une suite de fonctions analytiques ( $\mathfrak{B}$ ) et localement uniformément bornées par rapport à  $\mathfrak{B}$ . Alors, si  $D$  est connexe et si  $\lim_k f_k(x)$  existe dans un ouvert  $A \subset D$ , cette suite converge partout dans  $D$  vers une fonction  $f(x)$  analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ .

Ce théorème, et d'autres que l'on pourrait signaler encore, sont des généralisations faciles des théorèmes correspondants pour les espaces normés (cf. [7]).

Le concept de fonction analytique est naturellement lié à celui de série de Taylor. Nous appellerons *série de puissances*  $(\mathfrak{B})$  de  $x$  toute expression du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{[n]}, \quad \text{où } A_0 \in Y, A_n \in Y_{\mathfrak{B}}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{et } x^{[0]} = 1;$$

les fonctions  $A_n x^{[n]}$  seront appelées *puissances*  $(\mathfrak{B})$  de  $x$ .

De (8.4) on déduit que toute fonction analytique  $(\mathfrak{B})$  dans  $D$  est représentable, dans un voisinage de chaque point  $a$  de  $D$ , par une série de puissances  $(\mathfrak{B})$  de  $x - a$ .

La réciproque est vraie, si  $Y$  vérifie la seconde condition de dénombrabilité de Mackey. On obtient alors une généralisation intéressante du théorème (4.7.4) démontré dans [7].

Dans [11] et [13] nous avons généralisé la notion de fonctionnelle analytique de Fantappiè de la façon suivante:

(8.6) On dit que  $f(x)$  est *analytique dans  $D$  au sens de Fantappiè généralisé*, si, pour toute fonction analytique  $g(\lambda)$ , de la variable complexe  $\lambda$ , à valeurs dans  $\mathbb{D}$ ,  $F(g(\lambda))$ , est aussi une fonction analytique de  $\lambda$ .

Or, dans le cas où  $Y$  vérifie la seconde condition de dénombrabilité de Mackey, on a ce résultat remarquable:

(8.7) *Toute fonction analytique au sens de Fantappiè généralisé est totalement analytique:*

La réciproque est vraie, naturellement, même dans le cas général. Pour la démonstration de (8.7) on doit observer que la topologie de  $X$  induit dans chaque espace  $[B]$ , où  $B$  est un borné quelconque de  $X$ , une topologie moins fine que celle déterminée par la boule  $\hat{B}$ .

Observons encore que les propositions (1.4) et (1.6) permettent de généraliser nos résultats présentés dans [13], sur la continuité des fonctions analytiques au sens de Fantappiè généralisé.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. I-II, « Act. Scient. Ind. » n. 846-1141, Paris (1934).
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. I-II, « Act. Scient. Ind. », n. 1189, Paris (1953).
- [3] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces  $(F)$  et  $(LF)$* , « Ann. Inst. Fourier », 1, pp. 61-101 (1949).
- [4] M. FRÉCHET, *Sur la notion de différentielle dans l'analyse générale*, « Journ. Math. Pures Appl. », T. 16, pp. 233-250 (1937).
- [5] L. M. GRAVES, *Riemann integration and Taylor theorem in general analysis*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 29, pp. 163-177 (1927).
- [6] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces  $(F)$  et  $(DF)$* , « Summa Brasiliensis Math. », vol. 3, pp. 57-122 (1954).
- [7] E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », New-York (1948).

- [8] M. KERNER, *Differentiale in allgemeinen Analysis*, « Ann. of Math. », Vol. 34, pp. 546-572 (1933).
- [9] KY FAN, *Sur quelques notions fondamentales de l'analyse générale*, « Jour. Math. Pures Appl. », t. 21, pp. 289-368 (1942).
- [10] E. R. LORCH, *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 54, pp. 414-425 (1943).
- [11] J. SEBASTIÃO E SILVA, *As funções analíticas e a análise funcional*, Thèse 1948 (Port. Math., 1950).
- [12] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Integração e derivação em espaços de Banach*, « Rev. Fac. Ciências », Lisboa, 2ª Série, Vol. I (1950).
- [13] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, « Port. Math. », vol. 12, pp. 1-46, (1953).
- [14] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi*, « Rend. Mat. e Applic. », serie V, vol. XIV, Roma, pp. 388-410 (1955).
- [15] A. E. TAYLOR, *Analytic functions in general analysis*, « Ann. Scuola Norm. Sup. », Pisa, serie 2, vol. 6, pp. 277-292 (1937).
- [16] J. VALIRON, *Théorie des fonctions*, Masson, Paris (1948).
- [17] M. A. ZORN, *Derivatives and Fréchet differentials*, « Bull. Amer. Math. Soc. », vol. 52, pp. 133-137 (1946).

**Matematica.** — *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari* (\*). Nota I di GAETANO FICHERA, presentata (\*\*) dal Socio M. PICONE.

Sia  $A$  un campo (insieme aperto) limitato dello spazio cartesiano  $S_r$  delle variabili reali  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . Faremo l'ipotesi che  $A$  sia *regolare*, con ciò intendendo che in esso siano valide le classiche formole di Gauss-Green, che trasformano integrali ipersuperficiali estesi alla frontiera  $\Sigma$  di  $A$  in integrali estesi ad  $A$ .

Si consideri l'operatore differenziale lineare di ordine  $m$ :

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{k=0}^m \sum_{s_1 + \dots + s_r = k} a_{s_1 \dots s_r}^{(k)}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_r^{s_r}} \quad [x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r)];$$

$s_1, \dots, s_r$  denotano interi non negativi. Le funzioni  $a_{s_1 \dots s_r}^{(k)}(x)$  sono supposte reali, definite in  $A + \Sigma$  ed ivi di classe  $k$ .

Indicheremo con  $\mathcal{C}$  la totalità delle funzioni  $u$  di classe  $m-1$  in  $A + \Sigma$ , di classe  $m$  in  $A$  e tali che  $\mathcal{E}(u)$  sia una funzione sommabile in  $A$ .

Sia inoltre  $\Gamma$  la classe delle funzioni  $v$  ciascuna delle quali gode delle seguenti proprietà:

1°  $v(x)$  è continua in  $A + \Sigma$ ;

2° è possibile decomporre  $A + \Sigma$  in un numero finito di domini regolari  $T_1, T_2, \dots, T_s$  tali che in ogni punto interno a  $T_h$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) la  $v$

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

ammette la derivata  $\frac{\partial^k v}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_r^{s_r}}$  se  $a_{s_1 \dots s_r}^{(k)}$  non è identicamente nullo in  $A + \Sigma$ , inoltre tale derivata coincide con una funzione continua in tutto  $T_k$ ;

3° se  $a_{s_1 \dots s_r}^{(k)}$  non è identicamente nullo in  $A + \Sigma$ , assunto comunque  $h < k$  e  $p_1, p_2, \dots, p_r$  tali che  $p_1 + \dots + p_r = h, p_1 \leq s_1, \dots, p_r \leq s_r$ , la derivata  $\frac{\partial^h v}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_r^{p_r}}$  coincide con una funzione continua in  $A + \Sigma$ .

È ovvio che tanto la classe  $\mathcal{C}$  quanto  $\Gamma$  non sono vuote, contenendo entrambe ogni funzione di classe  $m$  in  $A + \Sigma$ .

Introduciamo l'operatore aggiunto di  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E}^*(u) = \sum_{k=0}^m \sum_{s_1 + \dots + s_r = k} (-1)^k \frac{\partial^k (a_{s_1 \dots s_r}^{(k)} u)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_r^{s_r}}.$$

È elementare constatare che per ogni  $u \in \mathcal{C}$  e ogni  $v \in \Gamma$  sussiste una *relazione di reciprocità* del tipo seguente:

$$(1) \quad \int_A [v \mathcal{E}(u) - u \mathcal{E}^*(v)] dx = \int_{\Sigma} \sum_{h,k}^{0, m-1} \sum_{\substack{s_1 \dots s_h \\ j_1 \dots j_k}} b_{j_1 \dots j_k}^{s_1 \dots s_h} \frac{\partial^h u}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_h}} \frac{\partial^k v}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} d\sigma$$

( $dx = dx_1 \dots dx_r$ ;  $d\sigma$  = misura dell'elemento ipersuperficiale di  $\Sigma$ ).

Le funzioni  $b_{j_1 \dots j_k}^{s_1 \dots s_h}$  possono esprimersi per mezzo dei coefficienti  $a_{s_1 \dots s_r}^{(k)}$  dell'operatore  $\mathcal{E}(u)$ , delle derivate di questi e dei coseni direttori della normale a  $\Sigma$  interna ad  $A$ . Un tale calcolo presenta solo qualche fastidio algoritmico, essendo, del resto, affatto elementare. D'altronde esso è inessenziale ai nostri scopi. Denoteremo semplicemente con  $F(u, v)$  il secondo membro della (1).

Sia  $\Sigma_h$  ( $h = 1, 2, \dots, q$ ) un insieme contenuto in  $\Sigma$  e denoti  $L_h(u)$  un operatore differenziale lineare di ordine  $\leq m - 1$  i cui coefficienti sono definiti in  $\Sigma_h$ .

Considereremo il seguente problema al contorno:

$$(2) \quad \mathcal{E}(u) = f \quad \text{in } A, \quad (3) \quad L_h(u) = 0 \quad \text{su } \Sigma_h \quad (h=1, 2, \dots, q).$$

La  $f$  è una funzione assegnata definita in  $A$ .

Verremo ad indicare le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema posto. Occorrerà prima pervenire ad un *prolungamento* dell'operatore  $\mathcal{E}$  in una opportuna classe funzionale  $\mathcal{M}$  e per le funzioni di tale classe dar senso alle condizioni al contorno (3).

Sia  $\mathcal{M}_0$  la sottoclasse di  $\Gamma$  costituita da tutte quelle funzioni  $v$  tali che, qualunque sia  $u \in \mathcal{C}$ , riesca:

$$F(u, v) = 0.$$

$\mathcal{M}_0$  è certo non vuota, contenendo ogni  $v$  di classe  $m$  in  $A + \Sigma$  nulla su  $\Sigma$  assieme ad ogni sua derivata di ordine  $\leq m - 1$ .

Indicheremo con  $\mathfrak{M}$  la classe di tutte le funzioni  $u(x)$  sommabili in  $A$  tali che per ognuna di esse esiste una  $f(x)$  sommabile in  $A$  e verificante le equazioni:

$$(4) \quad \int_A [vf - u \mathfrak{E}^*(v)] dx = 0,$$

per ogni  $v \in \mathfrak{V}_0$ .

Definiamo  $\mathfrak{E}(u)$  ponendo  $\mathfrak{E}(u) = f(x)^{(1)}$ .

È subito visto che  $\mathfrak{E}(u) \doteq f(x)$ ,  $\mathfrak{E}(u) = f'(x)$  implica  $f(x) = f'(x)$  quasi ovunque in  $A$ , cioè l'*equivalenza* di  $f$  con  $f'$  dal punto di vista della teoria della misura di Lebesgue. Pertanto se  $u$  appartiene a  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{E}(u)$  com'è stato ora definito, è equivalente all' $\mathfrak{E}(u)$  inteso nel senso classico. Ne viene che la definizione generalizzata data di  $\mathfrak{E}(u)$  può riguardarsi come un prolungamento della trasformazione lineare  $\mathfrak{E}$  da  $\mathfrak{C}$  alla classe  $\mathfrak{M}$ .

È assai facile mostrare che  $\mathfrak{C}$  è un effettivo sottoinsieme di  $\mathfrak{M}$ .

La trasformazione lineare  $\mathfrak{E}(u)$ , definita in  $\mathfrak{M}$  ed avente codominio contenuto nello spazio  $\mathfrak{L}^{(1)}(A)$  delle funzioni sommabili in  $A$  secondo Lebesgue, è suscettibile di un ulteriore prolungamento, del quale veniamo ora a parlare. A tal fine occorre dare alla  $\mathfrak{E}(u)$  una diversa interpretazione. Precisamente considereremo la  $\mathfrak{E}(u)$  non più come una trasformazione che muta un elemento  $u$  di  $\mathfrak{M}$  in uno  $f$  di  $\mathfrak{L}^{(1)}(A)$ , ma, introdotto l'insieme lineare di tutte le *misure*  $^{(2)}$  definite nel  $\sigma$ -anello dei boreliani contenuti in  $A + \Sigma$ , insieme che indicheremo con  $\Lambda(A + \Sigma)$ , interpreteremo  $\mathfrak{E}(u)$  come la trasformazione lineare che ad  $u$  fa corrispondere la misura  $\mu(B)$  così definita:

$$\mu(B) = \int_B f(x) dx,$$

essendo  $B$  il generico insieme boreliano contenuto in  $A + \Sigma$ .

Indicheremo con  $\mathfrak{M}'$  la classe di tutte le funzioni  $u(x)$  sommabili in  $A$  tali che per ognuna di esse esista una misura  $\mu(B)$  appartenente a  $\Lambda(A + \Sigma)$  e verificante le equazioni;

$$(4') \quad \int_{A+\Sigma} v d\mu - \int_A u \mathfrak{E}^*(v) dx = 0$$

per ogni  $v \in \mathfrak{V}_0$ .

Porremo  $\mathfrak{E}(u) = \mu$ . La misura  $\mu$  è univocamente determinata.

Se con  $\mathfrak{E}(\mathfrak{M}')$  si indica il codominio della trasformazione  $\mathfrak{E}(u)$  così definita in  $\mathfrak{M}'$  e lo si considera come una varietà lineare di  $\Lambda(A + \Sigma)$ , è evidente che  $\mathfrak{E}(\mathfrak{M}')$  contiene una sotto-varietà lineare *isomorfa*  $^{(3)}$  al codominio della tra-

(1) Tale definizione dell'operatore  $\mathfrak{E}(u)$  corrisponde, a meno della scelta della classe  $\mathfrak{V}_0$ , alla *weak extension* di un operatore differenziale lineare secondo Friedrichs.

(2) Per la definizione di *misura* ci atteniamo a quella data in G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, « Istituto Matem. Univ. Trieste », 1954, p. 284.

(3) Cfr. G. BIRKHOFF-S. McLANE, *A Survey of Modern Algebra*, McMillan Co., New York, 1941, p. 176.

sformazione  $\mathcal{E}(u)$ , qual'era stata in precedenza definita. Tale sotto-varietà è costituita da tutte le misure  $\mathcal{E}(u)$  assolutamente continue.

Se  $\Lambda(A+\Sigma)$  si considera come uno spazio di Banach, definendo il modulo del suo generico elemento  $\mu$  al modo seguente:

$$\|\mu\| = v_\mu(A + \Sigma),$$

ove con  $v_\mu(A+\Sigma)$  si è indicata la variazione totale di  $\mu$  su  $A + \Sigma$ , allora la su menzionata sotto-varietà immersa in  $\mathcal{E}(\mathfrak{M}')$  ed il codominio di  $\mathcal{E}(u)$  pensata come trasformazione fra  $\mathfrak{M}$  e un sotto-spazio dello spazio di Banach  $\mathcal{L}^{(1)}(A)$ , sono varietà lineari *equivalenti* <sup>(4)</sup>, secondo la teoria degli spazi di Banach.

Sussiste il seguente teorema:

I. *La varietà  $\mathfrak{M}$  è un effettivo sotto-insieme della varietà  $\mathfrak{M}'$ .*

Consideriamo il caso non banale che  $\mathcal{E}(u)$  sia un effettivo operatore differenziale, epperò, possiamo supporre, per fissare le idee, che intervengano nella espressione di  $\mathcal{E}(u)$  derivate parziali della  $u$  i cui corrispondenti coefficienti non sono identicamente nulli e tali che rispetto alla variabile  $x_1$  si derivi  $s_1$  volte con  $s_1 > 0$ . Supponiamo  $s_1$  tale che ogni derivata parziale della  $u$  che interviene in  $\mathcal{E}(u)$  e che implica derivazioni rispetto ad  $x_1$  di ordine maggiore di  $s_1$  abbia coefficiente identicamente nullo. Poniamo  $\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}_1(u) + \mathcal{E}_2(u)$ , avendo raggruppato in  $\mathcal{E}_1(u)$  tutti quei termini contenenti derivate parziali in ciascuna delle quali rispetto ad  $x_1$  si deriva  $s_1$  volte;  $\mathcal{E}_2(u)$  sia la somma di tutti i restanti termini. Siano  $s_2, s_3, \dots, s_r$  ben determinati interi non negativi tali che  $s_1 + s_2 + \dots + s_r = k \leq m$  e tali inoltre che  $a_{s_1 \dots s_r}^{(k)}$  sia diversa da zero in un punto  $x^{(0)} \equiv (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_r^{(0)})$  di  $A$ .

Consideriamo per ogni intero  $n$  non negativo la funzione della variabile reale  $t$  così definita su tutto l'asse reale:

$$f_n(t) \begin{cases} = 0 & \text{per } t \leq 0, \\ = \frac{t^n}{n!} & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

Proveremo che la funzione:

$$(5) \quad u(x_1, x_2, \dots, x_r) = f_{s_1-1}(x_1 - x_1^{(0)}) x_2^{s_2} \dots x_r^{s_r}$$

appartiene ad  $\mathfrak{M}'$ , ma non ad  $\mathfrak{M}$ .

Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\varphi^{(\varepsilon)}(t)$  la funzione così definita:

$$\varphi^{(\varepsilon)}(t) \begin{cases} = 0 & \text{per } t \leq -\varepsilon, \\ = \frac{t}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} & \text{per } -\varepsilon \leq t \leq 0, \\ = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon^2} & \text{per } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ = 0 & \text{per } t \geq \varepsilon. \end{cases}$$

(4) Cfr. loc cit. in nota <sup>(2)</sup>, p. 147.

Poniamo:

$$f_n^{(\varepsilon)}(t) = \int_{-\varepsilon}^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} \varphi^{(\varepsilon)}(\tau) d\tau.$$

Sia:

$$u^{(\varepsilon)}(x_1, x_2, \dots, x_r) = f_{s_1-1}^{(\varepsilon)}(x_1 - x_1^{(0)}) x_2^{s_2} \dots x_r^{s_r}.$$

Poiché  $u^{(\varepsilon)}(x)$  è continua con tutte le derivate che intervengono sia in  $\mathcal{G}_1(u)$  che in  $\mathcal{G}_2(u)$ , detta  $v$  una qualsiasi funzione di  $\mathcal{O}_0$ , si ha:

$$\int_A [v \mathcal{G}^{(\varepsilon)}(u) - u^{(\varepsilon)} \mathcal{G}^*(v)] dx = 0.$$

Si ha d'altra parte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A v \mathcal{G}_2(u^{(\varepsilon)}) dx = \int_A v \mathcal{G}_2(u) dx \quad ; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A u^{(\varepsilon)} \mathcal{G}^*(v) dx = \int_A u \mathcal{G}^*(v) dx.$$

Sia  $Q$  il dominio quadrato definito dalle limitazioni  $-q \leq x_k \leq q$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) e sia  $q$  tanto grande che  $A$  riesca contenuto in  $Q$ . Prolunghiamo la definizione della  $v(x)$  assumendola uguale a zero in  $Q - (A + \Sigma)$ . Poniamo:

$$\mathcal{G}_1(u^{(\varepsilon)}) = \varphi^{(\varepsilon)}(x_1 - x_1^{(0)}) g(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

La funzione  $g(x_1, x_2, \dots, x_r)$  è continua in  $A + \Sigma$  e non dipende da  $\varepsilon$ . Prolunghiamola in tutto  $Q$  assumendola uguale a zero in  $Q - (A + \Sigma)$ . Si ha:

$$\int_A v \mathcal{G}_1(u^{(\varepsilon)}) dx = \int_{-q}^q \varphi^{(\varepsilon)}(x_1 - x_1^{(0)}) dx_1 \int_{-q}^q dx_2 \dots \int_{-q}^q v(x_1, \dots, x_r) g(x_1, \dots, x_r) dx_r$$

e quindi:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A v \mathcal{G}_1(u^{(\varepsilon)}) dx = \int_{-q}^q dx_2 \dots \int_{-q}^q v(x_1^{(0)}, x_2, \dots, x_r) g(x_1^{(0)}, x_2, \dots, x_r) dx_r.$$

Introduciamo la misura  $\mu_1$  che su ogni intervallo superiormente aperto  $I$  contenuto in  $Q$  e determinato dalle limitazioni:

$$x'_k \leq x_k < x''_k \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

è così definita:

$$\mu_1(I) \left\{ \begin{array}{ll} = 0 & \text{se } (x'_1 - x_1^{(0)})(x''_1 - x_1^{(0)}) \geq 0 \\ & \text{e } (x'_1 - x_1^{(0)}) \neq 0 \\ = \int_{x'_2}^{x''_2} \dots \int_{x'_r}^{x''_r} g(x_1^{(0)}, x_2, \dots, x_r) dx_r & \text{se } (x'_1 - x_1^{(0)})(x''_1 - x_1^{(0)}) \leq 0 \\ & \text{e } (x'_1 - x_1^{(0)}) \neq 0. \end{array} \right.$$

Tale misura riesce determinata su ogni boreliano  $B$  contenuto in  $A + \Sigma$  (5).  
Posto per ogni tale  $B$ :

$$\mu_2(B) = \int_B \mathcal{E}_2(u) dx \quad , \quad \mu(B) = \mu_1(B) + \mu_2(B) ,$$

si ottiene una misura  $\mu(B)$  non assolutamente continua e tale che assieme alla  $u(x)$  definita dalla (5) verifica la (4) per ogni  $v \in \mathcal{V}_0$ .

Il teorema è così provato.

Si può considerare l'elemento  $u$  su cui opera la  $\mathcal{E}$  come appartenente allo spazio  $\Lambda(A + \Sigma)$ , considerando la varietà  $\mathcal{M}''$  di tale spazio costituita da tutte le misure  $u(B)$ , tali che in corrispondenza a ciascuna di esse esiste una misura  $\mu(B)$  tale che per ogni  $v \in \mathcal{V}_0$  si abbia:

$$(6) \quad \int_{A+\Sigma} v d\mu - \int_{A+\Sigma} \mathcal{E}^*(v) du = 0 .$$

Porremo allora  $\mathcal{E}(u) = \mu$ . La  $\mu$  è determinata in modo unico. È evidente che  $\mathcal{M}''$  contiene una varietà lineare  $\overline{\mathcal{M}}'$  equivalente alla varietà  $\mathcal{M}'$  dello spazio di Banach  $\mathcal{L}^{(1)}(A)$  già considerata. La  $\overline{\mathcal{M}}'$  è costituita da tutte le misure di  $\mathcal{M}''$  che sono assolutamente continue.

Non sussiste in questo caso per  $\mathcal{M}'$  e  $\mathcal{M}''$  un analogo del teorema I. Non si può, cioè, sempre affermare che  $\overline{\mathcal{M}}'$  è un effettivo sottoinsieme di  $\mathcal{M}''$ , potendo ben presentarsi entrambe le alternative. Ad esempio sia  $A$  il campo, definito dalle limitazioni  $0 < x_1 < 1$ ,  $0 < x_2 < 1$ , nel piano  $x_1 x_2$  ed  $\mathcal{E}(u)$  coincida con l'operatore  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ . Per ogni intervallo  $I = I_{x_1} \times I_{x_2}$  contenuto in  $Q$  si definisca la misura:

$$u(I) = \varphi(I_{x_1}) \tau(I_{x_2}) + \tau(I_{x_1}) \psi(I_{x_2})$$

denotando la  $\tau$  l'ordinaria misura lineare di Lebesgue,  $\varphi$  e  $\psi$  due arbitrarie misure lineari. Orbene, si verifica immediatamente che la  $u$  soddisfa, nel caso particolare che si considera, la (6), assumendo come  $\mu$  la misura identicamente nulla. In tal caso quindi  $\overline{\mathcal{M}}'$  è un effettivo sottoinsieme di  $\mathcal{M}$ . Per contro, se  $\mathcal{E}(u)$  si riduce ad un operatore del secondo ordine di tipo ellittico in  $A + \Sigma$ , con coefficienti verificanti opportune ipotesi, la varietà  $\overline{\mathcal{M}}'$  coincide con  $\mathcal{M}''$ .

Precisamente sussiste il seguente teorema:

II. Sia  $\mathcal{E}(u)$  l'operatore del secondo ordine:

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu$$

(5) Cfr. loc. cit. in nota (2) p. 289.

con gli  $a_{hk}$  di classe  $C_H^{(2)}$  <sup>(6)</sup>, i  $b_h$  di classe  $C_H^{(1)}$  e  $c$  misurabile e limitata in un campo  $A'$  contenente  $A + \Sigma$ . L'operatore  $\mathcal{E}(u)$  sia ellittico positivo in  $A'$ . Se  $u$  e  $\mu$  sono due elementi di  $\Lambda(A + \Sigma)$  verificanti la (6) per ogni  $v \in \mathcal{N}_0$ , la  $u$  è assolutamente continua.

Possiamo supporre  $c \equiv 0$  in  $A'$ . Ciò non è restrittivo poiché, nel caso contrario, considerato l'operatore  $\mathcal{E}_0(u) = \mathcal{E}(u) - cu$  e introdotta la misura:

$$v(B) = \mu(B) - \int_B c \, du,$$

anziché la (6) considereremmo le equazioni:

$$(7) \quad \int_{A+\Sigma} v \, dv = \int_{A+\Sigma} \mathcal{E}_0^*(v) \, du$$

per ogni  $v \in \mathcal{N}_0$ , cioè per ogni  $v$  di  $\Gamma$  nulla su  $\Sigma$  assieme al suo gradiente. Verremo così a ricondurci al caso  $c \equiv 0$ .

Sia  $s(x, y)$  una *soluzione fondamentale* relativa all'operatore  $\mathcal{E}$ , considerata in un campo che contiene  $A + \Sigma$ , campo che seguiranno ad indicare con  $A'$ . La  $s(x, y)$  sia come funzione di  $x$  soluzione dell'equazione  $\mathcal{E}(u) = 0$  in  $A' - y$  e come funzione di  $y$ , soluzione di  $\mathcal{E}^*(u) = 0$  in  $A' - x$ . L'esistenza di una siffatta funzione è ben nota nella teoria delle equazioni ellittiche del secondo ordine <sup>(7)</sup>. Come  $s(x, y)$  potrebbe, ad esempio, assumersi una *funzione di Green* relativa ad un problema al contorno per l'equazione  $\mathcal{E}(u) = f$  in un campo che contiene  $A + \Sigma$ . Sia  $E$  un insieme boreliano contenuto in  $A'$  e sia  $f \in \mathcal{L}^{(1)}(E)$ . Consideriamo la trasformazione lineare:

$$T_E(f) = \int_E s(x, y) f(y) \, dy.$$

Poiché  $s(x, y)f(y)$  per quasi tutti gli  $x$  di  $E$  appartiene come funzione di  $y$  a  $\mathcal{L}^{(1)}(E)$  ed inoltre l'integrale che definisce  $T_E(f)$  è una funzione di  $x$  appartenente a  $\mathcal{L}^{(1)}(A')$ , la  $T_E(f)$  è definita in tutto  $\mathcal{L}^{(1)}(E)$  ed ha codominio contenuto in  $\mathcal{L}^{(1)}(A')$ . È assai facile constatare che, dato il numero naturale  $p$ , è possibile determinare un numero naturale  $m_0(p)$  tale che per ogni  $m > m_0(p)$  la funzione rappresentata da  $T_E^m(f)$  ( $T_E^m$  è l'*iterata*  $m$ -esima di  $T_E$ ) è funzione di classe  $p$  in  $A'$ .

Sia  $\mu$  una misura definita nel  $\sigma$ -anello dei boreliani contenuti in  $A'$ . Per quasi ogni  $x \in A'$ ,  $s(x, y)$  è funzione di  $y$ ,  $\mu$ -sommabile in  $E$  e la funzione:

$$T_E(\mu) = \int_E s(x, y) \, d_y \mu$$

(6) Dicendo che una funzione  $f(x)$  è di classe  $C_H^{(p)}$  in un campo  $A$  intendiamo che essa è continua in  $A$  assieme a tutte le sue derivate parziali di ordine  $p$  e ciascuna di queste verifica una condizione di Hölder in ogni punto di  $A$ .

(7) Cfr. C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. Springer Verlag 1955, cap. III e Bibliografia ivi citata.

appartiene a  $\mathcal{Q}^{(1)}(A')$ . L'intero  $m_0(p)$  può supporre tale che per  $m > m_0(p)$  la funzione rappresentata da  $T_E^m(\mu)$  è di classe  $p$  in  $A'$ . È ovvio che se  $T_E^*$  è l'aggiunta della trasformazione  $T_E$ , cioè:

$$T_E^*(\mu) = \int_E s(x, y) d_x \mu,$$

per  $m > m_0(p)$  anche  $T_E^{**m}(\mu)$  è di classe  $p$  in  $A'$ . D'ora in avanti supporremo  $m > m_0(2)$ .

Sia  $R$  un intervallo chiuso (dominio rettangolare) contenuto in  $E$ . Sia  $\mathcal{FR}$  la sua frontiera, che supponiamo costituita da iperpiani nessuno dei quali sia di discontinuità per la misura  $\mu$ . Introduciamo su  $\mathcal{FR}$  l'operatore:

$$\mathcal{Q}(u) = \frac{\partial u}{\partial \nu} + bu$$

avendo posto:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk} \alpha_h \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad b = \sum_{k=1}^r \left( b_k - \sum_{h=1}^r \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \right) \alpha_h$$

( $\alpha_h$  coseno direttore rispetto all'asse  $x_h$  della normale esterna a  $\mathcal{FR}$ ).

Considerando l'operatore  $\partial/\partial x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), è subito visto che esso, inteso nel senso generalizzato considerato in questa Nota, è applicabile, in ogni campo regolare contenuto in  $A'$ , alla funzione  $T_E(f)$  e si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_E(f) = \int_E \frac{\partial}{\partial x_i} s(x, y) d_y \mu.$$

Pertanto può applicarsi alla  $T_E(f)$  l'operatore  $\mathcal{Q}$ .

È di facile dimostrazione la seguente formula:

$$(8) \quad \int_{\mathcal{FR}} \mathcal{Q} T_E(\mu) d\sigma - \int_R \left( \sum_{h=1}^r \frac{\partial b_h}{\partial x_h} \right) T_E(\mu) dx = \mu(R).$$

Sia  $\{\varphi_k(x)\}$  un arbitrario sistema completo nello spazio di Hilbert  $\mathcal{Q}^{(2)}(A' - A)$  delle funzioni di quadrato sommabile in  $A' - A$ , costituito da funzioni continue nell'involucro  $\overline{A' - A}$  di  $A' - A$ . Poniamo:

$$\omega_k(x) = T_{A' - A}^m(\varphi_k)$$

e diciamo  $W$  la varietà di  $\mathcal{Q}^{(2)}(A)$ , chiusura della varietà lineare individuata dal sistema  $\{\omega_k\}$ . Se  $z$  è un elemento di  $\mathcal{Q}^{(2)}(A)$  con  $Pz$  indicheremo la sua proiezione su  $W$ . Poniamo, detta  $f$  una qualsiasi funzione di  $\mathcal{Q}^{(1)}(A)$ :

$$v(x) = T_A^{**m}(f) - T_A^{**m} P T_A^{**m}(f).$$

La  $v(x)$  appartiene a  $\mathfrak{Q}_0$ . Essa è di classe 2 in  $A'$ . Inoltre, poiché per ogni  $f \in \mathfrak{Q}^{(1)}(A)$  ed ogni  $\varphi$  continua in  $\overline{A' - A}$  sussiste l'identità;

$$\int_{A' - A} T_A^*(f) \varphi dx = \int_A f T_{A' - A}(\varphi) dx,$$

si trae facilmente che  $v(x)$  è nulla in  $A' - A$ . Sfruttando l'identità valida per ogni  $f \in \mathfrak{Q}^{(1)}(A)$  ed ogni  $\mu \in \Lambda(A + \Sigma)$ :

$$\int_{A + \Sigma} T_A^*(f) d\mu = \int_A f T_{A + \Sigma}(\mu) dx$$

dalla (6) si deduce, attesa l'arbitrarietà di  $f$ :

$$T_{A + \Sigma}^{2m-1}(u) - T_{A + \Sigma}^m PT_{A + \Sigma}^{m-1}(u) = T_{A + \Sigma}^{2m}(\mu) - T_{A + \Sigma}^m PT_{A + \Sigma}^m(\mu).$$

Applicando ripetutamente la (8) si ottiene quasi ovunque in  $A$ :

$$(9) \quad T_{A + \Sigma}^{m-1}(u) - PT_{A + \Sigma}^{m-1}(u) = T_{A + \Sigma}^m(\mu) - PT_{A + \Sigma}^m(\mu).$$

Ogni funzione  $\omega_k$  è soluzione in  $A$  dell'equazione  $\mathfrak{E}^m(u) = 0$ . Ciò implica che  $W$  è costituita da funzioni di classe 2  $m$  in  $A$ , tutte soluzioni di tale equazione<sup>(8)</sup>, epperò la (9) sussiste in tutto  $A$ . Applicando ulteriormente la (8) si deduce che per tutti gli  $I$  di un semi-anello<sup>(9)</sup> di intervalli superiormente aperti contenuti in  $A$ , deve essere:

$$(10) \quad u(I) = \int_I [\mathfrak{E}^{m-1} PT_{A + \Sigma}^{m-1}(u) + T_{A + \Sigma}(\mu) - \mathfrak{E}^{m-1} PT_{A + \Sigma}^m(\mu)] dx.$$

Pertanto  $u$  è assolutamente continua quando si consideri nel  $\sigma$ -anello dei boreliani contenuti in  $A$ . Poniamo  $u_0 = T_{A + \Sigma}(\mu)$ . Si verifica subito che per  $v \in \mathfrak{Q}_0$  riesce:

$$(11) \quad \int_{A + \Sigma} v d\mu = \int_A u_0 \mathfrak{E}^*(v) dx.$$

Sottraendo i due membri della (11) dai corrispondenti della (6), si trae:

$$(12) \quad \int_A \mathfrak{E}^*(v) du_x = 0,$$

avendo posto per ogni boreliano  $B \subset A + \Sigma$ :

$$u_x(B) = u(B) - \int_B T_{A + \Sigma}(\mu) dx.$$

(8) La dimostrazione di tale fatto può conseguirsi usando il ragionamento indicato alla fine di p. 535 ed a principio della 536 nella Memoria: G. FICHERA, *Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche*, « Rend. Sem. Mat. Padova », 1956.

(9) Cfr. loc. cit. in nota<sup>(2)</sup>, p. 267.

Sia  $u'_1(x)$  la derivata della misura  $u_1(B)^{(10)}$ . Dalla (10) segue che  $u'_1(x)$  è quasi ovunque eguale ad una funzione di classe 2 in A, ivi soluzione della equazione  $\mathcal{E}(u) = 0$ . Poiché l'insieme singolare della misura  $u_1$  è esclusivamente contenuto in  $\Sigma$ , la (12) può scriversi:

$$\int_A u'_1 \mathcal{E}^*(v) dx + \int_{\Sigma} \mathcal{E}^*(v) du_1 = 0.$$

Dato che riesce nullo il primo dei due integrali al primo membro, per quanto si è osservato su  $u'_1(x)$ , e dato che  $\mathcal{E}^*(v)$  al variare di  $v$  può farsi coincidere con le funzioni di un sistema completo nello spazio delle funzioni continue su  $\Sigma$ , si deduce  $u_1(B) = 0$  per ogni  $B \subset \Sigma$ . Da ciò la tesi.

**Matematica.** — *Una proprietà caratteristica delle rigate algebriche.* Nota <sup>(\*)</sup> di DIONISIO GALLARATI, presentata dal Socio B. SEGRE.

E. Marchionna <sup>(1)</sup> ha dimostrato che le sole superficie algebriche di  $S_r$  prive di punti multipli (od anche dotate di singolarità ordinarie) aventi classe inferiore all'ordine sono, oltre al piano, la superficie di Veronese e le sue proiezioni generiche (in particolare la superficie di Steiner). Utilizzando questo risultato si può riconoscere, con un ragionamento che in parte coincide con quello di Marchionna, che, nelle ipotesi fatte, *la ben nota proprietà delle rigate algebriche, non sviluppabili, di avere classe uguale all'ordine, è sufficiente a caratterizzarle.*

Sopra una superficie algebrica F priva di punti multipli o dotata di singolarità ordinarie, avente generi  $p_g$  e  $p_a$  ed irregolarità  $q (= p_g - p_a)$ , sia  $|C|$  un fascio lineare di curve C irriducibili di genere  $\pi$ , avente  $n$  punti base e  $\delta$  curve il cui genere si abbassi; anzi supponiamo che  $|C|$  sia generico nel senso che il genere di tali  $\delta$  curve sia  $\pi - 1$ , l'abbassamento essendo dovuto alla presenza di un punto doppio a tangenti distinte. Denotiamo poi con  $\rho$  il numero base di Picard-Severi, cioè il massimo numero di curve algebriche tra loro algebricamente indipendenti esistenti sulla superficie; con  $\rho_0$  il numero degli integrali doppi di seconda specie indipendenti esistenti sulla superficie; ed infine sia I l'invariante di Zeuthen-Segre di F, sicché:

$$I = \delta - n - 4\pi.$$

È ben noto che:

$$\rho \geq 1 \quad ; \quad \rho_0 \geq 0 \quad ; \quad \pi \geq q \quad ; \quad \rho_0 \geq 2p_g^{(2)}.$$

(10) Cfr. loc. cit. in nota <sup>(2)</sup>, p. 395.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 18 giugno 1956.

(1) E. MARCHIONNA, *Sopra una disuguaglianza fra i caratteri proiettivi di una superficie algebrica*, « Boll. U.M.I. » (3) 10, pp. 178-480 (1955).

(2) Cfr. ad esempio: S. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la Géometrie algébrique*, Paris 1924; pp. 34, 35, 144-145; e F. SEVERI, *Osservazioni a proposito di una Nota di E. Kähler*, ecc. « Rend. Palermo », 46, p. 79 (1932).

Se quale fascio  $|C|$  si assume un generico fascio di sezioni iperpiane di  $F$ , i numeri  $n$  e  $\delta$  indicano rispettivamente l'ordine e la classe di  $F$ , e  $\pi$  il genere delle sue sezioni iperpiane. L'ipotesi  $\delta = n$  implica che:

$$I = -4\pi;$$

d'altronde sussiste la formola di Picard-Alexander <sup>(2)</sup>:

$$\rho + \rho_0 = I + 4q + 2,$$

che nel caso presente diviene:

$$(1) \quad \rho + \rho_0 = 2 - 4(\pi - q),$$

e pertanto:  $1 \leq \rho + \rho_0 \leq 2$ . Ne segue  $\rho_0 \leq 1$ , e quindi  $p_g \leq (1/2)\rho_0 \leq 1/2$ ; ciò esige che sia  $p_g = 0$ . La (1), poiché  $\rho + \rho_0 \geq 1$ , fornisce  $0 \leq \pi - q \leq 1/4$ ; dunque:

$$p_g = 0 \quad ; \quad p_a = -q = -\pi.$$

Occorre distinguere tre casi:

1° Se  $p_a = 0$ , dalla  $\pi = 0$  segue che  $F$  ha le sezioni iperpiane razionali, e quindi, tenendo conto del risultato di Marchionna, è una rigata razionale <sup>(3)</sup>.

2° Se  $p_a = -1$ , allora  $\pi = 1$ ; ed  $F$ , non potendo essere razionale ed avendo le sezioni iperpiane di genere 1, è una rigata ellittica <sup>(4)</sup>.

3° Se  $p_a < -1$ , e quindi  $\pi > 1$ ,  $F$  è riferibile ad una rigata di genere  $\pi = -p_a$  <sup>(5)</sup>, e pertanto possiede un fascio  $\{D\}$  di genere  $\pi$  di curve  $D$  razionali. Se  $m \geq 1$  è l'ordine d'una generica di tali curve, il fascio  $\{D\}$  sega sopra la generica sezione iperpiana  $C$  di  $F$  un'involuzione  $\gamma_m^1$  di genere  $\pi$ ; e siccome  $\pi$  è anche il genere di  $C$ , i punti doppi di tale  $\gamma_m^1$ , a norma della formola di Zeuthen <sup>(6)</sup> sono:

$$d = 2(\pi - 1)(1 - m).$$

Ma  $d \geq 0$  e  $\pi > 1$ ; quindi  $m = 1$ , ed  $F$  è una rigata di genere  $\pi$ .

(3) E. PICARD, *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales*, « J. für Math. », 100, pp. 71-78 (1887).

(4) G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche la cui sezioni piane sono curve ellittiche*, « Rend. Lincei » (5) 3, pp. 59-61 (1894).

(5) Cfr. F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Bologna 1949, pp. 378-379.

(6) H. G. ZEUTHEN, *Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes*, « Math. Ann. », 3 pp. 150-156 (1870); ed anche: F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica*, Bologna 1926, p. 271. La formola di Zeuthen dà per il numero  $d$  dei punti doppi d'una  $\gamma_m^1$  di genere  $\pi$  appartenente ad una curva di genere  $p$ :  $d = 2(p-1) - 2m(\pi-1)$ .

**Matematica.** — *Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie, primitive di prima e di seconda specie rispettivamente, di determinante  $D \equiv 1 \pmod{8}$ .* Nota (\*) di CARLO CELLITTI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

1. Questa Nota rientra nello stesso ordine di idee di un'altra mia Nota *Sopra una proprietà delle forme quadratiche binarie primitive di determinante  $D \equiv 1 \pmod{4}$*  pubblicata nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » (fascicolo 4°, pp. 526-529, dicembre 1955), e, pertanto, gli stessi ne sono il filo conduttore<sup>(1)</sup> e le poche classiche nozioni<sup>(2)</sup> su cui la Nota esclusivamente si basa.

Ciò posto, trascriviamo il teorema di cui al n. 2 della Nota sopracitata, essendo esso un presupposto delle considerazioni che seguono.

2. **TEOREMA.** — *Ogni forma  $f \equiv (a, b, c)$  primitiva di prima specie è equivalente ad un'altra (eventualmente coincidente con la prima) necessariamente primitiva di prima specie,  $f' \equiv (a', b', c')$ , nella quale  $a' \equiv 0 \pmod{4}$  e  $b', c'$  sono dispari.*

In virtù di questo teorema, se ripartiamo tutte le forme quadratiche binarie primitive di prima specie di dato determinante  $D$  in classi, col criterio di porre in una medesima classe tutte le forme tra loro equivalenti, e

(\*) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1956.

(1) G. GAUSS, *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae 1801, art. 253-256; WERKE, I, pp. 276-284 (Gottingen 1870); LEJEUNE DIRICHLET, *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, « Journ. für d. r. u. a. mathem. » (von Crelle), Bd. 19, pp. 324-369; Bd. 21, pp. 1-12, 134-135 (1839-1840); WERKE, I, Bd. pp. 411-496 (Berlin, 1889).

(2) a) Data una forma quadratica binaria  $f \equiv (a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  di determinante  $D = b^2 - ac$  non quadrato, se poniamo m. c. d.  $(a, b, c) = \tau$ , e m. c. d.  $(a, 2b, c) = \sigma$ , si dice che  $f$  è primitiva se  $\tau = 1$ ; primitiva di prima specie se  $\tau = \sigma = 1$ ; primitiva di seconda specie se  $\tau = 1, \sigma = 2$ . Com'è ovvio, per le primitive di seconda specie deve essere  $b$  dispari, perché altrimenti, non sarebbero  $a, b, c$  primi fra loro.

b) Due forme quadratiche binarie si dicono equivalenti se si può passare dall'una all'altra mediante una sostituzione  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  lineare unimodulare ( $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ) a coefficienti interi.

c) Dalle classiche formule

$$(I) \quad \begin{cases} a_2 = a_1 \alpha^2 + 2b_1 \alpha\gamma + c_1 \gamma^2 \\ b_2 = a_1 \alpha\beta + b_1 (\alpha\delta + \beta\gamma) + c_1 \gamma\delta \\ c_2 = a_1 \beta^2 + 2b_1 \beta\delta + c_1 \delta^2 \end{cases}$$

che legano i coefficienti  $a_1, b_1, c_1$  ed  $a_2, b_2, c_2$  di due forme equivalenti, si vede che m. c. d.  $(a_1, b_1, c_1) = \text{m. c. d. } (a_2, b_2, c_2)$ , e che, essendo  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , risulta  $D_2 = b_2^2 - a_2 c_2 = b_1^2 - a_1 c_1 = D_1$ .

rappresentiamo ogni classe con una delle sue forme scelta ad arbitrio, avremo un sistema completo di rappresentanti di classi del tipo

$$(H) \quad (4 a_1, b_1, c_1), (4 a_2, b_2, c_2), \dots (4 a_m, b_m, c_m)$$

ove i coefficienti  $b_i$  e  $c_i$  sono dispari, ed  $m$  è il numero delle classi.

Essendo i coefficienti  $b_i$  dispari, è sempre

$$b_i^2 = (4l \pm 1)^2 = 8l' + 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

e, perciò, volendoci limitare al caso di  $D = b_i - 4 a_i c_i \equiv 1 \pmod{8}$ , dobbiamo supporre  $4 a_i c_i \equiv 0 \pmod{8}$ , e, quindi,  $a_i$  pari, essendo  $c_i$  dispari.

3. Dividendo per 2 il primo coefficiente e moltiplicando, invece, per 2 il terzo coefficiente delle  $m$  forme (H) otteniamo le altrettante forme dello stesso determinante D:

$$(H') \quad (2 a_1, b_1, 2 c_1), (2 a_2, b_2, 2 c_2), \dots (2 a_m, b_m, 2 c_m)$$

le quali, avendo il secondo coefficiente  $b_i$  dispari, e i coefficienti estremi entrambi pari, sono primitive di seconda specie.

TEOREMA. - *Fra le (H') non vi sono forme equivalenti.*

Ed inverso, se due forme  $f_r' \equiv (2 a_r, b_r, 2 c_r)$  ed  $f_s' \equiv (2 a_s, b_s, 2 c_s)$  di (H') fossero equivalenti, esisterebbe una sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi,  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , per cui, a norma delle (I), *mutatis mutandis*, si avrebbero le formule:

$$\begin{cases} 2 a_s = 2 a_r \alpha^2 + 2 b_r \alpha \gamma + 2 c_r \gamma^2 \\ b_s = 2 a_r \alpha \beta + b_r (\alpha \delta + \beta \gamma) + 2 c_r \gamma \delta \\ 2 c_s = 2 a_r \beta^2 + 2 b_r \beta \delta + 2 c_r \delta^2 \end{cases}$$

la terza delle quali ci mostra che, essendo  $c_s, b_r, c_r$  dispari, ed  $a_r$  pari, dovrebbero essere  $\beta$  pari e  $\delta$  dispari. Sicché, posto  $\beta/2 = \sigma$ , anche la sostituzione  $\begin{pmatrix} \alpha & \sigma \\ 2\gamma & \delta \end{pmatrix}$  è unimodulare a coefficienti interi.

Ora, se nelle tre formule scritte facciamo  $\beta = 2\sigma$  dopo aver moltiplicato la prima per 2, e diviso, invece, per 2 la terza, si osserva che come risultato di queste operazioni si ottengono le formule di passaggio dalla forma  $f_r \equiv (4 a_r, b_r, c_r)$  del sistema (H) alla forma  $f_s \equiv (4 a_s, b_s, c_s)$  del medesimo sistema quando alla  $f_r$  si applica la sostituzione  $\begin{pmatrix} \alpha & \sigma \\ 2\gamma & \delta \end{pmatrix}$ .

Se ne conclude che dovrebbero essere equivalenti la  $f_r$  e la  $f_s$  del sistema (H), il che è impossibile.

4. TEOREMA. - *Ogni forma quadratica binaria primitiva di seconda specie  $f_r \equiv (2 d_r, e_r, 2 g_r)$  di determinante D è sempre equivalente ad un'altra*

forma, necessariamente primitiva di seconda specie,  $f_s \equiv (2d_s, e_s, 2g_s)$ , ove  $g_s$  è dispari.

*Dimostrazione.* — Se  $g_r$  è dispari, la  $f_r$  è già del tipo richiesto.

Sia, dunque,  $g_r$  pari, ed  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  una sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi che, applicata alla  $f_r$ , ci fa passare alla  $f_s$ . Per la terza delle formule (1) si ha:

$$2g_s = 2d_r\beta^2 + 2e_r\beta\delta + 2g_r\delta^2$$

ovvero

$$g_s = d_r\beta^2 + e_r\beta\delta + g_r\delta^2.$$

Si vede subito che se  $d_r \equiv 1 \pmod{2}$ , basta prendere  $\beta$  dispari, e  $\delta$  pari e primi fra loro per avere

$$d_r\beta^2 \equiv 1 \quad ; \quad e_r\beta\delta \equiv 0 \quad ; \quad g_r\delta^2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$$

e, quindi,

$$g_s \equiv 1 \pmod{2}.$$

Se, invece, è  $d_r \equiv 0 \pmod{2}$  scegliendo  $\beta$  e  $\delta$  entrambi dispari e primi fra loro, avremo:

$$d_r\beta^2 \equiv 0 \quad ; \quad e_r\beta\delta \equiv 1 \quad ; \quad g_r\delta^2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$$

e, quindi,

$$g_s \equiv 1 \pmod{2}.$$

Rimane ancora a scegliere  $\alpha$  e  $\gamma$  in modo da avere  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , il che è sempre possibile.

In virtù di questo teorema, analogamente a quanto si è fatto per le forme quadratiche binarie primitive di prima specie, possiamo costruirci un sistema completo di rappresentanti di classi di forme primitive di seconda specie del tipo:

$$(K) \quad (2d_1, e_1, 2g_1), (2d_2, e_2, 2g_2) \cdots (2d_n, e_n, 2g_n)$$

ove i coefficienti  $g_i$  sono dispari, ed  $n$  è il numero delle classi.

Si osserva che, essendo le forme primitive di seconda specie, i coefficienti  $e_i$  sono dispari, e, quindi,  $e_i \equiv 1 \pmod{8}$ . Perciò, volendo limitarci al caso di  $D = e_i^2 - 4d_i g_i \equiv 1 \pmod{8}$ , dobbiamo supporre  $4d_i g_i \equiv 0 \pmod{8}$ , e, quindi,  $d_i$  pari, essendo  $g_i$  dispari.

5. Dividendo per 2 il terzo coefficiente, e moltiplicando, invece, per 2 il primo coefficiente delle  $n$  forme (K), otteniamo le altrettante forme:

$$(K') \quad (4d_1, e_1, g_1), (4d_2, e_2, g_2) \cdots (4d_n, e_n, g_n)$$

primitive di prima specie dello stesso determinante  $D$ , ove i coefficienti  $e_i$  e  $g_i$  sono dispari e  $d_i$  pari.

TEOREMA. - *Dimostriamo che in  $(K')$  non vi sono forme equivalenti.*

Ed invero, se due forme  $f'_r \equiv (4d_r, e_r, g_r)$  ed  $f'_s \equiv (4d_s, e_s, g_s)$  di  $(K')$  potessero essere equivalenti, esisterebbe una sostituzione lineare unimodulare  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  per cui

$$\begin{aligned} 4d_s &= 4d_r \alpha^2 + 2e_r \alpha\gamma + g_r \gamma^2 \\ e_s &= 4d_r \alpha\beta + e_r (\alpha\delta + \beta\gamma) + g_r \gamma\delta \\ g_s &= 4d_r \beta^2 + 2e_r \beta\delta + g_r \delta^2. \end{aligned}$$

La prima di queste formule, essendo  $g_r$  dispari, ci mostra che dev'essere  $\gamma$  pari, e, quindi,  $\sigma = \gamma/2$  un numero intero. Ne segue che la sostituzione  $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \sigma & \delta \end{pmatrix}$  è anch'essa unimodulare a coefficienti interi.

Ora, se nelle tre formule scritte sostituiamo  $2\sigma$  al posto di  $\gamma$ , e dopo moltiplichiamo la terza per 2 e dividiamo, invece, per 2 la prima, si osserva che come risultato di queste operazioni si ottengono le formule di passaggio dalla forma  $f_r \equiv (2d_r, e_r, 2g_r)$  del sistema  $(K)$  alla forma  $f_s \equiv (2d_s, e_s, 2g_s)$  del medesimo sistema, quando alla  $f_r$  si applica la sostituzione unimodulare  $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \sigma & \delta \end{pmatrix}$ . Ne segue che dovrebbero essere equivalenti le due forme  $f_r$  ed  $f_s$  del medesimo sistema  $(K)$ , il che è impossibile.

6. TEOREMA. - *Il numero delle classi del sistema  $(H)$  è uguale al numero delle classi del sistema  $(K)$ .*

Ed infatti, le  $m$  forme  $(H')$ , tutte distinte fra loro, dedotte da  $(H)$ , sono primitive di seconda specie, e, come tali, a ognuna di esse ne corrisponde una ed una sola equivalente nel sistema  $(K)$  che ne contiene  $n$ . Ne segue che

$$n \geq m.$$

Analogamente, le  $n$  forme  $(K')$ , tutte distinte fra loro, dedotte da  $(K)$ , sono primitive di prima specie, e, come tali, a ognuna di esse ne corrisponde una ed una sola equivalente nel sistema  $(H)$  che ne contiene  $m$ , e, perciò

$$m \geq n.$$

Se ne conclude che nessuno dei due numeri  $m$  ed  $n$  è maggiore o minore dell'altro, e, quindi,

$$m = n.$$

COROLLARIO. - *Le forme  $(H')$  e  $(K')$  costituiscono due sistemi completi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie primitive di seconda e di prima specie rispettivamente.*

**Analisi matematica.** — *Sulla inscrivibilità di un ottaedro regolare in un insieme convesso limitato dello spazio ordinario* (\*). Nota (\*\*) di CARLO PUCCI, presentata dal Socio M. PICONE.

S. Kakutani ha provato in [6] che per ogni insieme convesso limitato  $X$  dello spazio euclideo  $E^3$  a tre dimensioni esiste un cubo ad esso circoscritto, contenente cioè  $X$  e con ogni sua faccia avente intersezione non vuota con  $\mathfrak{F}X$ . Nella stessa Nota Kakutani ha mostrato con un esempio che non sempre esiste un cubo inscritto in  $X$ , cioè con i vertici appartenenti ad  $\mathfrak{F}X$ .

In questa Nota proviamo che dato comunque un insieme convesso, limitato in  $E^3$  esiste un ottaedro regolare <sup>(1)</sup> inscritto in  $X$  cioè con i vertici appartenenti ad  $\mathfrak{F}X$ . Il risultato analogo nel piano è stato stabilito da A. Emch [4] e successivamente L. Snirelman [10] ha provato più generalmente che in ogni curva piana, semplice, chiusa, possedente una curvatura continua, esistono quattro vertici di un quadrato <sup>(2)</sup>.

Tali proprietà degli insiemi convessi sono strettamente collegate ad alcune proprietà di una funzione continua  $f$  sulla superficie  $S_2$  di una sfera di  $E^3$ . Kakutani ha ottenuto il risultato indicato come conseguenza del teorema che definita comunque la funzione continua  $f$  su  $S_2$  esistono tre punti di  $S_2$ , estremi di tre raggi fra loro ortogonali, nei quali  $f$  assume lo stesso valore. De Mira Fernandes [9] ha provato più generalmente che nelle stesse ipotesi esistono tre punti di  $S_2$ , vertici di un triangolo equilatero di lato assegnato, nei quali  $f$  assume lo stesso valore e successivamente E. Floyd [5] ha mostrato che comunque si fissino tre punti di  $S_2$  esiste una rotazione che porta i tre punti in altri tre nei quali  $f$  assume lo stesso valore.

Un risultato analogo è stato ottenuto da F. Dyson [3] e cioè che esistono quattro punti di  $S_2$ , estremi di due diametri ortogonali, nei quali  $f$  assume lo stesso valore; Livesay [8] ha mostrato che l'ortogonalità dei diametri è inessenziale potendo richiedere invece che i due diametri formino un angolo assegnato qualsiasi. Una nuova dimostrazione del teorema di Dyson, fon-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Colgo l'occasione della pubblicazione di questa Nota per ringraziare il professore David Bourgin del Seminario di Topologia algebrica e funzionale da lui tenuto presso l'Università di Roma durante il quale anche questa ricerca è stata discussa.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1956.

(1) Secondo la definizione usuale un ottaedro si dice regolare se le tre diagonali hanno la stessa lunghezza e si bisecano ortogonalmente a due a due.

(2) Il problema della inscrivibilità di un quadrato in una curva piana, semplice, chiusa è ancora aperto. Esso è stato posto dall'« Amer. Math. Monthly », 56, p. 39 (1949). Una soluzione di C. OGILVY nel vol. 57, p. 423 è stata criticata da A. GLEASON e da J. SCHAEFFER nel vol. 5, pp. 113-114 della stessa rivista.

data su un lemma di Kuratowski, è stata data anche da Zarankiewicz [14]. La questione è solo apparentemente metrica, il suo aspetto topologico è stato approfondito ultimamente da C. Yang [12], [13] e D. Bourgin [2] che ha generalizzato il teorema di Dyson e l'analogo teorema di Borsuk-Ulam [1] per il quale definita su  $S_2$  una funzione complessa continua  $f$  esiste un diametro della sfera ai cui estremi  $f$  assume lo stesso valore. L'ipotesi della continuità di  $f$  è stata sostituita da Bourgin dalla semi-continuità superiore ed invece della superficie  $S_2$  considera un insieme che separa l'origine dei punti all'infinito.

La dimostrazione del teorema contenuto in questa Nota è basata su un lemma di Floyd.

1. Trattiamo preliminarmente della inscrivibilità dei rombi negli insiemi convessi. Sia  $x$  un punto dello spazio euclideo  $E^n$  ad  $n$  dimensioni e consideriamo  $n$  segmenti aventi  $x$  per punto medio e a due a due ortogonali; il più piccolo insieme convesso che li contiene è un poliedro che diremo rombo  $n$  dimensionale.

TEOREMA. - *Dato un insieme aperto, convesso, limitato  $X$  in  $E^n$  e fissato comunque un sistema di  $n$  rette a due a due ortogonali, esiste un rombo con i vertici appartenenti ad  $\mathfrak{F}X$  e con ciascuna diagonale parallela ad una retta delle  $n$  fissate. Se inoltre l'insieme è propriamente convesso tale rombo è unico.*

Il teorema è vero per  $n = 1$  perché in tal caso  $X$  è un intervallo ed il rombo è l'intervallo stesso. Proviamo che se il teorema è vero in  $E^{n-1}$  è vero anche in  $E^n$ .

Supponiamo dapprima  $X$  propriamente convesso e con frontiera dotata ovunque di iperpiano tangente.

Fissiamo in  $E^n$  un sistema di assi ortogonali  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e siano  $e'$  ed  $e''$  l'estremo inferiore e superiore delle coordinate  $n$ -esime dei punti di  $X$ . Indicato con  $X(z)$  l'intersezione dell'insieme  $X$  con l'iperpiano  $x_n = z$  per  $e' < z < e''$  l'insieme  $X(z)$  è propriamente convesso su tale iperpiano. Pertanto ad  $X(z)$  si può inscrivere un solo rombo con le diagonali parallele ad  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Considerata la retta passante per il centro  $\alpha_z$  di tale rombo e parallela all'asse  $x_n$  essa incontra  $\mathfrak{F}X$  in due punti  $\beta_z, \gamma_z$  e poniamo

$$f(z) = \frac{\alpha_z \bar{\beta}_z}{\alpha_z \gamma_z}.$$

Se il punto  $\gamma_z$  è sopra a  $\beta_z$  rispetto all'asse  $x_n$ ,  $f(z)$  tende a zero per  $z \rightarrow e'$  e tende a  $+\infty$  per  $z \rightarrow e''$  avendo supposto  $\mathfrak{F}X$  dotata ovunque di iperpiano tangente. La funzione  $f(z)$  è continua internamente ad  $(e', e'')$  perché se vi fosse un punto  $z^0$  di discontinuità in  $X(z^0)$  vi sarebbero più rombi iscritti. Esiste pertanto almeno un valore di  $z$  con  $f(z) = 1$  e il rombo di  $E^n$  che ha per vertici  $\beta_z, \gamma_z$  ed i vertici del rombo inscritto in  $X(z)$  è quello richiesto avendo le diagonali parallele agli assi prefissati.

Supponiamo ora che  $X$  sia solamente convesso e limitato. In tale caso esiste una successione equilimitata di insiemi  $\{X_t\}$ , propriamente convessi e con  $\mathfrak{F}X_t$  dotate ovunque di iperpiano tangente, convergenti ad  $X$ . Indichiamo con  $R_t$  un rombo inscritto in  $X_t$  e con  $u_t^i, v_t^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) i vertici di  $R_t$  estremi della diagonale parallela alla  $i$ -esima retta delle  $n$  fissate. Essendo gli  $R_t$  equilimitati esiste una successione di numeri naturali  $\{y_t\}$  tale che  $\{u_{\lambda_t}^i\}, \{v_{\lambda_t}^i\}$  convergono ad  $u^i, v^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) risultando  $u^i, v^i \in \mathfrak{F}X$ . Se fosse  $u^i = v^i$  l'iperpiano passante per tale punto e ortogonale alla retta  $i$ -esima conterrebbe l'insieme  $X$  e ciò è assurdo avendo supposto  $X$  aperto. Pertanto i punti  $u^i, v^i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  sono i vertici di un rombo inscritto in  $X$  come volevasi dimostrare.

Resta infine da provare che se  $X$  è propriamente convesso tale rombo inscritto è unico. Supponiamo per assurdo che ve ne siano due distinti  $R_1$  ed  $R_2$  con le diagonali parallele agli assi. Supponiamo che l'origine del sistema di coordinate coincida col centro di  $R_1$ ; il centro di  $R_2$  abbia coordinate  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ed indichiamo con  $l_1, \dots, l_n$  ( $d_1, \dots, d_n$ ) la lunghezza della metà delle diagonali di  $R_1$  ( $R_2$ ). Senza alterare le generalità possiamo supporre

$$(1) \quad a_1, \dots, a_n \geq 0, \quad a_1 l_n \geq a_n l_1,$$

ché a ciò possiamo ricondurci cambiando eventualmente il verso e l'ordine degli assi coordinati. Consideriamo i due vertici di  $R_2$

$$P_1 = (a_1 + d_1, a_2, \dots, a_n) \quad P_2 = (a_1 - d_1, a_2, \dots, a_n).$$

L'iperpiano  $w$  d'equazione

$$\frac{x_1}{l_1} + \dots + \frac{x_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{x_n}{l_n} = 1$$

contiene  $n$  vertici di  $R_1$  ed ha in comune con la retta  $r$  di equazione  $x_i = a_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , il punto

$$P' = \left( l_1 - \frac{l_1}{l_2} a_2 - \dots - \frac{l_1}{l_{n-1}} a_{n-1} + \frac{l_1}{l_n} a_n, a_2, \dots, a_n \right)$$

che è esterno alla faccia del rombo su  $w$ . Pertanto appartenendo i vertici di  $R_1$  ed il punto  $P'$  alla frontiera di un insieme propriamente convesso deve essere

$$(2) \quad a_1 + d_1 < l_1 - \frac{l_1}{l_2} a_2 - \dots - \frac{l_1}{l_{n-1}} a_{n-1} + \frac{l_1}{l_n} a_n.$$

Considerando l'iperpiano  $w'$  di equazione

$$- \frac{x_1}{l_1} + \frac{x_2}{l_2} + \dots + \frac{x_n}{l_n} = 1,$$

si prova analogamente per la prima coordinata di  $P''$ , comune ad  $r$  ed a  $w'$ ,

$$a_1 - d_1 < -l_1 \left( 1 - \frac{a_2}{l_2} - \dots - \frac{a_n}{l_n} \right)$$

e per la (2)

$$a_1 + l_1 \left( 1 - \frac{a_2}{l_2} - \dots - \frac{a_n}{l_n} \right) < -a_1 + l_1 \left( 1 - \frac{a_2}{l_2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{a_n}{l_n} \right)$$

che è in contraddizione con la (1).

**TEOREMA.** - *Dato in  $E^3$  un insieme aperto, convesso, limitato  $X$  esiste un ottaedro regolare con i vertici appartenenti ad  $\mathfrak{F}X$ .*

Per le precedenti considerazioni basta provare il teorema supponendo  $X$  propriamente convesso.

Fissiamo in  $E^3$  un sistema di assi ortogonali  $x_1, x_2, x_3$  ed indichiamo con  $G$  il gruppo delle rotazioni in  $E^3$  avente centro nell'origine delle coordinate; una rotazione  $r$  trasforma il precedente sistema di coordinate nel nuovo sistema  $rx_1, rx_2, rx_3$ . Consideriamo l'insieme  $X$  solidale col sistema di riferimento  $x_1, x_2, x_3$  ed indichiamo con  $R(r)$  il rombo inscritto in  $X$  che ha le diagonali parallele agli assi  $rx_1, rx_2, rx_3$ ; indichiamo con  $f_i(r)$  la lunghezza della diagonale di  $R(r)$  parallela a  $rx_i$  e poniamo

$$\varphi_2(r) = f_2(r) - f_1(r) \quad , \quad \varphi_3(r) = f_3(r) - f_1(r).$$

Il gruppo  $G$  delle rotazioni è omeomorfo con lo spazio proiettivo a tre dimensioni e quindi  $G$  è un continuo unicoerente, localmente connesso. Indichiamo con  $s_i$ ,  $i = 2, 3$ , la rotazione di ordine 2 che scambia l'asse  $x_i$  con l'asse  $x_1$  mutando l'altro asse in se stesso a meno del verso. Indichiamo con  $T_i(r)$  la rotazione ottenuta sommando  $r$  ad  $s_i$ . Evidentemente

$$(1) \quad \varphi_i[T_i(r)] = -\varphi_i(r).$$

Sia  $A_i$  l'insieme delle rotazioni  $r$  di  $G$  tali che  $\varphi_i(r) = 0$ ;  $A_i$  risulta chiuso ed invariante rispetto a  $T_i$ , e separa  $r$  da  $T_i(r)$  per la (1). Per il lemma di Floyd vi è un continuo  $B_i$  in  $A_i$ , invariante rispetto a  $T_i$ , che separa  $r$  da  $T_i(r)$  per  $r \in G - B_i$ . Siccome  $X$  è localmente convesso  $X - B_i = P_i \cup Q_i$  dove  $P_i$  è aperto,  $Q_i = T_i(P_i)$ , e gl'insiemi  $P_i, Q_i$  non hanno punti comuni.

Le trasformazioni  $T_i$  sono «traslazioni» nel gruppo compatto  $G$  e quindi rispetto ad esse risulta invariante la misura di Haar su  $G$ . Pertanto se  $U$  è un insieme non vuoto in  $G$  con  $U \neq G$  allora  $T_2[T_3(\bar{U})]$  non è contenuto in  $U$ . Infatti se fosse  $T_2[T_3(\bar{U})] \subset U$  la misura di  $T_1[T_2(U)]$  sarebbe minore di quella di  $U$ .

Supponiamo per assurdo che  $B_1$  e  $B_2$  non abbiano punti comuni. Siccome  $B_2$  è connesso e disgiunto da  $B_1$  o  $B_2 \subset P_1$  o  $B_2 \subset Q_1$ ; analogamente risulta o  $B_1 \subset P_2$  o  $B_1 \subset Q_2$ . Supponiamo ad esempio  $B_2 \subset Q_1$  e  $B_1 \subset P_2$ .

Siccome  $B_1$  è un continuo l'insieme  $P_1 \cup B_1$  è connesso. L'insieme  $P_1 \cup B_1$  interseca  $P_2$  e non interseca  $B_2$  pertanto  $P_1 \cup B_1 \subset P_2$ . Analogamente si prova  $Q_2 \cup B_2 \subset Q_1$ . Da ciò segue che

$$T_1 [T_2 (\bar{P}_1)] \subset T_1 [T_2 (P_1 \cup B_1)] \subset T_1 [T_2 (P_2)] = T_1 (Q_2) \subset T_1 (Q_1) = P_1.$$

Ma abbiamo già osservato che questo è impossibile per la proprietà delle trasformazioni  $T_i$  di conservare la misura di Haar.

Resta così dimostrato che gli insiemi  $B_2$  e  $B_3$  hanno punti comuni ed indicato con  $r$  uno di essi per la definizione di  $B_2$  e  $B_3$  risulta  $\varphi_2(r) = \varphi_3(r) = 0$  cioè il rombo  $R(r)$  ha le tre diagonali uguali.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] K. BORSUK, *Drei Sätze ueber die n-dimensionale Euklidische Sphäre*, «Fund. Math.», 20, pp. 117-190 (1933).
- [2] D. G. BOURGIN, *On some separation and mapping theorems*, «Comm. Math. Helv.», 29, pp. 199-214 (1955).
- [3] F. J. DYSON, *Continuous functions defined on spheres*, «Ann. of Math.», 54, pp. 534-536 (1951).
- [4] A. EMCH, *Some properties of closed convex curves in a plane*, «Amer. J. of Math.», 35, pp. 407-412 (1913).
- [5] E. E. FLOYD, *Real-valued mappings of spheres*, «Proc. Am. Math. Soc.», 6, pp. 957-959 (1955).
- [6] S. KAKUTANI, *A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in  $R^3$* , «Ann. of Math.», 43, pp. 739-741 (1942).
- [7] K. HAMAN e C. KURATOWSKI, *Sur quelques propriétés des fonctions définies sur des continus unichôrents*, «Bull. de l'Ac. Pol. des Sciences», Cl. III, 3, pp. 233-246 (1955).
- [8] G. R. LIVESAY, *On a theorem of F. J. Dyson*, «Ann. of Math.», vol. 59, pp. 227-229 (1954).
- [9] A. DE MIRA FERNANDES, *Funzioni continue sopra una superficie sferica*, «Portugaliae Math.», 5, pp. 132-134 (1946).
- [10] L. G. SNIRELMAN, *Alcune proprietà geometriche delle curve chiuse* (titolo in russo), «Uspehi Matem. Nauk», 10, pp. 33-44 (1944).
- [11] H. YAMABE e Z. YUJOBO, *On the continuous function defined on a sphere*, «Osaka Math. J.», 2, pp. 19-22 (1950).
- [12] C. T. YANG, *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson*, «Ann. of Math.», 60, pp. 262-282 (1954); 65, pp. 271-283 (1955).
- [13] C. T. YANG, *Continuous functions from spheres to euclidean spaces*, «Ann. of Math.», 62, pp. 284-292 (1955).
- [14] K. ZARANKIEWICZ, *Un théorème sur l'uniformisation des fonctions continues et son application à la démonstration du théorème de F. J. Dyson sur les transformations de la surface sphérique*, «Bull. de l'Ac. Pol. des Sciences», Cl. III, 3, pp. 117-120 (1954).

**Geometria.** — *Invarianti topologici d'un insieme di elementi differenziali curvilinei.* Nota I <sup>(\*)</sup> di DAVID KIRBY, presentata dal Socio B. SEGRE.

In un recente lavoro [8, n. 1], B. Segre ha dato un procedimento generale dal quale ha fra l'altro dedotto che, in uno spazio  $S_n$  ad  $n$  dimensioni ( $n \geq 2$ ), un insieme generico di  $n + 1$  elementi differenziali regolari d'ordine  $h \geq 2$ , aventi in comune un elemento d'ordine  $h - 1$ , ammette precisamente  $n - 1$  invarianti topologici indipendenti. Nel caso più semplice in cui si abbia  $n = 2$ ,  $h = 2$ , quest'ultimo risultato trovasi già in Bompiani [2], stabilito mediante un calcolo diretto. Invece B. Segre è giunto a quel risultato utilizzando una sua potente e suggestiva rappresentazione degli elementi differenziali sopra una varietà di Veronese a due indici.

In questa Nota I considero il problema da un altro punto di vista, pervenendo ad un'estensione del risultato di B. Segre nel caso di elementi non regolari. Nella Nota II, che farà seguito alla presente, approfondisco ulteriormente un metodo relativo agli elementi non regolari del piano, diretta generalizzazione del procedimento di Segre nel caso  $n = 2$ ; provo inoltre che un'analoga estensione viene a mancare per  $n > 2$ .

Dallo studio degli invarianti d'un insieme di elementi differenziali seguono facilmente proprietà locali di certi tipi di curve differenziabili. Così, per esempio, dai risultati attuali si deducono invarianti topologici di curve analitiche quando gli elementi sui rami di tali curve uscenti da un punto formino un insieme del tipo suddetto; inoltre abbiamo sempre i significati geometrici degli invarianti qui introdotti.

Va ricordato come gli invarianti di curve analitiche possano venir distribuiti in due categorie: invarianti aritmetici ed invarianti topologici. Quelli della prima categoria sono stati studiati da tempo mediante metodi classici, particolarmente nel caso di curve del piano, ved., per esempio, Enriques-Chisini [3]; per un approfondimento ulteriore nel caso più generale, cfr. Arf [1] e, più recentemente, Kirby [5]. Degli invarianti topologici si sa poco; relativamente ad un singolo ramo nel piano, vari risultati algebrici si trovano in Kasner-De Cicco [4], ma ivi mancano i significati geometrici.

Osserviamo inoltre che lo studio degli invarianti di elementi differenziali ha interesse anche in connessione coi modelli di elementi di dato ordine sopra una data varietà; per i casi più semplici, ved. Longo [6] ed i lavori ivi citati.

Aggiungasi infine che da ogni problema locale seguono altri problemi globali. Così, nel caso di una curva algebrica avente opportuni comportamenti nei vari suoi punti singolari, dovrebbe essere possibile di trovare delle

(\*) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1956.

relazioni fra gli invarianti di cui al presente lavoro relativi a tali punti. Del pari, nel caso di due curve algebriche tracciate su di una data superficie, gli invarianti topologici dei loro rami uscenti dai punti ad esse comuni possono venire considerati come invarianti d'intersezione, e fra tali invarianti nei diversi punti esistono relazioni: cfr. (anche per ulteriori citazioni) una Monografia di B. Segre, di prossima pubblicazione negli « *Ergebnisse der Mathematik* ». Però non mi occupo qui di questi problemi.

1. Consideriamo un insieme di  $r$  elementi d'ordine  $h$ , aventi in comune un elemento  $E$  d'ordine  $h - 1$  (eventualmente non regolare) e appartenenti ad una varietà algebrica  $V_n$  non singolare nel centro  $O$  di  $E$ . Vogliamo associare a tale insieme certi numeri complessi invarianti di fronte alle trasformazioni  $T$  di  $V_n$  che sono biregolari nel punto  $O$ . Vedremo che il minimo numero  $r$  di elementi che ammettono siffatti invarianti topologici dipende unicamente dalla dimensione  $n$  di  $V_n$ , e dal numero  $s$  dei punti ai quali l'ultimo (cioè l' $h$ -esimo) punto di  $E$  risulta prossimo. Più precisamente, dovranno al riguardo distinguersi due casi secondoché  $s = 1$  od  $s > 1$ . Nel primo caso sussiste una estensione semplice del risultato di Segre, talché, in generale,  $n + 1$  elementi ammettono  $n - 1$  invarianti; mentre invece nel secondo caso mostreremo che due elementi posseggono  $s - 1$  invarianti.

Studiamo anzitutto localmente una trasformazione biregolare  $T$ . Ci riferiamo a due varietà algebriche  ${}_1V, {}_1V'$  ad  $n$  dimensioni, non singolari rispettivamente nei punti  $O_1, O'_1$  e tali che fra le suddette varietà esista una trasformazione  $T$  biregolare nella coppia  $O_1, O'_1$ . Siano  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  coordinate locali ammissibili sulle varietà  ${}_1V, {}_1V'$  negli intorni dei punti  $O_1, O'_1$ . Possiamo allora rappresentare  $T$  in tali intorni mediante equazione del tipo:

$$(I) \quad x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + A_{i2}(x) + A_{i3}(x) + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove  $|a_{ij}| \neq 0$ ,  $A_{ik}(x)$  sia una forma di grado  $k$  nelle  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 2, 3, \dots$ ), ed i coefficienti delle forme  $A_{i1}(x) \left( = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)$ ,  $A_{i2}(x), A_{i3}(x), \dots$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) siano elementi di un corpo  $K$ , algebricamente chiuso e di caratteristica zero.

Poiché  $|a_{ij}| \neq 0$ ,  $T$  induce un'omografia non degenera  $\left[ \begin{array}{c} \text{di equazioni} \\ x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \end{array} \right] (i = 1, 2, \dots, n)$  fra le stelle di rette uscenti dai punti  $O_1, O'_1$  e giacenti negli spazi tangenti alle,  ${}_1V, {}_1V'$  in questi punti.

Applichiamo ora una dilatazione  $\tau$  di base  $O_1$  alla varietà  ${}_1V$  (cfr. B. Segre [7]) e, parimente, una dilatazione  $\tau'$  di base  $O'_1$  alla varietà  ${}_1V'$ . La suddetta omografia induce un'omografia fra i due intorni  $I_1, I'_1$  dei punti  $O_1, O'_1$  sulle varietà dilatate  ${}_2V, {}_2V'$ . Denotiamo con  $O_2, O'_2$  due punti appar-

tenenti rispettivamente ad  $I_1, I'_1$  e che si corrispondano in quest'omografia. Per semplificare i calcoli, scegliamo - come è lecito - le coordinate locali  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  in modo che i punti  $O_2, O'_2$  corrispondano alle tangenti in  $O_1, O'_1$  alle curve analitiche di  ${}_1V, {}_1V'$  aventi rispettivamente le equazioni locali

$$x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0, \quad x'_2 = x'_3 = \dots = x'_n = 0,$$

sicché nelle (1) dev'essere

$$(2) \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{i1} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Con tale scelta, in virtù di una nota proprietà relativa alle dilatazioni (cfr. [9]), possiamo introdurre ordinatamente coordinate locali  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$  negli intorni dei punti  $O_2, O'_2$  sulle  ${}_2V, {}_2V'$ , in guisa che le equazioni di  $\tau, \tau'$  vengono a scriversi nella forma

$$(3) \quad \tau: x_1 = X_1, \quad x_i = X_1 X_i \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

$$(3') \quad \tau': x'_1 = X'_1, \quad x'_i = X'_1 X'_i \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Mediante la sostituzione di queste relazioni nelle (1), deduciamo che la trasformazione  $T$  induce una trasformazione  $T_2$  tra  ${}_2V, {}_2V'$ , in cui  $O_2, O'_2$  si corrispondono, in modo che  $T_2$  sia biregolare nella coppia  $O_2, O'_2$ . Così, in virtù delle (2),  $T_2$  viene rappresentata mediante le

$$(4) \quad \begin{cases} X_1 = X_1 U \\ X_i = U^{-1} \left( \sum_{j=2}^n a_{ij} X_j \right) + X_1 \bar{A}_{i2} + X_1^2 \bar{A}_{i3} + \dots \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

dove

$$(5) \quad U = a_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j} X_j + X_1 \bar{A}_{12} + X_1^2 \bar{A}_{13} + \dots,$$

$U^{-1}$  denoti la serie formale di potenze inversa di quest'ultima (la quale esiste, in quanto  $a_{11} \neq 0$ ), e  $\bar{A}_{ij}$  sia il polinomio  $A_{ij}(1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 2, 3, \dots$ ).

Si osservi inoltre che, in base alle (4), l'intorno  $I_1$  del punto  $O_1$  (di equazione locale  $X_1 = 0$ ) corrisponde in  $T_2$  all'intorno  $I'_1$  del punto  $O'_1$  (di equazione  $X'_1 = 0$ ). Ne segue il

**TEOREMA I.** - *La trasformazione  $T$  fra le varietà  ${}_1V, {}_1V'$ , biregolare nella coppia di punti  $O_1, O'_1$ , induce fra le varietà dilatate  ${}_2V, {}_2V'$  una trasformazione  $T_2$  dotata delle seguenti proprietà:*

(a) *I due intorni  $I_1, I'_1$  si corrispondono in  $T_2$ , e questa corrispondenza risulta un'omografia non degenera;*

(b)  *$T_2$  è biregolare in ogni coppia di punti  $O_2, O'_2$  corrispondenti nella suddetta omografia.*

2. Sia  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  un elemento dell'anello di serie formali di potenze  $K\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tale che la sua forma direttrice (ossia la somma dei termini di grado più basso),  $\bar{f}_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , svanisca per  $x_2 = x_3 = \dots$

$\dots = x_n = 0$ . Detto  $m$  il grado di  $\bar{f}_1(x)$ , denotiamo con  $g_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  l'elemento di  $K\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$  ottenuto da  $f_1(x)$  mediante le (1). Se valgono le (2), la forma direttrice,  $\bar{g}_1(x')$ , di  $g_1(x')$  ha essa pure grado  $m$  e scompare per  $x'_2 = x'_3 = \dots = x'_n = 0$ .

Applicando rispettivamente le trasformazioni (3), (3') ad  $f_1(x)$ ,  $g_1(x')$ , e dividendo le serie di potenze così ottenute per  $X_1^m, X_1'^m$ , si ottengono in definitiva due serie di potenze  $f_2(X_1, X_2, \dots, X_n), g_2(X_1', X_2', \dots, X_n')$ , tali che  $g_2(X')$  sia trasformata in  $U^{-m}f_2(X)$  mediante le (4),  $U$  essendo data dalla (5). Poiché ha  $U^{-m}$  un inverso nell'anello  $K\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , ne segue il

**TEOREMA II.** — *Con le notazioni del n. I, sia  $F$  un'ipersuperficie analitica di  ${}_1V$  uscente da  $O_1$ , e sia  $F'$  la trasformata sopra  ${}_1V'$  di  $F$  mediante  $T$ . Se il cono tangente ad  $F$  nel punto  $O_1$  contiene la direzione corrispondente al punto  $O_2$ , il cono tangente ad  $F'$  nel punto  $O'_1$  contiene la direzione corrispondente al punto  $O'_2$ . Inoltre, se  $F_2, F'_2$  sono le varietà analitiche di  ${}_2V, {}_2V'$  con centri  $O_2, O'_2$  ottenute dalle  $F, F'$  mediante dilatazioni di basi  $O_1, O'_1$ , allora  $F_2, F'_2$  si corrispondono nella trasformazione  $T_2$ .*

Usufruendo di una rappresentazione parametrica di un ramo  $\Gamma_1$  sopra  ${}_1V$  con centro  $O_1$  ed ivi tangente alla direzione di  $O_2$ , si stabilisce facilmente il

**TEOREMA III.** — *Il ramo  $\Gamma_1$  è trasformato da  $T$  in un ramo  $\Gamma'_1$  di  ${}_1V'$  di centro  $O'_1$  ed ivi tangente alla direzione del punto  $O'_2$ . Le dilatazioni  $\tau, \tau'$  trasformano rispettivamente  $\Gamma_1, \Gamma'_1$  in rami  $\Gamma_2, \Gamma'_2$  di  ${}_2V, {}_2V'$  di centri  $O_2, O'_2$ , tali che  $\Gamma_2, \Gamma'_2$  si corrispondono nella trasformazione  $T_2$ .*

3. Consideriamo ora un elemento di curva  $E_{h-1}$ , d'ordine  $h-1$ , giacente sulla varietà  ${}_1V$  ed avente per centro  $O_1$ . Sia  $E'_{h-1}$  il suo trasformato mediante  $T$ , sicché  $E'_{h-1}$  giacerà sulla varietà  ${}_1V'$  ed avrà per centro  $O'_1$ . Appliciamo una successione di dilatazioni  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{h-1}$ , tali che  $\tau_i$  trasformi  ${}_iV$  in  ${}_{i+1}V, {}_iE_{h-1}$  in  ${}_{i+1}E_{h-1}$ , e la base di  $\tau_i$  sia il centro  $O_i$  di  ${}_iE_{h-1}$ , per  $i = 1, 2, \dots, h-1$ , avendo posto  ${}_iE_{h-1} \equiv E_{h-1}$ . Del pari, applichiamo una successione di dilatazioni  $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_{h-1}$  che risolvano i punti  $O'_1, O'_2, \dots, O'_{h-1}$  di  $E'_{h-1}$ , relativamente alla quale usiamo le notazioni precedenti con apici.

Rileviamo che  $E_{h-1}$ , considerato come elemento di ordine  $h-1$ , consiste dei primi  $h$  punti  $O_1, O_2, \dots, O_h$  d'un certo ramo di curva  $\Gamma_1$  di  ${}_1V$ ; e quindi  $E'_{h-1}$  consiste dei primi  $h$  punti  $O'_1, O'_2, \dots, O'_h$  del ramo,  $\Gamma'_1$ , trasformato di  $\Gamma_1$  mediante  $T$ .

In virtù dei Teoremi I e III, la trasformazione  $T$  induce un'omografia  $\Theta$  fra le stelle  $S, S'$  delle rette uscenti dai punti  $O_h, O'_h$  ed appartenenti agli spazi di dimensione  $n$  tangenti alle  ${}_hV, {}_hV'$  in tali punti.

Denotiamo con  $I_i$  la varietà ad  $n-1$  dimensioni che rappresenta l'intorno del punto  $O_i$  sulla varietà  ${}_hV$ . Supposto che  $O_h$  sia prossimo agli  $s$  punti  $O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_s}$  è noto che  $I_{i_1}, I_{i_2}, \dots, I_{i_s}$  passano di conseguenza semplicemente per  $O_h$ . Analogamente gli intorni  $I'_{i_1}, I'_{i_2}, \dots, I'_{i_s}$  passano semplicemente per il punto  $O'_h$ . Denotati rispettivamente con  $\pi_{i_j}, \pi'_{i_j}$  gli spazi (ad  $n-1$  dimensione) tangenti a  $I_{i_j}, I'_{i_j}$  nei punti  $O_h, O'_h$ , si deduce dai Teoremi

I, II che  $\pi_{i_j}, \pi'_{i_j}$  si corrispondono nell'omografia  $\Theta$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ). Notiamo inoltre che gli spazi  $\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \dots, \pi_{i_s}$  e gli spazi  $\pi'_{i_1}, \pi'_{i_2}, \dots, \pi'_{i_s}$  si intersecano regolarmente nei rispettivi spazi ambienti.

È evidente che ad ogni retta di  $S$  corrisponde un elemento di curve di ordine  $h$  appartenente a  ${}_1V$  e contenente  $E_{h-1}$ ; e viceversa. In particolare, alle rette che non appartengono a nessuno spazio  $\pi_{i_j}$ , corrispondono gli elementi delle curve che passano semplicemente per  $O_h$ . Inoltre due rette si corrispondono in  $\Theta$  se, e soltanto se, gli elementi di curva associati si corrispondono nella trasformazione  $T$  fra le varietà  ${}_1V, {}_1V'$ . Pertanto:

*Ad ogni totalità di  $r$  elementi di ordine  $h$ , tali che ciascun elemento contenga  $E_{h-1}$ , possiamo associare un insieme di numeri complessi invarianti di fronte alle trasformazioni  $T$  biregolari nel centro  $O_1$  di  $E_{h-1}$ .*

Più precisamente, i suddetti invarianti non sono altro che gli invarianti proiettivi di una configurazione di  $s$  iperpiani (che si intersecano regolarmente fra loro) ed  $r$  punti in uno spazio proiettivo  $S_{n-1}$ , dove  $s$  sia il numero di punti a cui l'ultimo punto di  $E_{h-1}$  risulti prossimo.

4. Consideriamo infine due elementi distinti d'ordine  $h$ , appartenenti a due curve che passino semplicemente per l'ultimo punto  $O_h$  di  $E_{h-1}$ . In  $S_{n-1}$  la configurazione di cui al n. 3 è costituita da  $s$  iperpiani e due punti tali che: gli iperpiani s'intersechino regolarmente fra loro, ed i punti non appartengano a nessun iperpiano. La retta congiungente i due punti incontra gli iperpiani in altri  $s$  punti (eventualmente non tutti distinti). Il gruppo di  $s+2$  punti allineati che così si ottiene (dei quali almeno tre distinti fra loro) ammette precisamente  $s-1$  invarianti proiettivi. Pertanto:

*Gli elementi d'ordine  $h$  di due curve che contengano  $E_{h-1}$ , supposti distinti, ammettono  $s-1$  invarianti topologici, dove  $s$  denota il numero di punti ai quali l'ultimo punto di  $E_{h-1}$  risulta prossimo.*

È chiaro che, se  $s=1$ , non rimane così definito nessun invariante dei due elementi. Inoltre conservando le precedenti notazioni, riferiamoci ad un insieme di  $n-s+2$  elementi generici <sup>(1)</sup>, contenenti ciascuno  $E_{h-1}$ . La configurazione associata in  $S_{n-1}$  consiste di  $s$  iperpiani ed  $n-s+2$  punti genericamente situati; e si vede facilmente ch'essa possiede  $n-1$  invarianti proiettivi. Abbiamo così che:

*$n-s+2$  elementi generici d'ordine  $h$  contenenti  $E_{h-1}$  ammettono  $n-1$  invarianti di fronte alle trasformazioni biregolari.*

Rileviamo per completezza che questo risultato vale anche per  $s=0$  (nel qual caso  $h=0$ ).

Notiamo da ultimo che non è detto che gli invarianti ottenuti in questo numero formino un insieme *completo* di invarianti topologici. Vedremo anzi nella Nota II (n. 8) che ciò non è vero, in quanto l'omografia  $\Theta$  possiede di solito una notevole particolarità.

(1) Sarebbe difficile - e forse impossibile - di dare un significato preciso al termine « generico » qui usato, senza fare riferimento - come qui è implicito - alla configurazione associata nello spazio  $S_{n-1}$ .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. ARF, *Une interprétation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algébrique*, « Proc. London Math. Soc. », (2), 50, 256-287 (1948).
- [2] E. BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano*, « Rend. Acc. Lincei » (6), 4, 435-437 (1926)<sub>2</sub>.
- [3] F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni, ecc.*, vol. II (Bologna 1916).
- [4] E. KASNER-F. DE CICCO, *The general analytic theory of irregular analytic arcs or elements*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 51, 233-254 (1942).
- [5] D. KIRBY, *Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione*, 3 Note, « Rend. Acc. Lincei » (8), 20, 179-184, 325-328 e 446-452 (1956).
- [6] C. LONGO, *Sul modello minimo degli elementi cuspidali del piano*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa » (3), 9, 45-63 (1955).
- [7] B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*, « Ann. di Mat. », (4), 33, 5-48 (1952).
- [8] B. SEGRE, *Invarianti topologici-differenziali, varietà di Veronese e moduli di forme*, « Ann. di Mat. » (4), 41, 113-138 (1956).
- [9] J. G. SEMPLE-D. KIRBY, *Local dilatation*, « Journ. London Math. Soc. », 30, 417-422 (1955).

**Geometria.** — *Analisi e costruzione effettiva dei gruppi continui di trasformazioni di De Jonquières.* Nota (\*) di MODESTO DEDÒ, presentata dal Socio O. CHISINI.

1. Ci siamo proposto di *determinare e costruire tutti i gruppi continui di trasformazioni piane di De Jonquières, proiettivamente diversi* <sup>(1)</sup>, mediante l'analisi diretta delle loro proprietà caratteristiche.

Un gruppo continuo  $G$  di trasformazioni  $J$  di De Jonquières verrà anzitutto caratterizzato come la totalità delle  $J$ , di un certo ordine  $n$ , che hanno il medesimo centro  $O$  (punto fondamentale multiplo) e gli stessi  $n-1$  punti fondamentali semplici  $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$ : fondamentali per la diretta e per la inversa di ogni trasformazione  $J$ ; gli altri  $n-1$  punti fondamentali di una trasformazione  $J$  sono i punti coniugati dei punti  $K_i$  stessi (riguardati come fondamentali della  $J^{-1}$ ).

(\*) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1956.

(1) La classificazione *birazionale* dei gruppi continui di trasformazioni di De Jonquières (anzi cremoniane) è stata fatta da Enriques e ritrovata da Fano:

F. ENRIQUES, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano; Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières del piano*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 5<sup>a</sup>, vol. II (1<sup>o</sup> sem. 1893), pp. 468-473 e 532-538.

G. FANO, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano, e sopra certi gruppi di trasformazioni proiettive*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. X, 1895.

Per la *costruzione effettiva* dei gruppi  $G$  dovremo distinguere vari casi, sia in relazione alla parità dell'ordine  $n$  delle trasformazioni, sia in relazione alla posizione dei punti  $K_i$ : in generale si hanno gruppi  $\infty^6$ , la dimensione del gruppo si amplia quando i punti  $K_i$  appartengono ad un monoide di vertice  $O$  e di ordine minore di  $(n-1)/2$ .

La caratterizzazione a cui siamo giunti consente di dare, in ciascun caso, *una effettiva rappresentazione analitica* dei gruppi stessi.

2. Osserviamo anzitutto che *le trasformazioni  $J$  di un medesimo gruppo continuo  $G$  sono tutte dello stesso ordine,  $n$ , ed hanno tutte lo stesso punto fondamentale multiplo,  $O$ .*

Infatti, per la continuità del gruppo  $G$ , si può passare da una trasformazione  $J_1$  ad un'altra qualsiasi trasformazione  $J_2$  del gruppo, facendo variare con continuità certi parametri e, per una tale variazione continua, l'ordine  $n$  non può variare (potendo solo abbassarsi per *particolari* trasformazioni del gruppo  $G$ ).

Inoltre due qualsiasi trasformazioni  $J_1$  e  $J_2$  hanno lo stesso punto fondamentale multiplo perché, in caso opposto, il prodotto  $J_1 J_2$  non risulterebbe una trasformazione di De Jonquières (ma una trasformazione cremoniana con *due* punti fondamentali multipli). In particolare hanno lo stesso punto fondamentale multiplo la diretta e l'inversa di ogni trasformazione del gruppo  $G$ . Possiamo chiamare tale punto  $O$  *centro* della trasformazione<sup>(2)</sup> considerata; chiameremo quindi brevemente punti *fondamentali* i punti fondamentali semplici.

3. Il prodotto di due trasformazioni  $J_1$  e  $J_2$  del gruppo  $G$  è esso pure di ordine  $n$ : pertanto *le trasformazioni  $J_1^{-1}$  e  $J_2$  devono avere anche dei punti fondamentali semplici in comune.*

Per precisare questo fatto ricordiamo il (ben noto)

LEMMA. — *Il prodotto  $J_1 J_2$  di due trasformazioni di De Jonquières di ordine  $n$ , aventi lo stesso centro  $O$ , è una trasformazione  $J$ , la quale*

I. *Ha come centro il punto  $O$ .*

II. *Ha come ordine*

$$2n - 1 - h,$$

*essendo  $h$  il numero dei punti fondamentali della  $J_1^{-1}$  che coincidono con punti fondamentali della  $J_2$ .*

III. *Ha, in generale, come punti fondamentali i punti fondamentali della  $J_1$  e i punti trasformati, per la  $J_1^{-1}$ , dei punti fondamentali della  $J_2$ : quando però accada che un punto fondamentale  $F'_1$  di  $J_1^{-1}$  coincida con un*

(2) Abitualmente si chiama *centrale* una trasformazione di De Jonquières non solo quando la diretta e l'inversa hanno lo stesso punto fondamentale multiplo  $O$  (centro), ma anche quando le rette per  $O$  risultano unite per la trasformazione: ciò non accade, in generale, per le trasformazioni  $J$  di uno stesso gruppo continuo.

punto fondamentale  $F_2$  di  $J_2$ , non sono fondamentali né il punto  $F_1$  coniugato <sup>(3)</sup> di  $F'_1$ , né il punto  $\bar{F}_2$  trasformato di  $F_2$  per la  $J_1^{-1}$ .

La dimostrazione di questo lemma segue quasi immediatamente dalle proprietà fondamentali delle trasformazioni cremoniane: ad esempio è facile rendersi conto di come sia fatta la rete omaloidica relativa al prodotto  $J_1 J_2$ , pensando che si ottiene trasformando la rete delle rette mediante la  $J_2^{-1}$  e la rete così ottenuta mediante la  $J_1^{-1}$ .

4. Dal lemma precedente segue che due trasformazioni  $J_1$  e  $J_2$  di uno stesso gruppo continuo  $G$  hanno in comune anche  $n - 1$  punti fondamentali semplici, infatti l'ordine del prodotto  $J_1^{-1} J_2$  risulta  $n$  quando sia

$$h = n - 1.$$

Possiamo aggiungere che *questi punti fondamentali*, che indichiamo con

$$K_1, K_2, \dots, K_{n-1},$$

*sono gli stessi per qualunque coppia di trasformazioni del gruppo  $G$ .*

Infatti variando con continuità la  $J_2$ , anche tali punti dovrebbero variare con continuità: essendo essi fondamentali per la  $J_1$  (che teniamo fissa), non possono che rimanere fissi.

In particolare i punti  $K_i$  sono fondamentali per la diretta e per la inversa di ogni trasformazione del gruppo.

Osserviamo infine che, fissata una  $J$ , i punti  $K_i$  hanno come coniugati quei punti fondamentali della  $J^{-1}$  che sono diversi dai punti  $K_i$  stessi.

Infatti ogni punto  $K$  è fondamentale anche per il quadrato della trasformazione considerata e ciò, in base al lemma precedente, non accadrebbe se il punto coniugato di  $K$  fosse uno dei punti  $K_i$ .

5. Le proprietà che abbiamo stabilito nei paragrafi precedenti caratterizzano le trasformazioni di un gruppo continuo: sussiste infatti il seguente

TEOREMA. — *Fissati nel piano un punto  $O$  e  $n - 1$  punti*

$$K_1, K_2, \dots, K_{n-1},$$

*si consideri una trasformazione  $J$  di De Jonquières, di ordine  $n$ , la quale abbia centro in  $O$  e abbia come fondamentali, per la  $J$  e per la  $J^{-1}$ , i punti  $K_i$ ;*

(3) È noto che una retta passante per un punto fondamentale di una  $J$  viene mutata in una curva la quale non passa per un certo punto fondamentale della  $J^{-1}$ : questo fatto consente di associare ad ogni punto fondamentale della  $J$  un determinato punto fondamentale dell'inversa: diciamo *coniugati* due punti fondamentali cosiffatti. Notiamo esplicitamente che il fatto — e la nomenclatura — sussiste anche quando si tratti di punti fondamentali infinitamente vicini al centro della trasformazione o ad altri punti fondamentali semplici: naturalmente potrà, in questi casi, rendersi necessario considerare le curve trasformate di curve di ordine superiore al primo.

*tale inoltre che i punti fondamentali coniugati dei punti  $K_i$  siano i punti fondamentali dell'inversa diversi dai  $K_i$  stessi* <sup>(4)</sup>.

*La totalità delle trasformazioni  $J$  costituisce un gruppo continuo  $G$ .*

Infatti il prodotto  $J_1 J_2$  di due trasformazioni cosiffatte è una trasformazione che ha lo stesso centro  $O$  e lo stesso ordine  $n$ ; inoltre essa ha come fondamentali quei punti fondamentali della  $J_1$  i quali sono coniugati di punti non fondamentali per la  $J_2$ , cioè tale prodotto ha come fondamentali gli stessi punti  $K_i$ . Infine i punti coniugati dei punti  $K_i$  nella trasformazione prodotto sono diversi dai punti  $K_i$ , perché se, ad esempio,  $K_1$  fosse coniugato di  $K_2$ , il punto  $K_1$  non risulterebbe fondamentale per

$$(J_1 J_2) J_2^{-1} = J_1,$$

contro la nostra ipotesi.

Risulta così dimostrato che le  $J$  formano un gruppo  $G$ , il quale è ovviamente continuo.

6. Passiamo ora alla *costruzione effettiva* dei gruppi continui  $G$ .

In base al teorema precedente ciascuno di essi è caratterizzato dall'ordine delle trasformazioni, dal centro e dai punti fondamentali  $K_i$ : in relazione a questi elementi si hanno i differenti gruppi  $G$ .

Fissato il centro  $O$ , gli  $n-1$  punti  $K_i$  possono essere dati ad arbitrio, con la sola limitazione che due di essi non siano allineati con  $O$  (nel qual caso da tutte le curve della rete omaloidica si stacca questa retta).

Come noto (e si ritrova facilmente) le trasformazioni di De Jonquières di ordine  $n$  aventi un dato centro  $O$  sono  $\infty^{4n+2}$ ; se gli  $n-1$  punti  $K_i$  sono dati *in modo generico* <sup>(5)</sup>, essi impongono  $4(n-1)$  condizioni e pertanto nel caso generico il gruppo continuo  $G$  è un gruppo che dipende da 6 parametri: si presentano però due casi essenzialmente diversi secondo che l'ordine  $n$  è pari o dispari.

Inoltre la dimensione del gruppo  $G$  *si amplia* quando i punti  $K_i$  siano dati *in modo particolare*: precisamente se il monoide, di vertice  $O$ , di ordine minimo, che contiene i punti  $K_i$  è di ordine  $\mu < (n-1)/2$ , la dimensione di  $G$  si amplia di  $n-1-2\mu$ . Il massimo della dimensione di  $G$  è pertanto

(4) L'ultima precisazione, circa i punti coniugati dei punti  $K_i$ , è essenziale. Infatti le trasformazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{ax}{cx+d} \\ y' = \frac{ax(y+b)}{exy+fx+gy} \end{cases}$$

pur avendo tutte lo stesso centro (nel punto improprio dell'asse  $y$ ), lo stesso ordine, 3, e gli stessi due punti fondamentali (nell'origine e nel punto improprio dell'asse  $x$ ), non costituiscono gruppo: qui accade che i punti coniugati dell'origine e del punto improprio dell'asse  $x$  sono la stessa origine e lo stesso punto improprio dell'asse  $x$ .

(5) L'aggettivo generico è precisato dal seguente.

$n + 5$  ed è realizzato quando tutti i punti  $K_i$  appartengono (ad un monoide di ordine zero, cioè) all'intorno di primo ordine del punto  $O$  <sup>(6)</sup>.

Nei paragrafi seguenti dimostreremo e preciseremo questi fatti.

7. Analizziamo dapprima il caso in cui l'ordine  $n$  delle trasformazioni sia un numero *dispari* e gli  $n - 1$  punti  $K_i$  siano *generici* <sup>(7)</sup>.

Consideriamo una trasformazione  $T$  di De Jonquières, di ordine

$$m = \frac{n + 1}{2}$$

la quale abbia il centro nel punto  $O$  e tutti i suoi punti fondamentali semplici (che sono appunto  $2m - 2 = n - 1$ ) nei punti  $K_i$ .

Se trasformiamo una qualunque trasformazione  $J$  del gruppo  $G$  (definito da  $O$  e dai  $K_i$ ) mediante la trasformazione  $T$  considerata, otteniamo una proiettività che ha il punto  $O$  come unito.

Infatti l'ordine della trasformazione

$$P = T^{-1} J T$$

è (d'accordo con il lemma del paragrafo 3):

$$(2m + n - 2) - 2(n - 1) = n + 1 + n - 2 - 2n + 2 = 1,$$

e la  $P$  ha, al pari di  $T$  e  $J$ , il fascio delle rette per  $O$  come fascio unito.

Inversamente potremo scrivere

$$J = T P T^{-1}$$

e concludere, in parole, che *il gruppo  $G$  si può, in questo caso, costruire come il gruppo trasformato del gruppo  $\infty^6$  delle proiettività che lasciano fermo il punto  $O$ , mediante una (particolare) trasformazione di De Jonquières (la  $T^{-1}$ ) che ha centro in  $O$  e tutti i punti fondamentali della propria inversa nei punti  $K_i$ .*

(6) F. ENRIQUES, nei lavori citati, ha segnalato questo caso.

Ci siamo resi conto che questo non è, nel campo proiettivo, l'unico caso in cui la dimensione del gruppo risulta maggiore di 6, considerando le trasformazioni (del quarto ordine)

$$\begin{cases} x' = \frac{ax + b}{cx + d} \\ y' = \frac{(ax + b)[(a - c)x + (b - d)]y}{(ex^2 + fx + g)y + hx(x - 1)} \end{cases}$$

le quali costituiscono un gruppo continuo  $\infty^7$ , pur essendo i punti  $K_i$  (situati nell'origine, nel punto  $1,0$  e nel punto improprio dell'asse  $x$ ) tutti distinti dal centro (situato nel punto improprio dell'asse  $y$ ).

(7) Come sarà precisato al paragrafo 9, con l'aggettivo «generico» vogliamo escludere che i punti  $K_i$  siano situati su un monoide di vertice  $O$  e di ordine minore di  $(n - 1)/2$ .

8. Consideriamo ora il caso in cui, essendo sempre i punti  $K_i$  generici <sup>(8)</sup>, l'ordine  $n$  sia un numero pari: i punti  $K_i$  sono pertanto ora in numero dispari e non esiste più una  $T$  che abbia *tutti* i suoi punti fondamentali nei punti  $K_i$ .

Si può però ancora procedere in modo analogo al caso precedente considerando una  $T$ , di centro  $O$  e di ordine  $n/2$ , la quale abbia i suoi punti fondamentali in  $n-2$  (degli  $n-1$ ) punti  $K_i$ . Trasformando una trasformazione  $J$  del gruppo  $G$  mediante la  $T$ , si ottiene ora una trasformazione quadratica la quale lascia fermo, oltre al fascio delle rette per  $O$ , anche il fascio delle rette che passano per il punto  $Q$ , trasformato, per effetto della  $T$ , del residuo punto  $K_i$  (non fondamentale per la  $T$ ).

Si può ora concludere che *il gruppo  $G$  si può, in questo caso, costruire come il gruppo trasformato del gruppo  $\infty^6$  delle trasformazioni quadratiche che lasciano fermi due fasci di rette,  $O$  e  $Q$ , mediante una (particolare) trasformazione di De Jonquières (la  $T^{-1}$ ) che ha centro in  $O$ , che porti uno dei punti  $K_i$  nel punto  $Q$  e che abbia tutti i punti fondamentali della propria inversa negli altri punti  $K_i$ .*

9. Le costruzioni precedenti suppongono l'esistenza di una trasformazione  $T$  la quale ha come fondamentali tutti i punti  $K_i$ , oppure tutti meno uno quando  $n$  sia pari.

Ora si ha che:

*Una trasformazione  $T$  di De Jonquières, di centro  $O$  e di ordine  $m$ , diventa degenerare quando i suoi  $2m-2$  punti fondamentali semplici appartengono ad un monoide  $M$  (sia pure riducibile) di vertice  $O$  e di ordine*

$$\mu < m - 1,$$

*diciamo*

$$\mu = m - 1 - \alpha.$$

Infatti in tal caso, supposto che  $M$  sia spezzato in un monoide  $N$  irriducibile di ordine  $\nu$  e in  $\mu - \nu$  rette per  $O$ , si avrebbe che

$$2m - 2 - (\mu - \nu) = m + \nu - 1 + \alpha$$

punti fondamentali della  $T$  appartengono ad un monoide irriducibile  $N$ , di ordine  $\nu$  e di vertice  $O$ .

Tale monoide  $N$ , avendo con i monoidi della rete omaloidica relativa alla  $T$ , troppe intersezioni (più di  $m + \nu - 1$  fuori di  $O$ ) fa parte di tutte le curve della rete omaloidica, e la  $T$  degenera.

10. Vediamo allora come si possa costruire il gruppo continuo  $G$ , quando i punti  $K_i$  non siano generici, cioè appartengano ad un monoide  $M$  (sia pure riducibile) di ordine

$$\mu < \frac{n-1}{2}.$$

(8) Analogamente al caso precedente, con l'aggettivo *generico* vogliamo escludere che gli  $n-1$  punti  $K_i$  appartengano ad un monoide (di vertice  $O$ ) di ordine inferiore a  $n/2$ .

Il monoide  $M$  si comporrà, in generale, di un monoide irriducibile  $N$ , di ordine  $\nu$ , e di  $\mu - \nu$  rette per  $O$ .

Si può ora trovare una trasformazione  $T$  di De Jonquières (non degenerare) di ordine  $m = \mu + 1$ , la quale abbia tutti i suoi punti fondamentali coincidenti con una parte dei punti  $K_i$ : precisamente si prenderanno come punti fondamentali della  $T$  tutti i  $\mu - \nu$  punti  $K_i$  situati fuori del monoide  $N$  e altri  $\mu + \nu$  scelti arbitrariamente fra i punti  $K_i$  che si trovano su  $N$ .

Per dimostrare che una  $T$  cosiffatta non è degenerare basterà far vedere che tutti i monoidi di ordine  $\mu + 1$ , di vertice  $O$ , passanti per i punti  $K_i$  fissati (che costituiscono un sistema lineare completo di dimensione almeno due) non possono contenere come parte fissa uno stesso monoide  $F$ . Infatti in tal caso  $F$  si comporrebbe di  $N$  e di un certo numero di rette per  $O$ , perché tra le curve che soddisfano alle condizioni imposte vi è anche il monoide composto di  $M$  e di una retta per  $O$ , cioè appunto il monoide composto di  $N$  e di  $\mu - \nu + 1$  rette per  $O$ . D'altra parte tutte queste curve non possono contenere come parte fissa il monoide  $N$ , perché tali curve risulterebbero composte da  $N$ , dalle rette che da  $O$  vanno ai punti fondamentali situati fuori di  $N$  e da una retta variabile per  $O$ . Il sistema di curve che così risulta è soltanto  $\infty^1$  e non  $\infty^2$  come dovrebbe essere, almeno, date le condizioni imposte.

Trasformando, mediante la  $T$ , le trasformazioni  $J$  del gruppo  $G$ , si ottengono ora trasformazioni

$$T^{-1} J T$$

le quali hanno centro in  $O$ , ordine  $n - 2\mu$ , e hanno come *punti fondamentali fissi* gli

$$n - 2\mu - 1$$

punti trasformati, mediante la  $T$ , dei punti  $K_i$  che non sono fondamentali per la  $T$ : questi punti erano situati sul monoide  $N$  e si trasformano in punti del monoide trasformato di  $N$ , cioè in *punti dell'intorno di primo ordine del punto*  $O$ .

Analogamente ai casi precedenti possiamo concludere che il gruppo  $G$  si può ora costruire come *il gruppo trasformato delle trasformazioni di De Jonquières che hanno tutti i punti fondamentali fissi appartenenti all'intorno del primo ordine del punto*  $O$ , *mediante una* (particolare) *trasformazione di De Jonquières* (la  $T^{-1}$ ) *che ha centro in*  $O$  *e ha tutti i punti fondamentali della propria inversa situati nel maggior numero possibile* (come sopra indicato) *di punti*  $K_i$ .

II. Nei paragrafi precedenti abbiamo dato la costruzione effettiva dei gruppi continui di trasformazioni di De Jonquières: da questa costruzione si passa facilmente alla *rappresentazione analitica* dei gruppi stessi.

Secondo i risultati precedenti tutti i gruppi continui si ottengono trasformando, mediante una conveniente  $T$ ,

a) il gruppo  $\infty^6$  delle omografie che lasciano fermo un fascio di rette, O;

b) il gruppo  $\infty^6$  delle trasformazioni quadratiche che lasciano fermi due fasci di rette, O e Q;

c) il gruppo delle trasformazioni di De Jonquières di ordine  $n$  che hanno tutti gli  $n-1$  punti  $K_i$  situati nell'intorno del primo ordine del punto O.

La rappresentazione analitica dei gruppi a) e b) è del tutto ovvia. Collocando i punti O e Q rispettivamente nel punto improprio dell'asse  $y$  e dell'asse  $x$ , si ha

$$(a) \quad \begin{cases} x' = \frac{ax+b}{cx+d} \\ y' = \frac{ex+fy+g}{cx+d} \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} x' = \frac{ax+b}{cx+d} \\ y' = \frac{ey+f}{gy+h} \end{cases}$$

Per la rappresentazione analitica del gruppo c), indichiamo con

$$K(x) = 0$$

l'equazione complessiva delle  $n-1$  rette su cui sono collocati gli  $n-1$  punti  $K_i$ , situati nell'intorno di  $O = Y_\infty$ .

Una trasformazione di De Jonquières avente i punti  $K_i$  come fondamentali (per la diretta) è del tipo:

$$(I) \quad \begin{cases} x' = \frac{ax+b}{cx+d} \\ y' = \frac{yK(x) + U(x)}{(cx+d)V(x)} \end{cases}$$

ove  $U(x)$  e  $V(x)$  sono due polinomi rispettivamente di ordine  $n$  e  $n-1$ .

La proiettività nel fascio O, che indicheremo con  $\omega$ , rappresentata analiticamente dalla prima delle (I), muta il gruppo di rette

$$V(x) = 0,$$

che sono precisamente le rette che da O vanno agli altri punti fondamentali della (I), nel gruppo di rette che vanno ai punti fondamentali dell'inversa coniugati dei punti considerati, cioè proprio nelle rette

$$K(x') = 0.$$

Ciò consente di determinare, a meno di una costante, il polinomio  $V(x)$ , avendosi, con simbolo di facile intuizione,

$$V(x) = \omega^{-1} K(x') = \bar{K}(x)$$

(il gruppo di rette  $V(x) = 0$  è il trasformato, per la  $\omega^{-1}$ , del gruppo  $K(x') = 0$ ).

Siamo così in grado di precisare meglio la (1) con le formule

$$(2) \quad \begin{cases} x' = \frac{ax + b}{cx + d} \\ y' = \frac{yK(x) + U(x)}{(cx + d)\bar{K}(x)} \end{cases}$$

ed è anche facile verificare direttamente che le (2) costituiscono un gruppo continuo, dipendente da  $n + 5$  parametri ( $a, b, c, d$  e gli  $n + 1$  coefficienti di  $U$ ).

Per completare la rappresentazione analitica di tutti i gruppi  $G$  basterà, infine, rappresentare analiticamente anche una trasformazione  $T$  (di ordine  $m$ ), la quale ha tutti i suoi  $2m - 2$  punti fondamentali in certi punti dati (coincidenti tutti o in parte con i punti  $K_i$ ). Ad esempio:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{yA(x) + B(x)}{yC(x) + D(x)} \end{cases}$$

ove  $yA(x) + B(x) = 0$  e  $yC(x) + D(x) = 0$  sono due monoidi di vertice  $O = Y_\infty$ , di ordine  $m$  ed  $m - 1$ , passanti per i  $2m - 2$  punti fondamentali assegnati.

**Cosmologia.** — *Sui modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana.*

Nota (\*) di GINO ARRIGHI, presentata dal Corrisp. F. ZAGAR.

1. Riprendiamo qui le ricerche di cosmologia del prof. F. Zagar<sup>(1)</sup> condotte nell'ordine di ritenersi «prematura ed ingiustificata la sicurezza con cui si è accettata la espansione uniforme ( $\alpha$  costante nello spazio) e l'aver modellato tutte le teorie a soddisfare a questo risultato empirico, o addirittura l'aver preso questo risultato quale postulato di partenza per la teoria».

Posto, con gli stessi simboli,

$$v_1 = \alpha_1 x_1, \quad v_2 = \alpha_2 x_2, \quad v_3 = \alpha_3 x_3,$$

$$(1) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{\dot{\rho}}{\rho},$$

$$(2) \quad \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -4\pi k^2 \rho,$$

l'autore citato fornisce più classi di modelli anisotropi corrispondenti alle forme

$$\alpha_1 = v_1 \psi, \quad \alpha_2 = v_2 \psi, \quad \alpha_3 = v_3 \psi,$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1956.

(1) F. ZAGAR, *Modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana*, Note I-III, «Rendiconti Accad. Nazion. dei Lincei», ser. VIII, vol. XVIII, p. 452 e vol. XIX, pp. 13 e 217.

dove  $v_1, v_2, v_3$  sono costanti e  $\psi$  è funzione del tempo. Qui di seguito mostriamo esempi per possibilità di modelli più generali, nel senso da non doversi richiedere temporalmente costante il rapporto fra due delle  $\alpha_i$ , inoltre svilupperemo alcune considerazioni connesse con questi.

Posto

$$\alpha_1 + \alpha_2 = S, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = A, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = R,$$

per le (1), (2) deve essere

$$(3) \quad S = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \alpha_3, \quad A = \frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 - 4\pi k^2 \rho - \alpha_3^2.$$

Corrispondentemente ad una qualunque determinazione delle funzioni  $\rho (> 0)$  ed  $\alpha_3$ , in guisa che sia

$$(4) \quad 2A - S^2 = 2\frac{\dot{\rho}}{\rho} - 3\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 - 8\pi k^2 \rho - 2\frac{\dot{\rho}}{\rho} \alpha_3 - 3\alpha_3^2 = R^2,$$

con  $R$  funzione del tempo, ricaviamo ancora

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{1}{2}(S \pm R).$$

2. Si prenda, in analogia con la prima classe di soluzioni Zagar,

$$(I) \quad \rho = ct^{-2}, \quad \alpha_3 = \beta t^{-1}, \quad R = \gamma t^{-1},$$

con  $c (> 0)$  costante,  $\beta$  e  $\gamma$  funzioni del tempo. La (4) ci darà

$$3\beta^2 - 4\beta + 8\pi k^2 c + \gamma^2 = 0,$$

la quale è verificata per

$$\beta = \frac{2}{3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 6\pi k^2 c - \frac{3}{4}\gamma^2} \right)$$

dove deve essere

$$(5) \quad c < \frac{1}{6\pi k^2}, \quad \gamma^2 < \kappa^2, \quad \kappa^2 = \frac{4}{3}(1 - 6\pi k^2 c).$$

La soluzione in questo caso diventa

$$(6) \quad \alpha_1, \alpha_2 = \left( 1 - \frac{1}{2}\beta \mp \frac{1}{2}\gamma \right) t^{-1}, \quad \alpha_3 = \beta t^{-1},$$

con le condizioni precedenti (5), talché tre casi speciali di questa soluzione sono ad esempio

$$(6') \quad \gamma = a\kappa \cos \varphi(t), \quad \gamma = a\kappa e^{-\varphi(t)}, \quad \gamma = a\kappa(1 - e^{-\varphi(t)}),$$

con  $a$  costante e minore o uguale ad 1, le  $\varphi$  delle ultime due posizioni funzioni positive.

3. Si prenda, in analogia con la seconda soluzione Zagar,

$$(II) \quad \rho = c \operatorname{sen}^{-2n} \tau, \quad \alpha_3 = b \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau,$$

con  $c (> 0)$ ,  $n$ ,  $b$  costanti e  $\tau$  funzione del tempo tale che

$$\dot{\tau} = a \operatorname{sen}^{-n} \tau, \quad 0 < \tau < \pi,$$

con  $a$  costante. Avremo allora per le (3)

$$S = (2an - b) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau,$$

$$2A - S^2 = R^2 = (4a^2n + 4abn - 3b^2) \operatorname{sen}^{-2n-2} \tau \cos^2 \tau + (4na^2 - 8\pi k^2 c) \operatorname{sen}^{-2n} \tau,$$

dove con opportuna scelta delle costanti quest'ultima espressione potrà essere determinata non negativa. Quando la si effettui in guisa da avere

$$(7) \quad 4a^2n + 4abn - 3b^2 = 0,$$

e quindi

$$2A - S^2 = (4a^2n - 8\pi k^2 c) \operatorname{sen}^{-2n} \tau,$$

basterà che sia ancora

$$n > 0, \quad c \leq \frac{na^2}{2\pi k^2}.$$

La soluzione in questo caso è

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{1}{2} (2an - b) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau \pm d \operatorname{sen}^{-n} \tau, \quad \alpha_3 = b \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau,$$

con  $d > 0$  e

$$d^2 = a^2n - 2\pi k^2 c.$$

Ma dalla (7) discende

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} (n \mp \sqrt{n^2 + 3n})$$

cosicch  segue

$$\frac{1}{2} (2an - b) = \frac{1}{3} a (2n \pm \sqrt{n^2 + 3n}),$$

e quindi, corrispondendovi i segni,

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} a (2n \pm e) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau + d \operatorname{sen}^{-n} \tau \\ \alpha_2 = \frac{1}{3} a (2n \pm e) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau - d \operatorname{sen}^{-n} \tau \\ \alpha_3 = \frac{2}{3} a (n \mp e) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau \end{cases} \quad e = \sqrt{n^2 + 3n}$$

4. Se infine, in analogia con la terza soluzione Zagar, si prende

$$(III) \quad \rho = c \operatorname{Sh}^{-2n} \tau, \quad \alpha_3 = b \operatorname{Sh}^{-n-1} \tau \operatorname{Ch} \tau,$$

con  $c (> 0)$ ,  $n$ ,  $b$  costanti e  $\tau$  funzione del tempo tale che sia

$$\dot{\tau} = a \operatorname{Sh}^{-n} \tau,$$

con  $a$  costante, sarà

$$S = (2 a n - b) \operatorname{Sh}^{-n-1} \tau \operatorname{Ch} \tau$$

$$2 A - S^2 = (4 a^2 n + 4 a b n - 3 b^2) \operatorname{Sh}^{-2n-2} \tau \operatorname{Ch}^2 \tau - (4 a^2 n + 8 \pi k^2 c) \operatorname{Sh}^{-2n} \tau,$$

dove con opportuna scelta delle costanti l'ultima espressione potrà essere determinata non negativa. Quando la si effettui in guisa che si abbia

$$(9) \quad 4 a^2 n + 4 a b n - 3 b^2 = 0$$

e quindi

$$2 A - S^2 = - (4 a^2 n + 8 \pi k^2 c) \operatorname{Sh}^{-2n} \tau,$$

ciò che si può avere solo per

$$n < 0, \quad c < \frac{a^2 |n|}{2 \pi k^2},$$

risulta facilmente, intendendo per il seguito  $n$  sempre positivo, la soluzione

$$\alpha_1, \alpha_2 = -\frac{1}{2} (2 a n + b) \operatorname{Sh}^{n-1} \tau \operatorname{Ch} \tau \pm d \operatorname{Sh}^n \tau, \quad \alpha_3 = b \operatorname{Sh}^{n-1} \tau \operatorname{Ch} \tau,$$

essendo  $d (> 0)$  dato dalla relazione

$$d^2 = a^2 n - 2 \pi k^2 c,$$

ed avendosi per la (9)

$$\frac{b}{a} = -\frac{2}{3} (n \mp \sqrt{n^2 - 3n}), \quad n > 3,$$

cosicch  segue

$$(10) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} (2 a n + b) = -\frac{1}{3} a (2 n \pm \sqrt{n^2 - 3n}), \\ \alpha_1 = -\frac{1}{3} a (2 n \pm f) \operatorname{Sh}^{n-1} \tau \operatorname{Ch} \tau + d \operatorname{Sh}^n \tau, \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3} a (2 n \pm f) \operatorname{Sh}^{n-1} \tau \operatorname{Ch} \tau - d \operatorname{Sh}^n \tau, \quad \rho = c \operatorname{Sh}^{2n} \tau, \\ \alpha_3 = -\frac{2}{3} a (2 n \mp f) \operatorname{Sh}^{n-1} \tau \operatorname{Ch} \tau \quad f = \sqrt{n^2 - 3n}. \end{cases}$$

5. Per ogni tempo, con parametro  $p$ , si consideri la famiglia di quadriche (a centro) indicatrici del tensore  $\alpha_i$

$$(11) \quad \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = p,$$

avremo che il semiasse corrispondente ad un punto di una quadrica   inversamente proporzionale alla grandezza della velocit  radiale in quel punto

ed a quel tempo considerati. Per ogni tempo, con parametro  $q$ , si consideri la famiglia di quadriche (a centro) indicatrici del tensore  $\alpha_i^2$

$$\alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \alpha_3^2 x_3^2 = q,$$

avremo che ciascuna di esse è il luogo dei punti aventi uguale grandezza di velocità locale  $\sqrt{q}$  al tempo considerato. È evidente che, relativamente alla estensione formale del tensore  $\alpha_i$ , ciascuna quadrica di entrambe le famiglie sopra considerate si trasforma nel tempo non necessariamente per similitudine. Ciò che segue immediatamente considerando le (6), (8), (10). Dalle (6) per

$$\beta = \frac{2}{3} \left( 1 - \sqrt{1 - 6 \pi k^2 c - \frac{3}{4} \Upsilon^2} \right)$$

onde

$$0 < \beta < \frac{2}{3}$$

segue per le (5)

$$1 - \frac{1}{2} \beta \mp \frac{1}{2} \Upsilon > \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

e quindi  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sono concordemente positive. Dalle (8) discende che per

$$a \cos \tau > 0$$

anche

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} a (2n + \sqrt{n^2 + 3n}) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau + d \operatorname{sen}^{-n} \tau$$

è positiva, mentre

$$\alpha_3 = \frac{2}{3} a (n - \sqrt{n^2 + 3n}) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau$$

è negativa; invece per

$$a \cos \tau < 0$$

è negativa anche

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} a (2n + \sqrt{n^2 + 3n}) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau - d \operatorname{sen}^{-n} \tau,$$

mentre

$$\alpha_3 = \frac{2}{3} a (n - \sqrt{n^2 + 3n}) \operatorname{sen}^{-n-1} \tau \cos \tau$$

è negativa. Da tutto ciò discende quindi la possibilità che le quadriche (11) siano ellissoidi o iperboloidi.

**Astrofisica.** — *Una ipotesi solare* (\*). Nota (\*\*) di GIORGIO PICCARDI, presentata dal Socio G. ABETTI.

È noto che il Sole si muove in direzione della costellazione di *Ercole*, con moto praticamente uniforme e rettilineo, e che, contemporaneamente, la Terra ruota attorno al Sole. Dalla combinazione di questi due movimenti risulta che la Terra segue, *rispetto alla Galassia*, un'orbita *elicoidale*. Il moto della Terra ha dunque componenti nelle tre direzioni dello spazio.

Da ciò si deduce facilmente, in base a dati noti <sup>(1)</sup>:

- 1° In marzo, la Terra si muove nel suo piano equatoriale.
- 2° In settembre, la Terra si muove *quasi* lungo il proprio asse.
- 3° La velocità della Terra varia durante l'anno ed è massima in marzo e minima in settembre.
- 4° La Terra si muove coll'emisfero nord in avanti, ad eccezione di un breve periodo del marzo.

Queste considerazioni non avrebbero alcuna importanza dal punto di vista fisico, qualora lo spazio fosse vuoto ed esente da campi. Ma se lo spazio non fosse né vuoto, né esente da campi, come infatti non lo è in realtà, occorrerebbe prender in considerazione la eventualità di effetti fisici, dipendenti dal moto elicoidale della Terra, ed il loro periodico ricorrere nel corso del tempo.

Come tutti sanno, lo spazio interstellare non è vuoto. Vagano in esso immense nuvole di materia ionizzata, pulviscolo e particelle solide. Né è esente da campi. A parte l'esistenza di un campo generale galattico, altri campi vi si possono stabilire, perché i moti della materia interstellare generano dei campi magnetici, fissi alla materia medesima, i così detti *campi gelati* (Alfvén <sup>(2)</sup>).

Non è allora indifferente che un corpo magnetico, avvolto in un'atmosfera di cariche elettriche e ruotante, quale è la Terra, si muova entro un campo, in una direzione od in un'altra, e con varia velocità.

Non è neanche indifferente che questo corpo vada ad urtare la materia dispersa nello spazio, quasi sempre coll'emisfero nord. Questo deve portare una dissimmetria nelle condizioni dell'emisfero nord e dell'emisfero sud, che è nulla a marzo ed è massima in settembre. Che l'incontro della Terra con le particelle solide esistenti nello spazio porti delle conseguenze apprezzabili, è stato recentissimamente mostrato dal Bowen <sup>(3)</sup>, in base a certi

(\*) Lavoro effettuato nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Firenze.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1956.

(1) *Apice* standard del moto del Sole:  $\alpha = 270^\circ$ ,  $\delta = 30^\circ$ . Velocità standard del Sole 19-20 km/sec. Velocità della Terra 30 km/sec.

(2) H. ALFVÉN, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford, 1953.

(3) E. G. BOWEN, «Nature», 177, 1121 (1956).

suoi studi sulla piovosità, in relazione al passaggio dei vari sciame di meteoriti.

Troverei giustificato, allora, il pensare che le proprietà dello spazio in cui viviamo, mutino periodicamente nel corso del tempo e che il volger delle

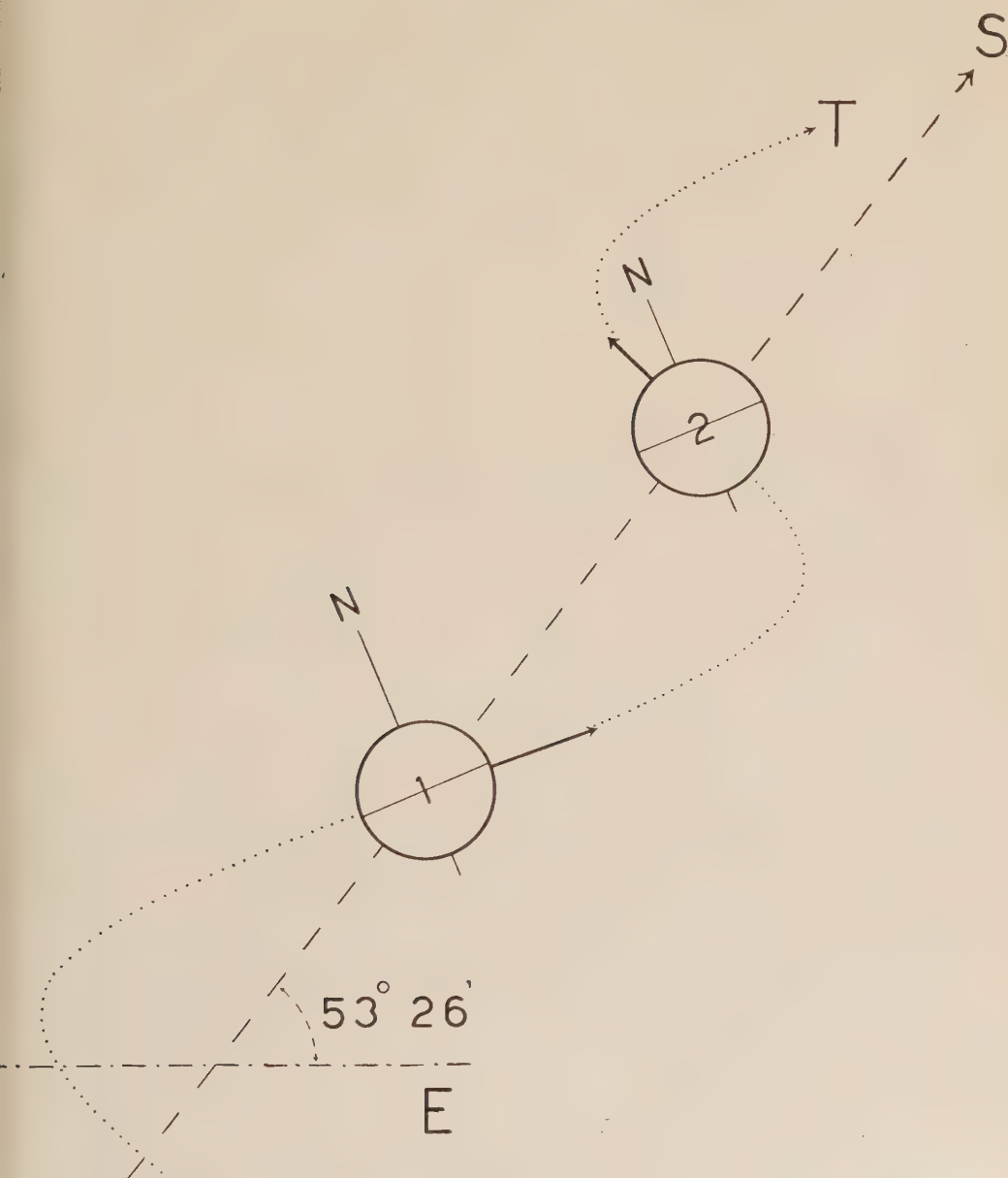


Fig. 1. - Orbita elicoidale della Terra.

moti la direzione del moto della Terra (rispetto alla Galassia) in marzo (1) ed in settembre (2), indicata dalle frecce. In marzo la velocità lineare è circa il doppio di quella in settembre. E piano dell'eclittica visto di profilo; S = direzione del moto del Sole; T = orbita elicoidale della Terra; N = direzione del polo N.

stagioni abbia un senso fisico più profondo di quel che non si sia immaginato fin'ora.

Vorrei accennare, a questo punto, che il problema della riproducibilità dei risultati delle nostre esperienze, è collegato a quello della variabilità delle condizioni generali dello spazio.

A queste considerazioni io ero giunto studiando certi fenomeni nuovi, sui quali è inutile oggi il riferire, proprio per spiegarmi certi andamenti annuali con minimo a marzo. Ma l'*ipotesi solare* che oggi presento, può esistere anche come idea a sé stante, senza riferimento ai miei dati sperimentali, ed è per questo che in forma abbreviatissima e senza produrre particolari, io ho pensato di riferirne su questi « Rendiconti ».

Calcoli precisi sull'orbita elicoidale della Terra, sono in corso presso l'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

La figura 1 mostra in proiezione l'orbita elicoidale e le direzioni del moto della Terra in marzo ed in settembre.

**Fisica matematica.** — *Il metodo variazionale di Levine e Schwinger, applicato agli schermi a conduttività unidirezionale.* Nota (\*) di GIULIANO TORALDO DI FRANCIA, presentata dal Socio A. SIGNORINI.

§ 1. — È stato considerato recentemente il problema di un'onda elettromagnetica, che investe uno schermo piano, capace di condurre la corrente in una sola direzione <sup>(1)</sup>. È un problema di valori al contorno, che dipende da un'equazione integrodifferenziale piuttosto complicata. Vale quindi la pena di cercare dei metodi di soluzione approssimata.

Per esempio, un metodo siffatto, per il caso dei conduttori ordinari, è stato sviluppato da Levine e Schwinger <sup>(2)</sup> con i loro principi variazionali. Questi principi hanno trovato molteplici applicazioni negli ultimi anni, dando ottimi risultati. Si è quindi pensato non fosse inutile indicare in qual modo il metodo possa essere applicato agli schermi unidirezionali.

Levine e Schwinger e vari altri autori che hanno applicato i loro principi, hanno fatto esteso uso di integrali impropri divergenti. Questo procedimento non è raccomandabile, perché non chiarisce la legittimità e la validità dei risultati. In questo lavoro, seguendo l'esempio di Bouwkamp <sup>(3)</sup>, verranno eliminate le divergenze, in modo da dare preciso significato a tutti gl'integrali.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1956.

(1) G. TORALDO DI FRANCIA, *Equazioni integrodifferenziali e principio di Babinet per gli schermi a conduttività unidirezionale*, « Rend. Acc. Naz. Linc. », 20, 476 (1956).

(2) H. LEVINE e J. SCHWINGER, *On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane Screen*, « Phys. Rev. », 74, 958 (1948); 75, 1423 (1949).

(3) C. J. BOUWKAMP, *Diffraction Theory, a Critique of Some Recent Developments*, New York University Mathematics Research Group, Rep. No EM-50 (1953).

§ 2. — Riferiamoci agli assi cartesiani  $x, y, z$ , di versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Lo schermo piano infinitamente sottile  $\Sigma$  occupi una porzione tutta al finito del piano  $xy$  ed abbia conduttività unidirezionale (infinita) parallelamente all'asse  $x$ . Detto  $\mathbf{E}^i$  il campo elettrico incidente e  $I(P)\mathbf{i}$  la densità superficiale di corrente indotta su  $\Sigma$ , si è mostrato nel primo articolo citato che  $I$  obbedisce alla seguente equazione integrodifferenziale

$$(1) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x_P^2} + k^2 \right) \iint_{\Sigma} I(Q) G(P, Q) d\Sigma_Q = \frac{ik}{Z} E_x^i(P)$$

dove  $P$  e  $Q$  sono punti di  $\Sigma$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onde,  $Z$  è l'impedenza intrinseca dello spazio e  $G(P, Q)$  è definita da

$$(2) \quad G(P, Q) = \frac{\exp(ik|P-Q|)}{4\pi|P-Q|}.$$

È sottinteso il fatto temporale  $\exp(-i\omega t)$  <sup>(4)</sup>.

Si è anche accennato a come si può ridurre l'ordine della differenziazione nella (1), imponendo alla  $I$  un'opportuna condizione all'orlo di  $\Sigma$ . Per gli ordinari schermi a conduttività onnidirezionale vale la condizione che all'orlo sia nulla la componente della corrente normale all'orlo stesso. È naturale ammettere che la stessa condizione valga anche per gli schermi unidirezionali, come, del resto, può apparire necessario all'intuizione fisica. Ne consegue allora che, all'orlo di  $\Sigma$ , la  $I$  è nulla in tutti i punti in cui l'orlo non è parallelo all'asse  $x$ . Valendosi di questa condizione, si ottiene successivamente

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_P^2} \iint_{\Sigma} I(Q) G(P, Q) d\Sigma_Q &= - \frac{\partial}{\partial x_P} \iint_{\Sigma} I(Q) \frac{\partial}{\partial x_Q} G(P, Q) d\Sigma_Q = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_P} \iint_{\Sigma} G(P, Q) \frac{\partial}{\partial x_Q} I(Q) d\Sigma_Q = \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_P} G(P, Q) \frac{\partial}{\partial x_P} I(Q) d\Sigma_Q \end{aligned}$$

Il passaggio dal secondo al terzo integrale si ha effettuando un'integrazione per parti e osservando che l'integrale di linea che ne deriva è nullo. Quanto all'inversione della derivazione con l'integrazione, s'intende che l'integrale venga valutato escludendo prima un cerchio attorno a  $P$  e facendo poi tendere a zero il raggio. Si può allora constatare facilmente che il limite dell'integrale esiste anche dopo l'inversione <sup>(5)</sup>. Sostituendo con la (3) nella (1), si ha

$$(4) \quad \iint_{\Sigma} \left( k^2 G I + \frac{\partial G}{\partial x_P} \frac{\partial I}{\partial x_Q} \right) d\Sigma_Q = \frac{ik}{Z} E_x^i(P)$$

(4) Nell'articolo precedente era sottinteso invece il fattore  $\exp(i\omega t)$ . Pertanto nelle relative formule va cambiato  $i$  in  $-i$ .

(5) Per la giustificazione rigorosa di questo procedimento, che non può esser riportata qui, perché piuttosto lunga, si vedano le *Lezioni sulla teoria della diffrazione elettromagnetica*, tenute dall'autore al corso « Propagazione delle onde elettromagnetiche » del Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Varenna, agosto 1956.

dove è sottinteso che  $G$  sia funzione di  $P, Q$  e  $I$  sia funzione di  $Q$ . La (4) è l'equazione integrodifferenziale corrispondente a quella data da Maue<sup>(6)</sup> per il caso della conduttività onnidirezionale.

§ 3. Valendosi del potenziale vettore, si trova facilmente che il campo elettrico irradiato da  $\Sigma$  in un punto generico  $P'$  è dato da

$$(5) \quad \mathbf{E}(P') = Z \left( -\frac{1}{ik} \text{grad}_{P'} \text{div}_{Q'} + ik \right) \iint_{\Sigma} I(P) \mathbf{i} G(P, P') d\Sigma_P.$$

Se  $P'$  si allontana indefinitamente dallo schermo nella direzione  $\mathbf{s}'$  (versore), si ha che  $G(P, P')$  tende ad assumere la forma

$$(6) \quad G(P, P') \rightarrow \frac{\exp(ikR)}{4\pi R} \exp[-ik\mathbf{s}' \cdot (P - O)]$$

dove  $O$  è un punto qualsiasi dello schermo e  $R$  è la distanza di  $P'$  da  $O$ . Sostituendo nella (5) e sviluppando alcuni calcoli, si giunge all'espressione

$$(7) \quad \mathbf{E}(P') = Z ik (\mathbf{i} - \mathbf{s}'\mathbf{s}' \cdot \mathbf{i}) \frac{\exp(ikR)}{4\pi R} \iint_{\Sigma} I(P) \exp[-ik\mathbf{s}' \cdot (P - O)] d\Sigma_P$$

che vale a meno d'infinitesimi d'ordine superiore a  $1/R$ . Si tratta di un'onda sferica, la cui ampiezza nella direzione  $\mathbf{s}'$ , che per ora chiameremo  $\mathbf{E}(\mathbf{s}')$ , è data da

$$(8) \quad \mathbf{E}(\mathbf{s}') = \frac{ikZ}{4\pi} (\mathbf{i} - \mathbf{s}'\mathbf{s}' \cdot \mathbf{i}) \iint_{\Sigma} I(P) \exp[-ik\mathbf{s}' \cdot (P - O)] d\Sigma_P.$$

§ 4. Specificheremo ora il campo incidente, supponendo che si tratti di un'onda piana che si propaghi nella direzione  $\mathbf{s}'$ . Porremo precisamente

$$(9) \quad \mathbf{E}^i(P) = \mathbf{a}' \exp[ik\mathbf{s}' \cdot (P - O)].$$

Ammetteremo poi che  $\mathbf{a}'$  sia un versore complesso. Ciò significa che  $\mathbf{a}' = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$  con  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  reali e che  $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}'^* = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = 1$ . Con ciò ammettiamo che la polarizzazione sia ellittica<sup>(7)</sup>. Naturalmente  $\mathbf{a}'$  sarà anche perpendicolare a  $\mathbf{s}'$ , cioè dovremo porre  $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{s}' = 0$ . Dato poi un qualsiasi vettore complesso  $\mathbf{V}$ , diremo che  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{a}'^*$  rappresenta la componente di  $\mathbf{V}$  rispetto ad  $\mathbf{a}'$ .

Sostituendo la (9) nella (4), sia ha

$$(10) \quad \iint_{\Sigma} \left( k^2 G I_{s'a'} + \frac{\partial G}{\partial x_P} \frac{\partial I_{s'a'}}{\partial x_Q} \right) d\Sigma_Q = \frac{ik}{Z} \mathbf{i} \cdot \mathbf{a}' \exp[ik\mathbf{s}' \cdot (P - O)]$$

(6) A. W. MAUE, *Zur Formulierung eines allgemeinen Beugungsproblems durch eine Integralgleichung*, « Z. Phys », 126, 601 (1949).

(7) Vedi, per esempio G. TORALDO DI FRANCA, *Onde elettromagnetiche* (Bologna, 1953), p. 142 e sgg.

dove con la notazione  $I_{s'a'}$ , si vuole specificare che si tratta della corrente indotta dal campo incidente (9).

Sia ora  $I_{s''a''}$  la corrente che verrebbe indotta su  $\Sigma$ , qualora il campo incidente fosse caratterizzato dai versori  $\mathbf{s''}$ ,  $\mathbf{a''}$  anziché da  $\mathbf{s'}$ ,  $\mathbf{a'}$ . Moltiplicando ambo i membri della (10) per  $I_{s''a''}$  e integrando su tutto lo schermo, si ottiene

$$(11) \quad \iint_{\Sigma} d\Sigma_P \iint_{\Sigma} d\Sigma_Q \left[ k^2 I_{s''a''}(P) G(P, Q) I_{s'a'}(Q) + I_{s''a''}(P) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial x_P} \frac{\partial I_{s'a'}(Q)}{\partial x_Q} \right] = \\ = \frac{ik}{Z} \mathbf{i} \cdot \mathbf{a'} \iint_{\Sigma} I_{s''a''}(P) \exp[ik\mathbf{s'} \cdot (P - O)] d\Sigma_P.$$

D'altra parte, se indichiamo con  $E(\mathbf{s'}, \mathbf{a'}; \mathbf{s''}, \mathbf{a''})$  la componente secondo  $\mathbf{a'}$  dell'ampiezza diffratta all'infinito nella direzione  $\mathbf{s'}$ , quando il campo incidente è caratterizzato dai versori  $\mathbf{s''}$ ,  $\mathbf{a''}$ , si ha dalla (8)

$$(12) \quad E(\mathbf{s'}, \mathbf{a'}; \mathbf{s''}, \mathbf{a''}) = \frac{ikZ}{4\pi} \mathbf{i} \cdot \mathbf{a'^*} \iint_{\Sigma} I_{s''a''}(P) \exp[-ik\mathbf{s'} \cdot (P - O)] d\Sigma_P.$$

Questa equazione dimostra che, a meno di un fattore, il secondo membro della (11) rappresenta  $E(-\mathbf{s'}, \mathbf{a'^*}; \mathbf{s''}, \mathbf{a''})$ . Quanto al primo membro della (11), il secondo termine dell'integrando può subire un'integrazione per parti rispetto a  $P$  e l'integrale di linea che ne risulta è nullo. Si ottiene così

$$(13) \quad \iint_{\Sigma} d\Sigma_P \iint_{\Sigma} d\Sigma_Q \left( k^2 I_{s''a''} I_{s'a'} - \frac{\partial I_{s''a''}}{\partial x_P} \frac{\partial I_{s'a'}}{\partial x_Q} \right) G(P, Q) = \frac{4\pi}{Z^2} E(-\mathbf{s'}, \mathbf{a'^*}; \mathbf{s''}, \mathbf{a''})$$

dove si è sottinteso che  $I_{s''a''}$  sia funzione di  $P$  e  $I_{s'a'}$  di  $Q$ .

Il primo membro della (13) non muta, evidentemente, quando si scambino contemporaneamente  $\mathbf{s'}$  con  $\mathbf{s''}$  e  $\mathbf{a'}$  con  $\mathbf{a''}$ . Altrettanto avverrà del secondo membro e si otterrà la relazione di reciprocità

$$(14) \quad E(-\mathbf{s'}, \mathbf{a'^*}; \mathbf{s''}, \mathbf{a''}) = E(-\mathbf{s''}, \mathbf{a''^*}; \mathbf{s'}, \mathbf{a'})$$

o anche, cambiando  $\mathbf{s'}$  in  $-\mathbf{s'}$  e  $\mathbf{a'}$  in  $\mathbf{a'^*}$

$$(15) \quad E(\mathbf{s'}, \mathbf{a'}; \mathbf{s''}, \mathbf{a''}) = E(-\mathbf{s''}, \mathbf{a''^*}; -\mathbf{s'}, \mathbf{a'^*}).$$

Formiamo il prodotto dei due membri della (15) ed esprimiamolo per mezzo della (12); dividiamo poi l'equazione così ottenuta per  $E(\mathbf{s'}, \mathbf{a'}; \mathbf{s''}, \mathbf{a''})$  espressa mediante la (13) e teniamo conto della relazione di reciprocità. Si ottiene così

$$(16) \quad E(\mathbf{s'}, \mathbf{a'}; \mathbf{s''}, \mathbf{a''}) = \\ = \frac{-\frac{k^2}{4\pi} \mathbf{i} \cdot \mathbf{a'^*} \iint_{\Sigma} I_{s''a''} \exp[-ik\mathbf{s'} \cdot (P - O)] d\Sigma_P \mathbf{i} \cdot \mathbf{a''} \iint_{\Sigma} I_{-s'a'^*} \exp[ik\mathbf{s''} \cdot (Q - O)] d\Sigma_Q}{\iint_{\Sigma} d\Sigma_P \iint_{\Sigma} d\Sigma_Q \left( k^2 I_{s''a''} I_{-s'a'^*} - \frac{\partial I_{s''a''}}{\partial x_P} \frac{\partial I_{-s'a'^*}}{\partial x_Q} \right) G(P, Q)}.$$

Questa espressione di  $E$  è stazionaria rispetto a variazioni indipendenti di  $I_{s'a''}$  e  $I_{-s'a''}$ , effettuate attorno ai loro valori esatti e soggette anche esse alla condizione al contorno imposta alla corrente. Infatti, si dia una siffatta variazione, per esempio a  $I_{-s'a''}$ . Il primo integrale al numeratore della (16) non varierà e, per la (12), è esprimibile mediante la  $E$ . Allora, moltiplicando la (16) per il denominatore del secondo membro, che chiameremo  $\Delta$  ed effettuando la variazione, si ottiene

$$(17) \quad \Delta \delta E + E \delta \Delta = \frac{ik}{Z} E \mathbf{i} \cdot \mathbf{a}'' \iint_{\Sigma} \delta I_{-s'a''} \exp [ik \mathbf{s}'' \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{O})] d\Sigma_Q.$$

Per effettuare la variazione di  $\Delta$ , si può prima eseguire l'integrazione per parti analoga, ma inversa a quella che dal primo membro della (11) ci ha condotti al primo membro della (13). Con ciò la (17) diviene

$$(18) \quad \frac{\Delta \delta E}{E} = \iint_{\Sigma} \delta I_{-s'a''} d\Sigma_Q \left\{ - \iint_{\Sigma} \left( k^2 G I_{s'a''} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial G}{\partial x_Q} \frac{\partial I_{s'a''}}{\partial x_P} \right) d\Sigma_P + \frac{ik}{Z} \mathbf{i} \cdot \mathbf{a}'' \exp [ik \mathbf{s}'' \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{O})] \right\}$$

e il secondo membro è nullo in virtù della (10). Dunque si ha  $\delta E = 0$  e l'espressione (16) è stazionaria.

§ 5. L'espressione stazionaria (16) può servire a trovare soluzioni approssimate, partendo da espressioni della corrente che si presume siano vicine a quelle esatte. E a questo proposito è molto utile il fatto che il secondo membro della (16) è omogeneo di ordine zero rispetto alle correnti, così che si può fare a meno di preoccuparsi di un fattore di scala.

In particolare, ci si può valere della (16) per trovare la sezione di *scattering*  $\sigma$  di  $\Sigma$ . È noto infatti che si ha <sup>(8)</sup>

$$(19) \quad \sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im } E(\mathbf{s}', \mathbf{a}'; \mathbf{s}', \mathbf{a}')$$

Per esempio, studiamo il caso di un'onda incidente perpendicolarmente allo schermo e polarizzata linearmente nella direzione  $x$ ; avremo allora  $\mathbf{s}' = \mathbf{k}$   $\mathbf{a}' = \mathbf{i}$ . Supponiamo poi che la lunghezza d'onda sia molto grande rispetto allo schermo e utilizziamo per la corrente la sua approssimazione quasi statica. Dalla (10) si vede facilmente che per  $k \rightarrow 0$  la corrente tende a divenire puramente immaginaria; inoltre risulta che nel nostro caso le due correnti da sostituire nella (16) hanno un valore comune, che chiameremo  $I$ . Allora, sviluppando  $G(P, Q)$  in serie di potenze di  $|P - Q|$ , sostituendo nella (16)

(8) Questa relazione viene di solito dimostrata per i conduttori perfetti. Ma essa ha validità generale. Vedi: G. TORALDO DI FRANCA, *On the Cross-Section Theorem for Electromagnetic Waves*, «Pubbl. Ist. Naz. Ottica», N. 721.

utilizzando la (19) ed effettuando alcune integrazioni per parti, si giunge a trovare con facile calcolo, che omettiamo, che la parte principale di  $\sigma$  è data da

$$(20) \quad \sigma = \frac{3}{8} \pi k^4 \frac{\left( \iint_{\Sigma} I(P) d\Sigma_P \right)^4}{\left( \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} \frac{\partial I(P)}{\partial x_P} \frac{\partial I(Q)}{\partial x_Q} \frac{d\Sigma_P d\Sigma_Q}{|P-Q|} \right)^2}.$$

Nel caso di un disco circolare di raggio  $a$  molto piccolo, è stato trovato<sup>(9)</sup> che la corrente è proporzionale a  $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . Sostituendo nella (20) ed effettuando le integrazioni, si arriva a scrivere

$$(21) \quad \sigma = \frac{128}{27 \pi} k^4 a^6$$

d'accordo con il risultato trovato per altra via nell'articolo citato.

**Fisica.** — *Determinazione dell'intensità assoluta di deboli sorgenti di  $^{226}_{88}\text{Ra}$  e  $^{228}_{90}\text{Th}$  (\*)*. Nota<sup>(\*\*)</sup> di FRANCESCA DEMICHELIS, presentata dal Socio E. PERUCCA.

La misura della intensità assoluta  $I$  di una data quantità di un nuclide radioattivo può essere ottenuta, con buona approssimazione, per mezzo del metodo delle coincidenze<sup>(1)</sup>.

Per intensità radioattiva (di una data quantità) del nuclide considerato si intende il numero al secondo di disintegrazioni (*disintegration rate*) caratteristiche di detto nuclide, avvenute nella quantità data del nuclide in studio.

Sono condizioni essenziali, per l'applicazione di questo metodo, la conoscenza dello schema di decadimento del nuclide radioattivo e una accurata conoscenza del suo periodo di dimezzamento.

Misurazioni di date sorgenti di  $^{60}_{27}\text{Co}$ ,  $^{24}_{11}\text{Na}$ , ... hanno dato i valori della intensità  $I$  con una approssimazione di  $\pm 2\%$ <sup>(2)</sup>.

Scopo della presente ricerca è di estendere il metodo delle coincidenze a deboli sorgenti di  $^{226}_{88}\text{Ra}$  e  $^{228}_{90}\text{Th}$ , cioè a nuclidi appartenenti a famiglie

(9) G. TORALDO DI FRANCA, *Electromagnetic Cross Section of a Small Circular Disc with Unidirectional Conductivity*, « Nuovo Cimento », 3, 1276 (1956).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Torino.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1956.

(1) J. V. DUNWORTH, « Rev. Sc. Inst. », II, 167 (1940); J. L. PUTMAN, « Brit. J. Radiol. », 23, 46 (1950).

(2) W. E. PERRY, *Proceeding of a Symposium held at the National Physical Laboratory*, London, 1951.

radioattive naturali, purchè in equilibrio con i loro prodotti di decadimento.

Già in altra sede <sup>(3)</sup> ho indicato con quali accorgimenti il metodo delle coincidenze possa venire esteso al caso di nuclidi appartenenti a famiglie radioattive naturali e precisamente al caso del  $^{226}_{88}\text{Ra}$ .

È infatti possibile ottenere la misura della intensità assoluta della sorgente di  $^{226}_{88}\text{Ra}$ , purchè in equilibrio con i suoi prodotti di decadimento, grazie alla possibilità di agire sulle radiazioni di uno solo dei suoi prodotti di decadimento.

Una possibilità, in parte analoga, si ha per il  $^{228}_{90}\text{Th}$ .

# 1. SORGENTI DI $^{226}_{88}\text{Ra}$ .

Tra i prodotti di decadimento del  $^{226}_{88}\text{Ra}$  vi è il  $^{214}_{83}\text{Bi}$  che dà luogo, per emissione  $\beta$  a  $^{214}_{84}\text{Po}$  eccitato. Tutti i raggi  $\gamma$  emessi dagli stati eccitati del  $^{214}_{84}\text{Po}$  hanno energia  $> 0,60$  MeV, mentre gli altri prodotti di decadimento del  $^{226}_{88}\text{Ra}$  emettono raggi  $\gamma$  aventi energia  $<$  di  $0,40$  MeV. Il  $^{214}_{84}\text{Po}$  emette particelle  $\alpha$  di energia  $7,68$  MeV; tutte le particelle  $\alpha$  emesse dagli altri prodotti di decadimento del  $^{226}_{88}\text{Ra}$  hanno energia  $\leq 5,99$  MeV.

Di conseguenza sia i raggi  $\gamma$  emessi dal  $^{214}_{84}\text{Po}$  eccitato, sia le particelle  $\alpha$  emesse dallo stato fondamentale del  $^{214}_{84}\text{Po}$ , possono facilmente venire isolate dalle altre radiazioni.

Poiché il periodo di dimezzamento del  $^{214}_{84}\text{Po}$  è  $T = 1,63 \cdot 10^{-4}$  sec, è possibile applicare il metodo delle coincidenze (coincidenze  $\gamma - \alpha$ ) alla misurazione della intensità assoluta di sorgenti di  $^{226}_{88}\text{Ra}$ .

Tra gli eventi contati dal dispositivo a coincidenze sono « coincidenze buone » ad unità di tempo  $n_b$  quelle tra un raggio  $\gamma$  emesso dal  $^{214}_{84}\text{Po}$  eccitato e la successiva particella  $\alpha$  emessa dallo stato fondamentale del  $^{214}_{84}\text{Po}$ . Questa coincidenza è contata se avviene entro il tempo  $2\tau$  di risoluzione del circuito a coincidenze.

Vi sono anche « coincidenze accidentali » ad unità di tempo  $n_a$  tra un raggio  $\gamma$  e una particella  $\alpha$  emessi da nuclei differenti. È:

$$n_b = I(1 - e^{-\lambda\tau})\epsilon_a \sum p_i \epsilon_{i\gamma}$$

$$n_a = 2\tau I^2 \epsilon_a \sum p_i \epsilon_{i\gamma}$$

(3) Il 21 febbraio 1955 ho consegnato all'Accademia dei Lincei un plico suggellato contenente l'indicazione di tale possibilità per il caso del  $^{226}_{88}\text{Ra}$  e il risultato di una prima serie di misurazioni. Queste ultime avevano portato a conclusioni non del tutto soddisfacenti e di non facile interpretazione; la ricerca fu perciò segnalata nella forma suddetta.

La ricerca fu proseguita, anche in collaborazione con il dott. G. R. Bishop che qui ringrazio vivamente, ed essa ha permesso una rielaborazione delle conclusioni esposta nella presente Nota. Sono anche riconoscente ai proff. Trabacchi e Ageno per l'interesse preso alle mie esperienze.

Ringrazio infine i dott. B. Chinaglia e R. A. Ricci, che mi hanno aiutato nella condotta delle esperienze.

dove:

$2\tau$  è il tempo di risoluzione del circuito a coincidenze;

$I$  è l'intensità della sorgente,

$\varepsilon_\alpha$  è l'efficienza totale del ricevitore  $\alpha$ ,

$\Sigma p_i$  è il numero totale di raggi  $\gamma$  ad ogni disintegrazione  $\alpha$  del  $^{226}_{88}\text{Ra}$ ,  
ciascun  $p_i$  riferendosi al raggio monocromatico  $i^{\text{mo}}$ ,

$\varepsilon_{i\gamma}$  è la efficienza del ricevitore per il raggio  $\gamma$  monocromatico  $i^{\text{mo}}$   
del  $^{214}_{84}\text{Po}$ ,

$\lambda = 0,693/T$  è la costante radioattiva e  $T$  il periodo di dimezzamento  
del  $^{214}_{84}\text{Po}$ .

Risulta:

$$(1) \quad \frac{n_b}{n_a} = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{2\tau I}.$$

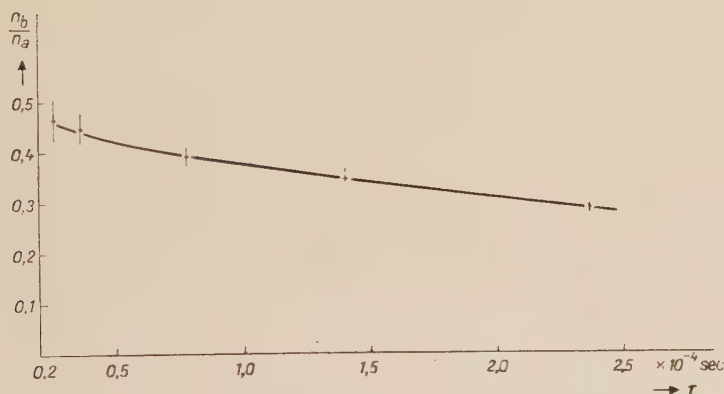


Fig. 1. - Determinazione dell'intensità assoluta di deboli sorgenti di  $^{226}_{88}\text{Ra}$ .

Questa formula che, in unità coerenti, non presenta alcun coefficiente spurio è particolarmente adatta allo scopo di questa ricerca. Essa costituisce una funzione dalla quale, noto  $n_b/n_a$  in funzione di  $\tau$  dall'esperienza, si può ricavare  $\lambda$  e  $I$  col metodo dei minimi quadrati. Il metodo può dare, così, entrambe queste grandezze e non soltanto  $I$ .

Rinviando ad altra sede i dettagli sperimentali, segnalo soltanto che il tempo di risoluzione del circuito a coincidenze veniva fatto variare da  $\tau = 0,26 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$  a  $\tau = 2,37 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$ .

In fig. 1, relativa alla sorgente in studio, sono rappresentati i valori sperimentali di  $n_b/n_a$  con i relativi errori probabili, in funzione di  $\tau$ . La curva è quella ottenuta col metodo dei minimi quadrati.

Si ottiene

$$(2) \quad \begin{cases} I = (0,1275 \pm 0,0056) \mu \text{c}, \\ T = 0,693/\lambda = (1,61 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ sec}. \end{cases}$$

Il valore di  $T$  così ottenuto è in buon accordo con i valori già indicati da altri Autori <sup>(4)</sup>, in particolare con quello ottenuto da Von Dardel.

Sono state anche fatte misure di coincidenze tra le particelle  $\beta$  del  $^{214}_{83}\text{Bi}$  e le particelle  $\alpha$  del  $^{214}_{84}\text{Po}$ .

Le coincidenze buone ad unità di tempo sono:

$$n_b = I (1 - e^{-\lambda\tau}) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$$

dove  $\varepsilon_\beta$  è l'efficienza totale del ricevitore  $\beta$ . Le coincidenze accidentali ad unità di tempo possono avvenire tra una qualsiasi particella  $\beta$  o del  $^{214}_{83}\text{Bi}$  o del  $^{214}_{82}\text{Pb}$  e del  $^{210}_{83}\text{Bi}$  e una particella  $\alpha$  del  $^{214}_{84}\text{Po}$ .

Poiché la sorgente usata per le misure è stata preparata da 3,2 anni, le particelle  $\beta$  del  $^{210}_{83}\text{Bi}$  risultano essere presenti nella frazione del 9,5 % dell'intensità della sorgente. Risulta quindi:

$$n_a = 2\tau I \varepsilon_\alpha \cdot 2,095 I \varepsilon_\beta = 4,19 \tau I^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta,$$

da cui;

$$(3) \quad \frac{n_b}{n_a} = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{4,19 \tau I}.$$

Anche con questa serie di misure si potrebbe ottenere sia  $\lambda$  sia  $I$ ; ma noi l'abbiamo utilizzata soltanto a determinare  $I$  per controllo: ammesso noto  $\lambda = 0,963/T$  dalle (2), si è ritrovato lo stesso valore di  $I$  relativo alle coincidenze  $\gamma - \alpha$  e indicato in (2).

Ciò, mentre conferma l'attendibilità dei procedimenti usati, serve anche a provare che non esistono entro gli errori del nostro dispositivo sperimentale, stati eccitati del  $^{214}_{84}\text{Po}$  aventi vita media maggiore di  $10^{-4}$  sec.

## 2. SORGENTI DI $^{228}_{90}\text{Th}$ .

Tra i prodotti di decadimento del  $^{228}_{90}\text{Th}$  vi è il  $^{212}_{83}\text{Bi}$  che dà luogo, per emissione  $\beta$ , a  $^{212}_{84}\text{Po}$  eccitato.

Il  $^{212}_{84}\text{Po}$  emette particelle  $\alpha$  di energia 8,776 MeV. Tutte le particelle  $\alpha$  emesse dagli altri prodotti di decadimento del  $^{228}_{90}\text{Th}$  hanno energia  $\leq 6,774$  MeV. Poiché il periodo di dimezzamento del  $^{212}_{84}\text{Po}$  è  $T = 3,0 \cdot 10^{-7}$  sec è possibile applicare il metodo delle coincidenze (coincidenze  $\beta - \alpha$ ) alla misura della intensità assoluta della sorgente di  $^{228}_{90}\text{Th}$ , se in equilibrio.

(4) J. V. DUNWORTH, « Nature », 144, 152 (1939); J. ROTBLAT, « Nature », 144, 248 (1939); J. ROTBLAT, « Proc. Roy. Soc. », 177 A, 260 (1941); A. G. WARD, « Proc. Roy. Soc. », 181 A, 183 (1942); J. C. JACOBSEN e Th. SIGURGEIRSSON, « Det. Kgl. Danske Vid. », 20, 11 (1943); R. ROWLANDS, « Nature », 160, 191 (1947); D. E., BUNYAN, A. LUNDBY, A. H. WARD, D. WALKER, « Proc. Phys. Soc. », 61, 300 (1948); G. VON DARDEL, « Phys. Rev. », 79, 734 (1951); R. BALLINI, « Annales de Physique », 12, 8, 441 (1953); M. LAPORTE, « Le Journ. de Phys. et le Radium », 16, 11, 53 (1955).

Tra gli eventi contati dal dispositivo a coincidenze sono coincidenze buone  $n_b$  ad unità di tempo le coincidenze tra una particella  $\beta$  del  $^{212}_{83}\text{Bi}$  e la successiva particella  $\alpha$  emessa dallo stato fondamentale del  $^{212}_{84}\text{Po}$ . Le particelle  $\alpha$  di questa disintegrazione possono essere isolate, analogamente al caso I e sono le uniche rivelate dalle coincidenze.

Sono accidentali le coincidenze tra una qualsiasi particella  $\beta$  o del  $^{212}_{83}\text{Bi}$  o del  $^{208}_{81}\text{Tl}$  o del  $^{212}_{82}\text{Pb}$  e una particella  $\alpha$  emessa dal  $^{214}_{84}\text{Po}$ .

È

$$n_b = f I (1 - e^{-\lambda\tau}) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$$

$$n_a = 2 \tau \cdot 2 I \varepsilon_\beta \cdot f I \varepsilon_\alpha$$

dove  $f$  è la frazione di  $^{212}_{83}\text{Bi}$  che si disintegra per emissione  $\beta$  in  $^{212}_{84}\text{Po}$ . Quindi si ha:

$$(4) \quad \frac{n_b}{n_a} = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{4 \tau I}.$$

In questo caso  $\tau$  veniva fatto variare da  $0,70 \cdot 10^{-7}$  sec a  $2,67 \cdot 10^{-7}$  sec, sicché, come nel caso I si ottiene una curva sperimentale  $n_b/n_a$  in funzione di  $\tau$  (v. fig. 2); da essa si possono dedurre  $\lambda$  e  $I$ .

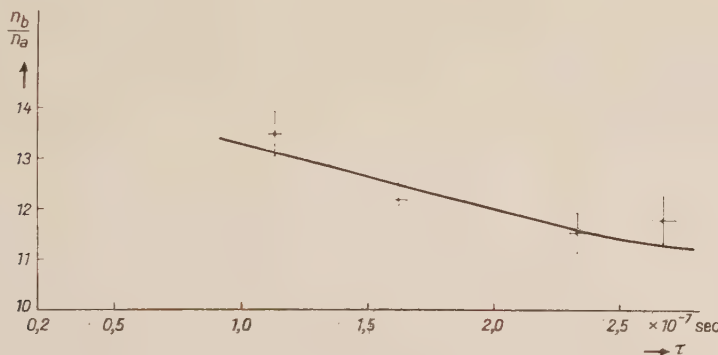


Fig. 2. - Determinazione dell'intensità assoluta di deboli sorgenti di  $^{228}_{90}\text{Th}$ .

Per la sorgente di  $^{228}_{90}\text{Th}$  usata risulta:

$$(5) \quad \begin{cases} I = (1,055 \pm 0,065) \mu\text{c}, \\ T = 0,693/\lambda = (2,99 \pm 0,15) \cdot 10^{-7} \text{ sec}. \end{cases}$$

Il valore di  $T$  così ottenuto è in buon accordo con i valori oggi accettati<sup>(5)</sup>. Si ritiene che il dispositivo possa dare risultati più approssimati se i conteggi saranno opportunamente prolungati.

(5) J. V. DUNWORTH, « Nature », 144, 152 (1939); H. BRADT, e P. SCHERRER, « Helv. Phys. Acta », 16, 259 (1943); J. V. JELLEY, « Can. J. Research », 26 A, 255 (1948); J. M. HILL, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 44, 440, 1948; F. W. VAN NAME Jr., « Phys. Rev. », 75, 100 (1949); D. E. BUNYAN, A. LUNDBY, D. WALKER, « Proc. Phys. Soc. », 62 A, 253 (1949).

Sono possibili anche misurazioni di coincidenze  $\gamma - \alpha$ ; ma esse obbediscono a formule ben più complesse e non utilizzabili allo scopo della presente ricerca.

### 3. CONCLUSIONI.

La misurazione della intensità assoluta di sorgenti di  $^{226}_{88}\text{Ra}$  può essere compiuta sia mediante le coincidenze  $\gamma - \alpha$ , sia mediante le coincidenze  $\beta - \alpha$ ; è consigliabile il primo caso.

Per le sorgenti di  $^{228}_{90}\text{Th}$  occorre invece compiere misurazioni di coincidenze  $\beta - \alpha$ .

Il metodo segnalato può venire applicato con successo a sorgenti di  $^{226}_{88}\text{Ra}$  dell'ordine di  $0,01 \div 0,1 \mu\text{c}$  o meno e a sorgenti di  $^{228}_{90}\text{Th}$  dell'ordine di  $1 \div 10 \mu\text{c}$  o meno. Solo entro questi limiti il rapporto  $n_b/n_a$  evita valori così prossimi allo zero da rendere grossolana l'approssimazione dei risultati.

Ringrazio vivamente il prof. E. Perucca per il costante aiuto e interessamento in questa ricerca.

**Chimica fisica.** — *Del « Polimorfismo molecolare ». Punto di trasformazione e di fusione dello Solfo in nitrobenzolo<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di ENZO FERRONI e GABRIELLA GABRIELLI, presentata dal Socio L. ROLLA.*

La tensione superficiale di una soluzione di un composto polimorfo enantiotropo, decresce con la temperatura in modo regolare fino nella prossimità del punto di trasformazione. Nell'intervallo intorno a detta temperatura, la tensione superficiale presenta degli scostamenti evidenti. Superato detto intervallo, la tensione superficiale riprende a decrescere con la temperatura in modo regolare. Gli scostamenti dalla linearità, nell'intorno del punto di trasformazione, risultano maggiori coll'aumentare della concentrazione. Questo fu già da noi dimostrato<sup>(1)</sup>.

Si è voluto ora verificare se la tensione superficiale di una soluzione acquista un valore particolare in corrispondenza del punto di fusione della sostanza disciolta.

Uno studio analogo fu condotto da C. Montemartini e L. Losana<sup>(2)</sup>. Gli Autori effettuarono misure di densità sia su soluzioni che su sospensioni, mediante una bilancia idrostatica registratrice da loro stessi ideata.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica della Università di Firenze.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1956.

(1) E. FERRONI, « Gazzetta Chimica Italiana » (in corso di stampa); E. FERRONI e G. GABRIELLI, « Gazzetta Chimica Italiana » (in corso di stampa).

(2) « Notiziario Chimico Industriale », 1, 205 (1926).

Noi non abbiamo creduto opportuno riprendere le esperienze degli Autori citati, in quanto volevamo focalizzare il nostro studio sullo strato superficiale, proprio per quel minore grado di libertà che le molecole adsorbite ivi posseggono.

Quale soluto si è adottato lo Solfo, anche per la notorietà del suo polimorfismo.

Quale solvente, occorreva un liquido di bassa tensione di vapore e con un punto di ebollizione ovviamente superiore al punto di fusione del soluto. Fra i tanti abbiamo scelto il nitrobenzolo.

La misura della tensione superficiale veniva effettuata con il metodo dell'anello usufruendo del tensiometro G. P. <sup>(3)</sup> in uso nel nostro Istituto.

La soluzione in esame veniva posta in una vaschetta con intercapedine. In quest'ultima circolava il liquido di un ultratermostato. La temperatura delimitata dal vertex, veniva definita da un termometro al decimo immerso nella soluzione in esame.

TABELLA I.

| Temp. °C | dine/cm | Temp. °C | dine/cm | Temp. °C | dine/cm |
|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 81       | 40,14   | 96       | 37,74   | 111      | 33,60   |
| 82       | 39,71   | 97       | 37,46   | 112      | 33,40   |
| 83       | 39,29   | 98       | 37,18   | 113      | 33,33   |
| 84       | 38,87   | 99       | 36,90   | 114      | 34,71   |
| 85       | 38,45   | 100      | 36,61   | 115      | 35,49   |
| 86       | 38,02   | 101      | 36,33   | 116      | 36,19   |
| 87       | 37,60   | 102      | 36,05   | 117      | 36,76   |
| 88       | 37,18   | 103      | 35,77   | 118      | 37,18   |
| 89       | 36,77   | 104      | 35,49   | 119      | 37,74   |
| 90       | 36,33   | 105      | 35,21   | 120      | 36,33   |
| 91       | 36,47   | 106      | 34,92   | 121      | 35,98   |
| 92       | 37,04   | 107      | 34,67   | 122      | 35,63   |
| 93       | 37,60   | 108      | 34,36   | 123      | 35,28   |
| 94       | 38,19   | 109      | 34,15   | 124      | 34,92   |
| 95       | 38,70   | 110      | 33,90   | 125      | 34,57   |

(3) G. PICCARDI, Brevetto Italiano, N. 462316, 18 febbraio 1950, 9 marzo 1951.

Si è controllato dapprima come la tensione superficiale del nitrobenzolo vari con la temperatura, ritrovando la legge lineare ben nota; dopodiché si sono cimentate soluzioni di diversa concentrazione di Solfo in nitrobenzolo. Nella Tabella I, si riportano i valori della tensione superficiale apparente, in funzione della temperatura, per la soluzione all'1 %.

Nel grafico (curva continua) i valori della Tabella I.

TABELLA II.

| Temp. °C | dine/cm | Temp. °C | dine/cm |
|----------|---------|----------|---------|
| 86       | 30,14   | 93       | 29,78   |
| 87       | 29,76   | 94       | 30,30   |
| 88       | 29,39   | 95       | 30,77   |
| 89       | 29,04   | 96       | 29,92   |
| 90       | 28,65   | 97       | 29,67   |
| 91       | 28,77   | 98       | 29,42   |
| 92       | 29,28   | 99       | 29,18   |
|          |         | 100      | 28,92   |

I valori riportati sono quelli letti direttamente sul tensiometro e pertanto non corretti secondo W. Harkins e H. Jordan<sup>(4)</sup>. Nel calcolo della correzione va introdotta la densità del liquido; la quale è pur essa una grandezza funzione della temperatura. Poteva allora darsi il caso che la densità variesse con la temperatura in modo tale, che la tensione superficiale corretta risultasse ancora una funzione lineare della temperatura.

Questo nostro dubbio è stato fugato completamente dall'evidenza dei fatti. Variazioni di densità nella quarta cifra decimale, lasciano praticamente inalterato il valore del fattore di correzione; per cui in conseguenza all'applicazione delle correzioni di Harkins e Jordan, i valori corretti della tensione superficiale, risultano *uniformemente traslati*. Le caratteristiche formali del grafico restano perciò le stesse.

Nella Tabella II, si riportano, a titolo di esempio, i valori della tensione superficiale corretta, nell'intorno del punto di trasformazione (nel grafico curva tratteggiata).

Come si vede, ancora una volta, è possibile ritrovare, sempre in base a misure di tensione superficiale, sia il punto di trasformazione sia il punto di fusione del soluto.

(4) « J. Am. Chem. Soc. », 52, 1751 (1930).

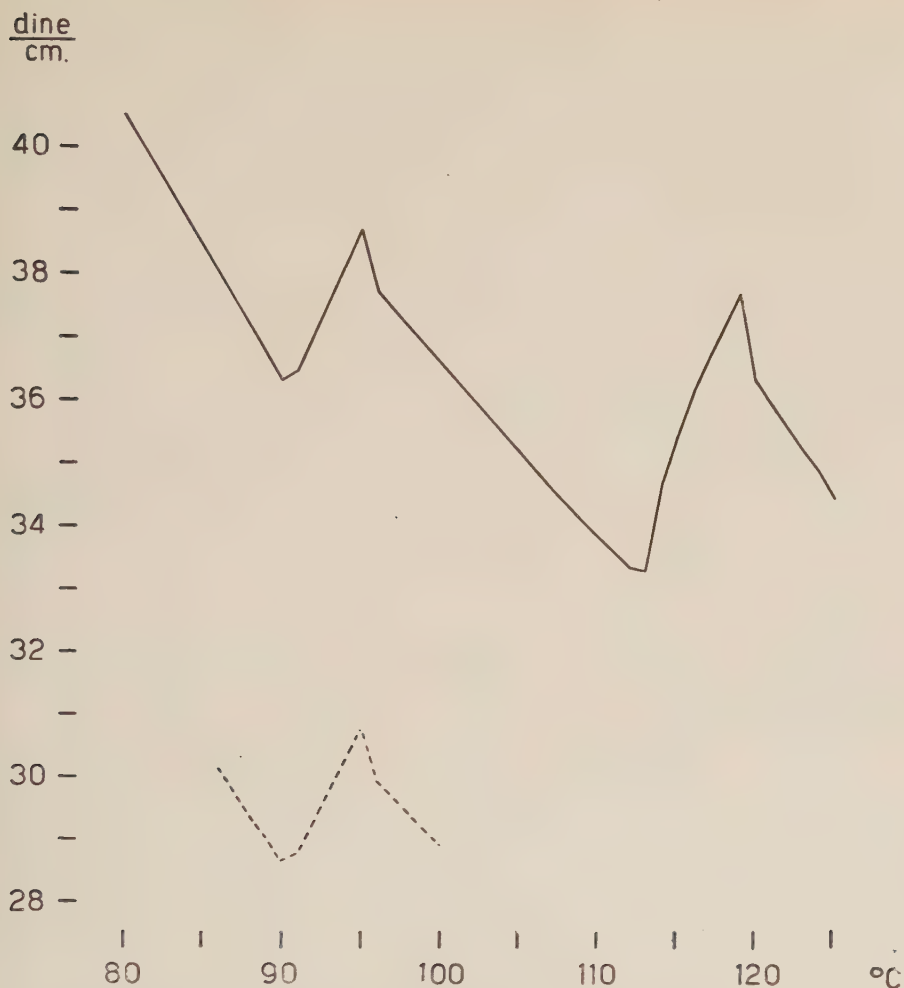


Fig. 1. - Tensione superficiale di una soluzione di Solfo all'1 % in nitrobenzolo, in funzione della temperatura.

Curva continua: tensione superficiale apparente.

Curva tratteggiata: tensione superficiale corretta.

L'imponente variazione che si è registrata nel caso particolare delle soluzioni di Solfo, nell'intorno del punto di fusione, è stata poi riscontrata per numerosi altri composti, quali ad esempio fenantrene in decaidronaftalina, antracene in decaidronaftalina, alfa-naftilammina in tetracloruro di carbonio.

Il numero e la riproducibilità delle esperienze ci permettono di affermare che alle temperature corrispondenti ai cambiamenti di fase (trasformazione polimorfa e fusione) la tensione superficiale acquista un valore massimo.

Al Direttore, prof. G. Piccardi, rinnoviamo i nostri più vivi ringraziamenti per i preziosi consigli datici.

**Chimica fisica.** — *Del « Polimorfismo molecolare ». Soluzioni di naftalina in toluolo* (\*). Nota (\*\*) di ENZO FERRONI, GABRIELLA GABRIELLI e CARLA MICHELI, presentata dal Socio L. ROLLA.

Si è già visto che la tensione superficiale di una soluzione decresce linearmente coll'aumentare della temperatura fino nei pressi (circa 4°C) del punto di fusione (o di trasformazione) del soluto, quindi risale, raggiunge il suo massimo alla temperatura di fusione (o di trasformazione) del soluto ed infine riprende a decrescere linearmente (1).

Questi fatti ci sembrano particolarmente significativi.  $d\sigma/dT$  rappresenta, com'è noto, l'entropia superficiale media. E che questa, anche in soluzione, cambi addirittura di segno ed assuma un valore singolare, in corrispondenza del punto di fusione (o di trasformazione) ci è sembrata cosa degna di attenzione.

Riteniamo utile ripetere, anche se sottolineato più volte, che i nostri risultati sono conseguenti all'aver prescelto, fra le varie grandezze dipendenti dalla temperatura, la tensione superficiale.

I fenomeni di adsorbimento (nel caso di composti tensioattivi) provocano, com'è noto, un'ordinamento molecolare all'interfaccia. In tale ordinamento le molecole adsorbite posseggono un grado di libertà assai inferiore di quello presentato « in » soluzione. La tensione superficiale che è intimamente connessa coll'energia di tale ordinamento, poteva apparire la grandezza più adatta per indagare se « lo stato di soluzione » distrugga completamente o no « l'individualità del soluto ».

Questo tema non è che un aspetto dello studio sulla struttura dello stato liquido, su cui hanno puntato valorosi e numerosi Autori.

Soluzioni di naftalina in toluolo e più precisamente al 20, 10,4 e 2%, furono cimentate da C. Montemartini e L. Losana (2). Gli Autori posero in evidenza, in base ai valori registrati dalla bilancia idrostatica, come l'andamento densità-temperatura presentasse un arresto rispettivamente a 67°C per la soluzione al 20%, a 63°C per quella al 10%, a 58°C per quella al 4% ed infine a 48°C per quella al 2%. Gli Autori conclusero « nessuno di questi arresti è in corrispondenza del punto di fusione (80°C) della naftalina; se ne scostano tanto di più, quanto più la soluzione è diluita ».

Noi abbiamo ripreso il caso delle soluzioni di naftalina in toluolo con misure di tensione superficiale.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica della Università di Firenze.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1956.

(1) E. FERRONI e G. GABRIELLI, questi « Rendiconti ».

(2) « Notiziario Chimico Industriale », I, 205 (1926).

TABELLA I.

| Temperatura (°C) | Tensione superficiale corretta (dine/cm) |       |       |       |
|------------------|--|-------|-------|-------|
|                  | 20 %                                     | 10 %  | 4 %   | 2 %   |
| 40               | 30,02                                    | 29,18 | 25,75 | 23,24 |
| 42               | 29,55                                    | 28,70 | 25,50 | 23,04 |
| 44               | 29,10                                    | 28,20 | 25,32 | 22,84 |
| 46               | 28,63                                    | 27,76 | 25,00 | 22,51 |
| 48               | 28,19                                    | 27,29 | 24,70 | 22,34 |
| 50               | 27,78                                    | 26,83 | 24,42 | 22,12 |
| 52               | 27,33                                    | 26,36 | 24,23 | 21,91 |
| 54               | 26,72                                    | 25,89 | 23,91 | 21,64 |
| 56               | 26,37                                    | 25,41 | 23,57 | 21,49 |
| 58               | 25,89                                    | 24,95 | 23,23 | 21,33 |
| 60               | 25,30                                    | 24,47 | 22,88 | 21,06 |
| 62               | 24,84                                    | 24,11 | 22,53 | 20,89 |
| 64               | 24,37                                    | 23,66 | 22,18 | 20,70 |
| 66               | 23,89                                    | 23,22 | 21,89 | 20,40 |
| 68               | 23,42                                    | 22,82 | 21,59 | 20,28 |
| 70               | 22,95                                    | 22,38 | 21,23 | 20,08 |
| 71               | 22,74                                    | 22,16 | 21,15 | 19,97 |
| 72               | 22,50                                    | 22,00 | 21,01 | 19,88 |
| 73               | 22,15                                    | 21,82 | 20,90 | 19,78 |
| 74               | 22,09                                    | 21,65 | 20,85 | 19,67 |
| 75               | 22,23                                    | 21,46 | 20,78 | 19,52 |
| 76               | 22,78                                    | 22,02 | 20,67 | 19,44 |
| 77               | 23,77                                    | 22,75 | 21,04 | 19,55 |
| 78               | 24,69                                    | 23,67 | 21,28 | 19,79 |
| 79               | 25,56                                    | 24,28 | 21,60 | 20,02 |
| 80               | 26,30                                    | 24,89 | 21,86 | 20,25 |
| 81               | 25,45                                    | 24,17 | 21,43 | 19,75 |
| 82               | 25,35                                    | 23,94 | 21,31 | 19,60 |
| 83               | 25,18                                    | 23,70 | 21,20 | 19,50 |
| 84               | 25,02                                    | 23,46 | 21,09 | 19,37 |
| 85               | 24,85                                    | 23,24 | 20,97 | 19,27 |

Com'è noto, il tensiometro fornisce soltanto il valore della massima trazione applicata all'anello o tensione superficiale apparente. Per raggiungere la tensione superficiale effettiva ci siamo valse della equazione di H. Zuidema e G. Watres<sup>(3)</sup> perché i fattori di correzione di Harkin e Jordan non erano stati calcolati per le nostre densità.

Nella Tabella I, si riportano i valori della tensione superficiale corretta, delle soluzioni di naftalina in toluolo.

Nel grafico sono diagrammati i valori riportati.

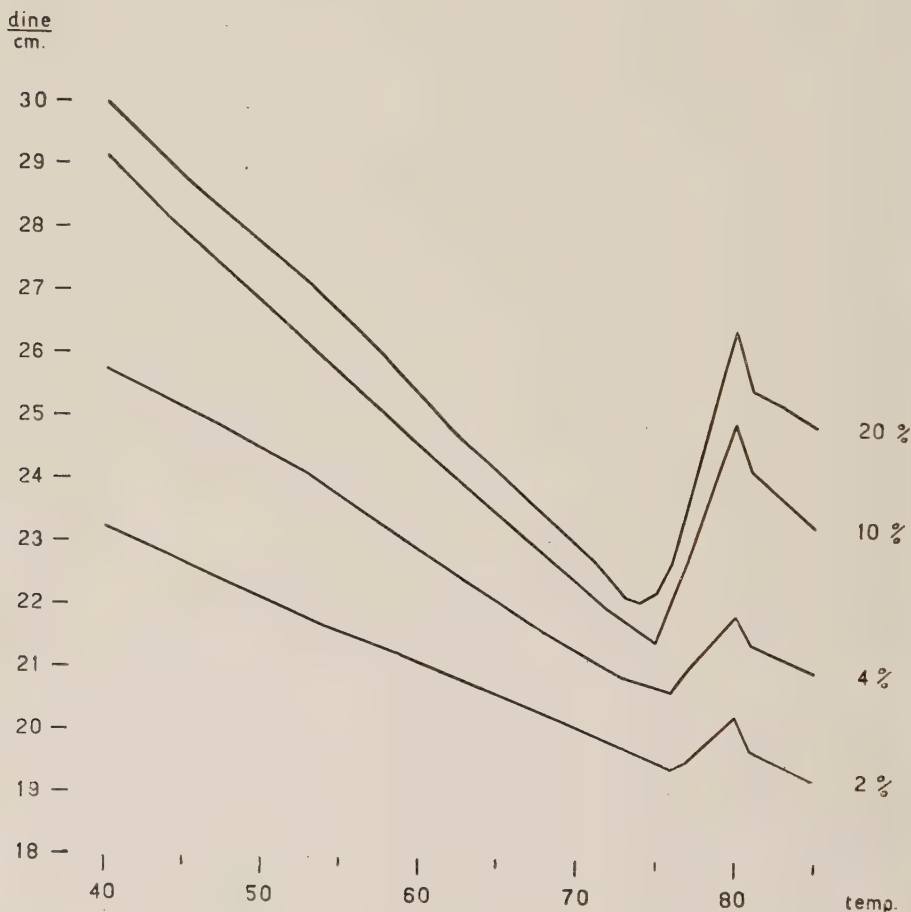


Fig. 1. - Tensione superficiale di soluzioni di naftalina in toluolo in funzione della temperatura.

Da ciò si deduce: La tensione superficiale decresce regolarmente con la temperatura fino nei pressi ( $4^{\circ}\text{C}$ ) del punto di fusione; risale fino a raggiungere il suo valore massimo a  $80^{\circ}\text{C}$  (punto di fusione della naftalina) e ciò *indipendentemente* dalla concentrazione, a differenza di quanto trovato da C. Montemartini e L. Losana con misure di densità.

Risultano invece *dipendenti* dalla concentrazione:

(3) « Ind. Eng. Chem. An. Ed. », 13, 312 (1941).

- a) la pendenza  $d\sigma/dT$ , ovvero l'entropia superficiale, con la quale la tensione superficiale decresce fino a circa  $4^\circ\text{C}$  prima della temperatura di fusione.
- b) la pendenza  $d\sigma/dT$ , con la quale viene raggiunto il massimo, alla temperatura di fusione.
- c) la pendenza  $d\sigma/dT$ , con la quale la tensione superficiale decresce, oltrepassata la temperatura di fusione.

TABELLA II.

| Concentrazione | $d\sigma/dT$ (I) | $\Delta\sigma$ (II) | (I)/(II) |
|----------------|------------------|---------------------|----------|
| 20 %           | 0,89             | 5,82                | 0,153    |
| 10 %           | 0,71             | 4,59                | 0,154    |
| 4 %            | 0,30             | 1,96                | 0,153    |
| 2 %            | 0,19             | 1,29                | 0,155    |

Si è potuto altresì constatare: la pendenza  $b$ ) è ricavabile dai valori riportati in Tabella I. L'incremento  $\Delta\sigma$  della tensione superficiale, in corrispondenza del punto di fusione, è facilmente ricavabile, essendo l'estremo superiore la tensione superficiale misurata a  $80^\circ\text{C}$  e l'estremo inferiore la tensione superficiale calcolata in base alla pendenza  $a$ ). Si è potuto riscontrare una relazione lineare fra  $d\sigma/dT$  ed i  $\Delta\sigma$  corrispondenti. Vedi Tabella II.

Gli Autori rinnovano i loro più vivi ringraziamenti al Direttore professor G. Piccardi, per i preziosi consigli dati.

**Chimica.** — *Studio spettrofotometrico nell'infrarosso di alcuni derivati del 4-metil-3,5-dicarbetossi-pirrolo* <sup>(\*)</sup>. Nota di MARISA SCROCCO e RODOLFO NICOLAUS, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

In una precedente Nota <sup>(1)</sup> venne studiata con spettrofotometria I. R. ed U. V. una serie di acidi pirrolici con speciale riferimento ai fenomeni di coniugazione dei C=O carbossilici con l'anello pirrolico in relazione anche all'azione esercitata sull'eteroatomo dalla posizione e la elettroaffinità dei sostituenti.

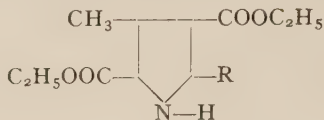
Poiché questa azione può essere messa meglio in evidenza da misure di variazione di frequenza della vibrazione dell'N—H e da concomitanti

(\*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Generale e Inorganica e di Chimica Organica e presso il Centro di Chimica Generale del C.N.R. dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) Questi « Rendiconti ».

determinazioni di costanti di ionizzazione acida  $pK_a$  abbiamo esteso lo studio ad una serie di pirroli di formula generale



la cui molecola, pur essendo alquanto complessa, presenta una indentità base che rende possibile una discussione comparativa.

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella.

#### DISCUSSIONE.

Dall'esame comparativo dei dati infrarossi ottenuti su pirroli sostituiti a confronto con quelli già noti del pirrolo puro, risulta evidente che in soluzione i composti sostituiti presentano lo stesso sdoppiamento di banda nella vibrazione dell' $\text{N}-\text{H}$  che si trova nel pirrolo e che i valori di frequenza di queste bande sono notevolmente diversi da quelli del pirrolo non sostituito. Lo sdoppiamento di banda può essere attribuito, per il valore di frequenza più alto, ad una vibrazione dell' $\text{N}-\text{H}$  libero da associazioni intermolecolari e per quello più basso ad una vibrazione di associazione.

La sostanziale differenza nella posizione delle bande che, nei pirroli sostituiti, troviamo abbassate di 100-200 numeri d'onda rispetto a quelle del pirrolo non sostituito deve essere invece attribuita, per la vibrazione che abbiamo chiamata libera, ad una diversa situazione energetica nella quale viene a trovarsi l'anello pirrolico e che è necessariamente sentita dall' $\text{N}-\text{H}$ ; mentre per la vibrazione associata, il cui valore di frequenza varia abbastanza sensibilmente nei vari termini della serie, è da supporre che intervenga oltre ad una associazione di carattere intermolecolare, una perturbazione di carattere intramolecolare.


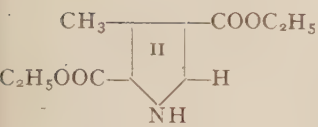
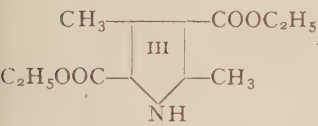
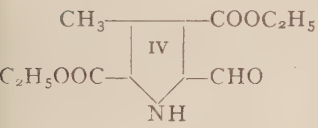
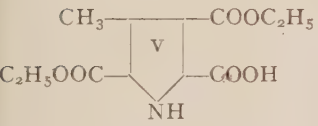
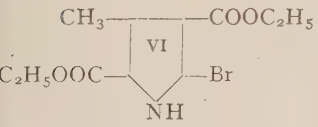
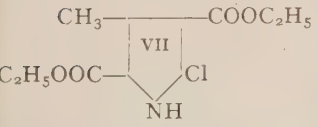
Questa banda, infatti, a diluizioni fortissime in qualche caso non scompare mai completamente ma si sposta leggermente verso le basse frequenze.

Nelle nostre misure è stato giocoforza tenersi sempre a concentrazioni molto basse per la debole solubilità in tetracloruro di carbonio delle sostanze studiate e, per questa ragione, non si sono potute fare delle misure comparative in funzione della diluizione che fossero veramente probative.

Nelle soluzioni esaminate la banda di vibrazione dell' $\text{N}-\text{H}$  libero è sempre poco intensa, mentre l'altra, più marcata, diminuisce con la diluizione fino ad un valore basso abbastanza costante.

È probabile ritenere che nel leggero abbassamento di frequenza attribuito al termine associato che non scompare con la diluizione, vi sia un debole effetto di chelazione del  $\text{C}=\text{O}$  dell'estere con l'eteroatomo.

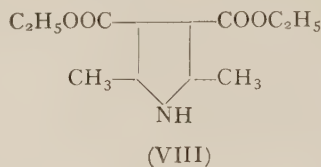
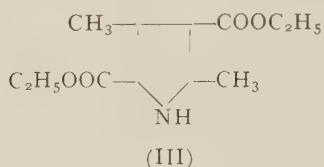
TABELLA.

| Formula   | $\nu_{\text{N-H}} \text{ cm}^{-1}$ |                              | $\Delta\nu_{\text{N-H}}$<br>in soluz. | $pK_a$              |
|---|------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|---------------------|
|   | Sost. pura                         | Soluz. $\text{CCl}_4$        |                                       |                     |
| <br>I    | 3417                               | 3505<br>3417                 | 88                                    | 16,5 <sup>(1)</sup> |
| <br>II    | 3310                               | 3463<br>3305                 | 158                                   | 13,1                |
| <br>III   | 3276                               | 3465<br>3312                 | 153                                   | 13,4                |
| <br>IV   | 3280                               | 3447<br>3312                 | 135                                   | —                   |
| <br>V   | 3263                               | 3446<br>p. n. <sup>(2)</sup> | —                                     | —                   |
| <br>VI  | 3244                               | 3456<br>3260                 | 196                                   | 10,5                |
| <br>VII | 3207                               | 3456<br>3252                 | 204                                   | 10,2                |

(1) Mc EWEN, \* J. Amer. Chem. Soc., 58, 1124 (1936).

(2) p. n. = poco netto.

Tale interpretazione sembrerebbe avvalorata dai dati relativi al 4-metil-3,5-dicarbetossi-pirrolo (II) e dal confronto di (III) con l'isomero (VIII)



appositamente preparato secondo la ben nota sintesi di Knor, da cui risulta per (VIII), esaminato allo stato solido, un valore di  $3333 \text{ cm}^{-1}$  invece dei  $3276 \text{ cm}^{-1}$  di (III). Si è potuto notare che questa banda che abbiamo chiamata di associazione non scompare, in genere, quando  $\text{R}=\text{H}$ ,  $\text{CH}_3$ ,  $\text{Br}$ ,  $\text{Cl}$ , mentre scompare o, data la bassissima concentrazione delle soluzioni, non compare affatto, quando  $\text{R}=\text{—CHO}$ ,  $\text{—COOCH}_3^{(2)}$ ,  $\text{—COOH}$ .

Sulle sostanze (IV) e (V) non si sono potute effettuare misure di  $pK_a$  con il nostro metodo; per questo esse non compaiono nella curva da noi tracciata riportando i valori di  $\Delta\nu$  calcolati in confronto con i valori di  $pK_a$  dei quali passiamo a discutere.

In questo lavoro, infatti, si vuol mettere in evidenza soprattutto l'influenza che i sostituenti in posizione 2 hanno sull'eteroatomo e che, in relazione al loro valore di elettroaffinità, provocano la stabilizzazione della struttura di risonanza propria dell'anello pirrolico:



con conseguenti addensamenti di carica positiva sull'azoto che vengono sentiti dal carattere del legame  $\text{N—H}$  il quale si orienta sempre più verso forme polari.

Naturalmente tale supposizione, data la complessità della molecola, ha carattere puramente qualitativo ed accettabile solo se si tiene conto della identità base della molecola nei vari termini della serie. I composti (VI) e (VII) si sciolgono facilmente in  $\text{NaOH}$  dando sali che hanno la caratteristica di essere poco solubili in acqua e sono quindi anche facilmente isolabili<sup>(3)</sup>.

Nell'infrarosso tali diverse condizioni energetiche sono segnalate dalla frequenza « associata », la quale si abbassa passando da un valore di  $3312 \text{ cm}^{-1}$  per il  $\text{CH}_3$  sostituito ad un valore di  $3252 \text{ cm}^{-1}$  per il  $\text{Cl}$  sostituito. La  $\Delta\nu$  che si calcola tra i valori di frequenza associata e non associata passa da 88

(2) Questa sostanza non è riportata nella tabella perché tuttora oggetto di studio.

(3) NICOLAUS e MANGONI, « Gazz. Chim. Ital. », 85, 1378 (1955).

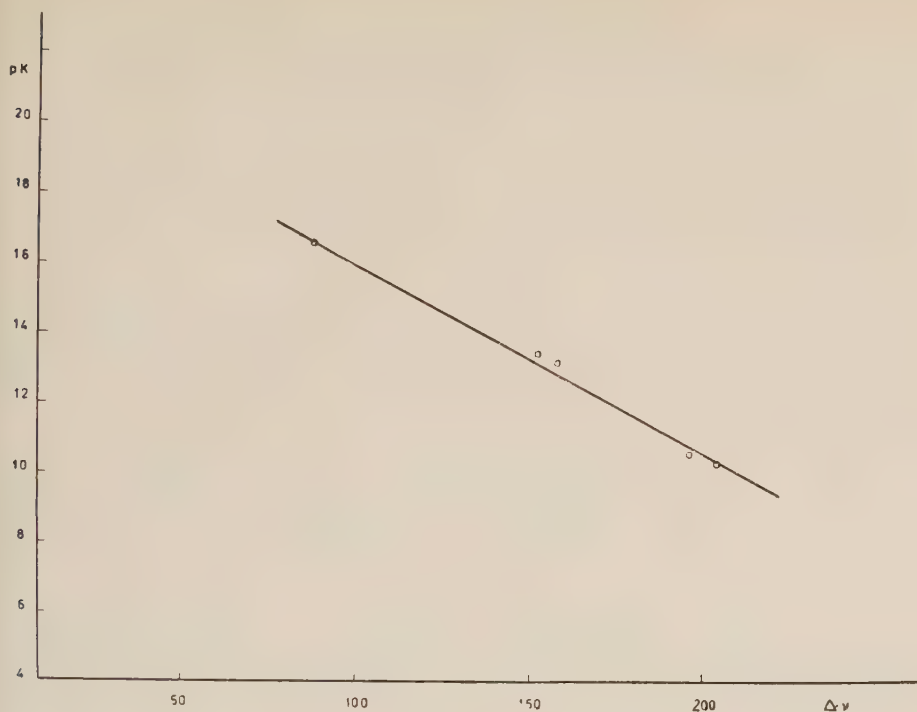


Fig. 1.

numeri d'onda per il pirrolo puro a 204 numeri d'onda per l'ultimo termine della serie.

Un'osservazione analoga è stata fatta da Fuson e Josien<sup>(4)</sup> per la serie: pirrolo, indolo, carbazolo, difenilamina, anilina. Per questi autori i quali hanno avuto la possibilità di confrontare i valori di  $\Delta\nu$  con troppo pochi valori paralleli di  $pK_a$ , la discussione è rimasta un po' su un piano qualitativo.

Dalle nostre esperienze resta confermata l'osservazione che la  $\Delta\nu$  tra bande associate e non associate aumenta con l'acidità e si conferma inoltre (Bernal, 1940)<sup>(5)</sup> che una forte acidità dell'N—H imminico comporta un forte legame idrogeno. Se si esprimono infatti i valori di  $\Delta\nu$  misurati in funzione delle costanti di ionizzazione acida, i punti si dispongono con sufficiente regolarità su una retta (fig. 1).

## PARTE SPERIMENTALE

### I. — PREPARAZIONE DEI COMPOSTI ESAMINATI.

*Pirrolo (I).* — Si è usato del pirrolo della C. Erba distillato prima su polvere di Zn e poi rettificato sotto vuoto (15 mm).

(4) FUSON e JOSIEN, « Journ. Chem. Phys. », 20, 145 (1952).

(5) J. D. BERNAL, « Trans. Farad. Soc. », 38, 912 (1940).

*4-metil-3,5-dicarbetoossi-pirrolo (II)*. - Si ottiene per riduzione catalitica con  $H_2$  e Ni-Raney del 2-bromo-4-metil-3,5-dicarbetoossi-pirrolo («Gazz. Chim. Ital.», 85, 1389, 1955). Dopo cristallizzazione dalle ligroine si presenta in aghetti bianchi. P. f.  $90^\circ$ .

*2,4-dimetil-3,5-dicarbetoossi-pirrolo (III)*. - Si è preparato secondo «Organic Syntheses», collective vol. II, p. 202. Purificato per cristallizzazione da poco alcool. Si ottengono lunghi aghi bianchi. P. f.  $138^\circ$ - $139^\circ$ .

*2-formil-4-metil-3,5-dicarbetoossi-pirrolo (IV)*. - È stato ottenuto per azione del cloruro di solforile su (III) secondo Corwin e Straugh, «J. Am. Soc.», 1416 (1948). Si purifica cristallizzando da toluolo. Aghetti bianchi p. f.  $124^\circ$ - $125^\circ$ .

*2-carbossi-4-metil-3,5-dicarbetoossi-pirrolo (V)*. - Si ottiene accanto a (IV) che si purifica con cristallizzazione da miscele idroalcoliche. Aghi bianchi p. f.  $149^\circ$ - $150^\circ$ . Vedi Corwin e Straugh, loc. cit.

*2-bromo-4-metil-3,5-dicarbetoossi-pirrolo (VI)*. - Si è preparato per azione del bromo sul (V) secondo Corwin, Bailey, Viohl, «J. Am. Soc.», 64, 1272 (1942). È stato purificato cristallizzandolo da alcool e poi da ligroina  $100^\circ$ - $110^\circ$ . Finissimi aghi bianchi p. f.  $143^\circ$ - $144^\circ$ .

*2-cloro-4-metil-3,5-dicarbetoossi-pirrolo (VII)*. - Si ottiene per azione del cloruro di solforile su (VI): «Gazz. Chim. Ital.», 85, 1378 (1955). Si cristallizza da alcool e da ligroina. Feltro di aghi finissimi. P. f.  $129^\circ$ .

#### MISURE SPETTROFOTOMETRICHE.

Le misure infrarosse sono state eseguite con uno spettrofotometro Beckman IR<sub>2</sub> montato con prisma di fluoruro di litio sulle sostanze solide e su soluzioni in tetracloruro di carbonio nella zona comprendente le vibrazioni di «stretching» dell' $N-H$  (2,5-3,5), mentre le determinazioni di  $pK_a$  sono state eseguite con il metodo spettrofotometrico nell'U. V. descritto da Rosenblatt<sup>(6)</sup> che è una interessante semplificazione di metodi precedenti ben noti (Stenström e Goldsmith). Secondo questo metodo è possibile calcolare  $K_a$  con tre sole misure spettrofotometriche a tre diversi pH.

Dai calcoli, per mezzo di alcuni accorgimenti che qui descriveremo è possibile trascurare i valori dell'estinzione molecolare essendo sufficienti i valori che si leggono di densità ottica. Combinando infatti le due espressioni note:

$$(1) \quad \frac{[HA]n}{[A]n} = \frac{\epsilon_V - \epsilon_n}{\epsilon_n - \epsilon_\beta}$$

$$(2) \quad K_a = \frac{[A]_n a_n}{[HA]n}$$

(6) D. H. ROSENBLATT, «J. Phys. Chem.», 58, 40 (1954).

dove:

$$\begin{cases} \varepsilon_{\beta} = \text{coefficiente di estinzione di HA} \\ \varepsilon_{\gamma} = \text{» » » di A} \\ \varepsilon_n = \text{» » » di una miscela ad attività idrogenionica } a_n. \end{cases}$$

si ottiene l'equazione lineare in tre incognite:

$$(3) \quad a_n \varepsilon_n \left( \frac{1}{K_a} \right) - a_n \left( \frac{\varepsilon_{\beta}}{K_a} \right) - \varepsilon_{\gamma} = -\varepsilon_n.$$

La soluzione dell'incognita  $K_a$  richiede tre equazioni simultanee le quali possono risolversi con un determinante:

$$(4) \quad K_a = \begin{vmatrix} a_1 \varepsilon_1 & a_1 & 1 \\ a_2 \varepsilon_2 & a_2 & 1 \\ a_3 \varepsilon_3 & a_3 & 1 \\ \hline a_1 & \varepsilon_1 & 1 \\ a_2 & \varepsilon_2 & 1 \\ a_3 & \varepsilon_3 & 1 \end{vmatrix}$$

La densità ottica  $D$ , la quale è una grandezza misurabile sperimentalmente, è legata al coefficiente di estinzione molecolare dalla relazione:  $D = \varepsilon cd$ , dove  $c$  è la concentrazione del soluto e  $d$  è lo spessore della cella spettrofotometrica.

Se lo spessore  $D$  e la concentrazione totale del soluto sono le stesse per tutte le misure, allora  $cd$  può essere messo in evidenza dall'equazione nella quale si può sostituire ad  $\varepsilon$  il valore di  $D$ .

L'errore previsto per questa determinazione di  $pK_a$  è di  $\pm 0,3$  unità  $pK_a$ . Nelle nostre misure è probabile un errore anche maggiore dato che i valori di  $pK_a$  da noi determinati sono un po' al limite del metodo.

**Chimica.** — *Ricerche sulla saccarina*<sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di ALDO GAUDIANO e FRANCESCO TOFFOLI, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

È noto che gli alogenuri degli acidi organici, le anidridi, gli esteri, i lattoni, le ammidi primarie e secondarie, i lattami e le immidi reagiscono facilmente in ambiente acquoso alcalino con l'idrossilammina per dare i corrispondenti acidi idrossammici. La saccarina, invece, reagisce lentamente con la idrossilammina in ambiente alcolico (occorrono molte ore di ebollizione per avere buone rese) <sup>(1)</sup> ed ancora più lentamente in ambiente acquoso, dove noi abbiamo osservato un accentuato massimo di resa, non in ambiente alcalino, ma attorno a pH 5.

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Biologia dell'Istituto Superiore di Sanità, Roma.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1956.

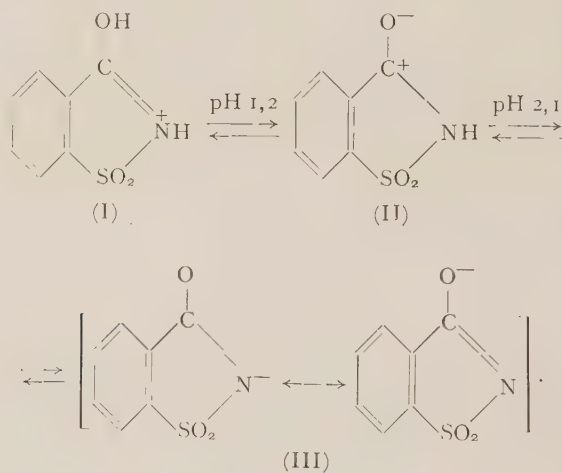
(1) A. MANNESSIER-MAMELI, «Gazz. chim. ital.», 62, 1067 (1932).

Si è escluso che tale massimo sia da attribuire alla maggior stabilità a quel pH dell'acido idrossammico che si forma dalla saccarina: mezz'ora di riscaldamento ad  $80^\circ$  di una soluzione di tale acido produce un'idrolisi massima del 40% ai pH 4-5, con variazioni non superiori al 15% fra i pH 1,5 e 7,2.

Massimi di velocità di reazione a pH compresi fra 3 e 5 furono rilevati da altri Autori nella formazione di semicarbazoni<sup>(2)</sup> e di ossime<sup>(3)</sup>; ed in base alla riconosciuta azione catalitica di alcuni acidi (non degli ioni idrogeno!) in reazioni di condensazione di questo tipo<sup>(4)</sup>, tali massimi sono stati spiegati<sup>(2)</sup> ammettendo che alla reazione partecipi il reattivo come base libera e che la reazione sia catalizzata dall'acido del sistema tamponante.

Nella presente ricerca sulla reazione fra saccarina ed idrossilammina, per escludere la influenza degli acidi non si è ricorso a sistemi tamponanti di sostanze estranee alla reazione principale, ma si è utilizzata l'azione tamponante dell'idrossilammina e della saccarina stesse.

Pur non avendo eseguito una vera ricerca di cinetica, si è potuto così ugualmente dimostrare che la velocità della reazione studiata dipende essenzialmente dalle concentrazioni delle forme indissociate della saccarina e dell'idrossilammina. In particolare la prima vi reagisce con una struttura molecolare (II) dove vi è un sufficiente o forte contributo della forma dipolare del carbonile, con carica positiva sul carbonio, che manca nella forma dissociata (III):



Le differenze di struttura fra le due forme, indissociata (II) e dissociata (III), della saccarina, dalle quali dipende il comportamento nella reazione con l'idrossilammina, si manifestano anche negli spettri d'assorbimento nell'U. V. che sono stati rilevati fra i pH 1 e 3: a  $\text{pH} > 3$  lo spettro è sempre lo stesso, quello della forma dissociata.

(2) J. B. CONANT e P. D. BARTLETT, « J. Am. Chem. Soc. », 54, 2881 (1932).

(3) A. ÖLANDER, « Z. physik. Chem. », 129, 1 (1927).

(4) J. N. BRÖNSTED, « Chem. Rev. », 5, 231 (1928).

Ciò ha permesso: di assegnare al  $pK_a$  della saccarina il valore di  $2,1 \pm 0,2$  (già corretto per la forza ionica della soluzione) che, per il modo come è stato ricavato, si deve ritenere più attendibile di quelli forniti dalla letteratura: 2,45<sup>(5)</sup> e 1,65<sup>(6)</sup>; ed inoltre di rilevare in ambiente molto acido una forma I salificata, cioè addizionata allo ione idrogeno. All'equilibrio fra le forme I e II corrisponde un  $pK_a$  di ca. 1,2, per cui si può assegnare alla saccarina un  $pK_b$  di 12,8 (valori già corretti per la forza ionica della soluzione).

Nella reazione con la idrossilammina, la saccarina presenta pertanto un comportamento singolare rispetto alle altre immidi con eterociclo a 5 atomi, essenzialmente per l'alto valore della sua costante di dissociazione acida. Difatti la succinimide e la ftalimide, che reagiscono facilmente con la idrossilammina in modo simile alle ammidi primarie, hanno una costante di dissociazione molto bassa, rispettivamente di  $3 \cdot 10^{-11}$  e di  $5 \cdot 10^{-9}$  e quindi, nelle condizioni usuali di reazione, si trovano nella forma indissociata in proporzione prevalente o almeno sensibile, in dipendenza dal pH.

**Geologia.** — *Dislocazioni triassiche non orogeniche in Val di Fassa (Dolomiti occidentali)*<sup>(\*)</sup>. Nota di PIERO LEONARDI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. B. DAL PIAZ.

La geologia della Val di Fassa presenta straordinario interesse, oltreché per la sviluppatissima eteropia di facies dei terreni mesotriassici, che la rende un esempio tra i più classici di questo interessante fenomeno, anche per alcune complicate strutture tettoniche rimaste fino a poco tempo fa pressoché incomprensibili.

Vi sono infatti alcune zone, specialmente sulle pendici occidentali del gruppo del Buffaure di fronte a Pèra, o sul fianco destro della valle fra Campitello e Campestrin (Boschi di Borest) e sul fianco sinistro sopra Alba, nelle quali i terreni corrispondenti al Werfeniano, all'Anisico e agli Strati di Livinallongo si presentano in masse discontinue che non hanno tra loro rapporti normali di giacitura né in senso verticale né in senso orizzontale. E spesso sono intramezzate da strane formazioni tufacee con grossi elementi sedimentari e da masse laviche porfiritiche che presentano caratteri del tutto particolari essendo anch'esse permeate da inclusi eterogenei di rocce sedimentarie dei suddetti livelli.

Nelle classiche monografie di Richthofen<sup>(1)</sup> e di Mojsisovics<sup>(2)</sup> che costituiscono la base delle ricerche geologiche in Val di Fassa, questi fenomeni

(5) A. HANTZSCH e E. VOEGELEN, « Ber. », 34, 3142 (1901).

(6) I. M. KOLTHOFF, « Rec. Trav. Chim. Pays Bas », 44, 629 (1925).

(\*) Ricerche dell'Istituto di Geologia dell'Università di Ferrara nelle Dolomiti, sotto gli auspicî e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) F. RICHTHOFEN, *Geognostische Beschreibung von Predazzo, Sanct Cassian und der Seisser Alpe*, Gotha, 1860.

(2) E. MOJSISOVICS, *Die Dolomit-Riffe von Südtirol und Venetien*, Wien 1879.

risultano appena accennati, né si può pretendere di più da lavori di carattere così generale.

L'interpretazione geologica della Val di Fassa compì un passo assai notevole a questo proposito con la pubblicazione di due Note di H. P. Cornelius e Marta Cornelius Furlani <sup>(3)</sup> nelle quali si metteva nel giusto rilievo l'esistenza di crateri di esplosione (*necks* o diatremi) e di formazioni piroclastiche a grossi elementi sedimentari, dette « esplosive » o, più opportunamente, « di esplosione » in quanto rispondenti a fasi iniziali esplosive dei fenomeni magmatici che caratterizzano il Trias medio dolomitico.

Con questi nuovi concetti trovano logica spiegazione alcuni grossi blocchi di Dolomia anisica e di altre rocce mesotriassiche o anche più antiche affioranti in condizioni di giacitura del tutto anormali presso Canazei, alle falde sudorientali del Col Rodella (fianco destro dello sbocco di Val Mortic) e sul versante sudoccidentale del Vernel in Val Contrin, dove si riconobbe l'esistenza dei due maggiori esempi dei suddetti diatremi <sup>(4)</sup>.

Analogamente trovarono spiegazione una parte dei depositi eterogenei che in varie zone della valle rappresentavano i surricordati *tufi di esplosione*, dovuti al depositarsi sul fondo marino dei prodotti dei fenomeni esplosivi che determinarono l'apertura dei suddetti diatremi.

Restavano però da spiegare quelle particolari formazioni laviche con inclusi sedimentari, cui pure si è accennato più sopra, e alcune particolarità che formano l'oggetto della presente Nota e sulle quali ci fermeremo più innanzi.

Alla soluzione del primo problema condusse una interessantissima Nota di K. Hummel <sup>(5)</sup>, dedicata appunto ad un tipo particolare di manifestazioni magmatiche, cui sono dovuti alcuni filoni-strato porfiritici delle Dolomiti occidentali e le strane formazioni laviche in discorso, chiamate da Hummel *Trümmellaven* o lave detritiche.

Secondo l'idea veramente geniale di questo Autore, in qualche caso i magmi porfiritici mesotriassici, giunti quasi alla superficie del fondo marino, e comportandosi la massa delle acque marine, agli effetti della pressione verticale, come una pila di sedimenti, si sarebbero introdotti lateralmente fra strato e strato delle formazioni superficiali (nel caso specifico, degli Strati di Livinallongo) dando origine a filoni-strato anche di potenza abbastanza rilevante. Con questa interpretazione sembra trovare spiegazione l'origine di alcuni filoni-strato di varia entità della Val di Fassa, e soprattutto di quello,

(3) H. P. CORNELIUS, *Zur Geologie der Tuffbildungen im Marmolatagebiet*, «Centralbl. f. Min.», 1924; H. P. CORNELIUS-M. CORNELIUS FURLANI, *Ueber die tektonik der Marmolatagruppe (Südtirol)*, «N. Jahrb. f. Min. Geol. Pal.», vol. LVI, 1927.

(4) G. VARDABASSO, *Carta geologica del territorio eruttivo di Predazzo e Monzoni nelle Dolomiti di Fiemme e Fassa*, Scala 1:25.000, Padova 1930; G. MUTSCHLECHNER, *Geologie der Langkofelgruppe*, «Jahrb. d. geol. Bundesanst.», vol. 85, 1935.

(5) K. HUMMEL, *Oberflächennahe Intrusionen und Trümmellaven in der Südalpine Mittel Trias*, «Fortschr. d. Geol. u. Pal.», vol. XI, 1932.

grandioso, rispondente al bancone porfirítico inferiore (sottostante alla striscia di Strati di Livinallongo) del M. Piz in Val Gardena <sup>(6)</sup>.

In altri casi, quando la spinta laterale dei gas e del magma era maggiore, questi sbriciolando le formazioni stesse e anche qualcuno dei livelli sottostanti (Dolomia del Serla, Anisico inferiore, Werfeniano) e trascinandone con sé i relitti sotto forma di un impasto detritico cementato da magma porfirítico o melafirico, davano origine ad intime compenetrazioni filoniane di magma e di elementi sedimentari di assai varie dimensioni (che talvolta è ben difficile distinguere dai tufi di esplosione), oppure alle vere *Trümmellaven*, ossia a colate laviche ricche di inclusi sedimentari, oppure anche ad alcuni ad alcuni *agglomerati* a cemento porfirítico, che talora sfumano nelle vere lave detritiche.

La Nota di Hummel, breve di testo, ma densa di pensiero, fece compiere passi da gigante alla interpretazione delle complicate zone cui abbiamo accennato, e non soltanto di quelle Fassane, ma in generale di tutte quelle dolomitiche in cui le formazioni sedimentarie e quelle eruttive si trovano così intimamente compenstrate.

Restavano tuttavia da risolvere alcuni problemi di carattere tettonico che destarono particolarmente la mia attenzione nella campagna geologica dell'estate 1952.

Ai piedi del Sasso Piatto, sul fianco sinistro della Val Duron, appena a occidente della complicatissima zona di Chiarvenna, gli Strati di Livinallongo presentano strane ondulazioni e arricciature che non trovano rispondenza nella sottostante formazione dolomitica del Serla e nella sovrastante formazione arenaceo-tufacea del Ladinico superiore, e passano lateralmente ad agglomerati a cemento calcareo che non rispondono alle *Trümmellaven* di Hummel.

D'altra parte sul fianco sinistro della Val di Fassa, di fronte a Pèra, alle falde della Cima Giumela e del Col de Pisol, non si nota soltanto lo sbriciolamento delle rocce sedimentarie e la loro compenetrazione da parte di masse filoniane (Tav. II, fig. 2), oppure la presenza di «lave detritiche» o di tufi di esplosione a grossi blocchi sedimentari; vi sono anche vere dislocazioni aventi carattere di pieghe-faglie e di scorrimenti, che qui e altrove hanno dato origine a ripetizioni di serie.

Per esempio, guardando il versante suddetto da Pèra, e seguendo l'andamento della Dolomia del Serla, si vede che essa è bensì fratturata in varie zolle, ma che queste si susseguono da Nord a Sud con un certo ordine, costituendo quasi due banconi sovrapposti e subparalleli. Ossia si hanno due serie: una inferiore, normale, costituita dai terreni rispondenti al Werfeniano e all'Anisico, e una, sovrascorsa, costituita da un secondo bancone di Dolomia del Serla, con sopra e sotto brandelli degli altri elementi della serie. Il tutto

(6) P. LEONARDI e F. PANCHERI, *Su alcuni fossili ladinici di Bulla in Val Gardena e sul valore stratigrafico di due forme del genere Daonella*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LXVIII, 1949, p. 6 dell'estr.; P. LEONARDI, *Ricerche sulla geologia e paleontologia della regione dolomitica*, « La ricerca scientifica », anno 21<sup>o</sup>, 1951, p. 784.

notevolmente complicato dal suddetto sbriciolamento e dalla compenetrazione dei magmi filoniani delle *Trümmellaven* e dei tufi di esplosione.

Il più curioso è che questa zona tettonicamente così complicata viene a trovarsi, qui come altrove, per esempio ai già citati Boschi di Borest, compresa tra due serie perfettamente normali con giacitura tabulare o quasi.

Infatti alla base si ha la già citata serie normale permo-werfeniana (che talvolta giunge fino all'Anisico inferiore o addirittura fino alla Dolomia del Serla e forse agli Strati di Livinallongo), e al disopra della caotica zona rispondente all'Anisico medio-superiore e al Ladinico inferiore, la serie sedimentaria riprende normale e con giacitura suborizzontale con il complesso tufaceo e lavico del Ladinico superiore.

Stando così le cose, mi sembra evidente che le dislocazioni di cui ci stiamo occupando hanno un carattere strettamente locale, limitato a detta zona anisica e ladinica inferiore, e non possono essere dovute alle spinte orogeniche alpidiche, che avrebbero agito non soltanto sulle formazioni mesotriassiche, ma su tutta la serie sedimentaria.

Basandomi su queste considerazioni e sulle osservazioni fatte nella campagna geologica del 1952, esposi in una relazione sulla campagna in discorso <sup>(7)</sup> una ipotesi che mi sembrava dare una spiegazione plausibile della strana tettonica Fassana, e incaricai la dott.ssa Franca Proto Decima di eseguire una revisione di dettaglio della zona più caratteristica, quella del versante occidentale del M. Giumela e del Col de Pisol, per vedere se - come ritenevo in base ai risultati di una mia escursione - la struttura tettonica di quella zona trovasse una interpretazione persuasiva basata sulla ipotesi suddetta.

E poiché i risultati delle ricerche del dott.ssa Decima, che vengono pubblicati a parte <sup>(8)</sup>, mi sembrano soddisfacenti, e anche le successive mie ricerche in Val di Fassa (1954) sono approdate ad analoghe conclusioni <sup>(9)</sup>, ritengo opportuno esporre più compiutamente la mia nuova interpretazione.

Quali possono essere state le forze cui sono dovute le anormali condizioni di giacitura delle masse sedimentarie metotriassiche di Val di Fassa, e particolarmente del bancone di Dolomia del Serla e degli Strati di Livinallongo?

Poiché non è verosimile che le spinte orogeniche alpidiche abbiano agito solo su queste masse mesotriassiche lasciando indisturbate le serie sottostante e sovrastante, penso che queste dislocazioni si devono ritenere dovute a cause non orogeniche, e precisamente alle medesime cause cui sono dovute le «lave detritiche» e i tufi di esplosione, ossia alla violenta espansione dei gas e dei

(7) P. LEONARDI, *Ricerche geo-paleontologiche nella regione dolomitica. Nuova interpretazione della tettonica della Val di Fassa*, «La ricerca scientifica», anno 23<sup>o</sup>, 1953.

(8) F. PROTO DECIMA, *Note sulla geologia del versante occidentale del gruppo del Bufaure*. In corso di stampa nel «Bollettino della Società Geologica Italiana».

(9) P. LEONARDI, *Breve sintesi geologica delle Dolomiti occidentali*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», 1955.

magmi porfiritici e melafirici del ciclo eruttivo ladinico, che appunto verso la fine del depositarsi degli Strati di Livinallongo ebbe il suo inizio.

Io ritengo che le spinte dovute all'enorme pressione dei gas e dei magmi non abbiano soltanto sfondato il tetto dei condotti eruttivi dando origine a grandiosi fenomeni esplosivi (diatremiti), a potenti intrusioni suborizzontali fra strato e strato (filoni-strato di Val Gardena) e a colate laviche convoglianti lo sfasciume detritico derivante dalle esplosioni e dallo sbriciolamento delle masse sedimentarie compenstrate dai magmi (lave detritiche). Con fenomeni di questo genere già i Coniugi Cornelius e S. Vardabasso avevano molto opportunamente spiegato « la disposizione caotica di zolle appartenenti a diversi piani del Trias a contatto con od entro le masse tufacee »<sup>(10)</sup> senza ricorrere a fenomeni orogenetici.

Ma io penso che in quei casi in cui non c'è soltanto lo sbriciolamento caotico sopracitato, ma si constatano ripetizioni di serie e veri sovrascorimenti, si siano manifestati fenomeni di altra natura, anche se dovuti alle stesse cause.

Le condizioni tettoniche anormali delle masse rocciose di molte zone della Val di Fassa, e particolarmente del versante orientale del gruppo del Buffaure non erano sfuggite a M. Ogilvie Gordon, cui tanto deve la geologia della Val di Fassa, né erano sfuggiti alla valente studiosa gli intimi rapporti esistenti tra le masse sedimentarie dislocate e le rocce eruttive che molto spesso le compenetrano.

Risulta chiaro da una attenta lettura di alcune pagine della classica monografia dedicata dalla Ogilvie Gordon alla Val di Fassa e dall'esame di vari profili a lei allegati<sup>(11)</sup>, che essa molto opportunamente collegò i fenomeni sui quali ho più sopra richiamato l'attenzione dei lettori, non già con la normale azione delle spinte orogenetiche alpidiche, ma con l'intensa attività eruttiva manifestatasi nelle Dolomiti occidentali poco dopo l'inizio del Ladinico.

A questo proposito, come risulta da quanto ho già detto, sono pienamente d'accordo con l'Autrice citata. Ma non sono invece più d'accordo con lei quando si tratta di interpretare nel dettaglio la stessa tettonica locale e di spiegare le cause precise degli anormali rapporti di giacitura della masse rocciose interessate.

Se non ho mal compreso quanto si dice al riguardo nella monografia della Ogilvie, lo spezzettamento delle masse sedimentarie e il loro inglobamento e compenetrazione da parte dei materiali eruttivi sia piroclastici (tufi di esplosione) che magmatici (lave detritiche, filoni porfiritici e melafirici) sarebbero dovuti a successivi franamenti degli orli delle fessure eruttive e dei crateri vulcanici, in conseguenza dei quali zolle più o meno estese di sedimenti co- e mesotriassici sarebbero sprofondate e sarebbero state conseguentemente som-

(10) S. VARDABASSO, *I Diatremiti del Latemar*, « Atti Acc. Ven. Trent. Istr. », vol. XIX, 1928, p. 10 dell'estr.

(11) M. OGILVIE GORDON, *Das Grödener-, Fassa-, und Enneberggebiet in den Südtiroler Dolomiten*, « Abh. d. Geol. Bundesanst. », vol. XXIV, 1927, H. 1, pp. 90-91; 97-100; 112-113; 262-266; 269-270.

merse o inglobate dai materiali piroclastici e magmatici che stavano in quel mentre salendo dai condotti eruttivi <sup>(12)</sup>.

Non voglio escludere *a priori* che in qualche caso, nel corso dei complessi fenomeni che caratterizzano il Trias medio dolomitico, si siano verificati anche franamenti e sprofondamenti del genere di quelli sopra accennati. Ma questa non si può ritenere a mio giudizio la regola comune, e in particolare questa interpretazione non mi sembra si possa applicare al versante occidentale del gruppo del Buffaure nel tratto prospiciente il paese di Pèra, che è stato soprattutto oggetto delle ricerche mie e dei miei collaboratori.

Ho già fatto rilevare che in questo tratto le masse sedimentarie comprese entro i tufi di esplosione non sono tutte disposte caoticamente, e che in particolare le zolle di Dolomia del Serla costituiscono quasi una ripetizione di serie

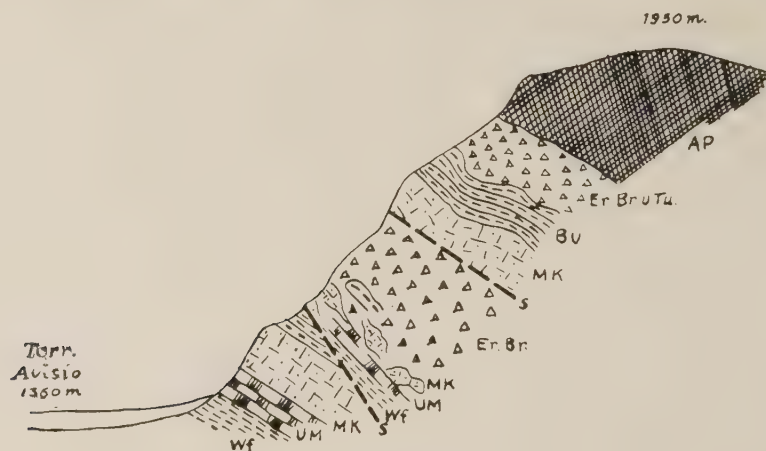


Fig. 1. - Profilo del versante occidentale del Gruppo del Buffaure nei pressi di Palua secondo M. Ogilvie Gordon (1927).

Wf = Werfeniano; UM = Anisico inferiore; MK = Dolomia del Serla; Bu = Strati di Livinallongo; Er. Br. u. Tu. = Breccie e tufi eruttivi; AP = Porfiriti augitiche; S = Superficie di scorrimento.

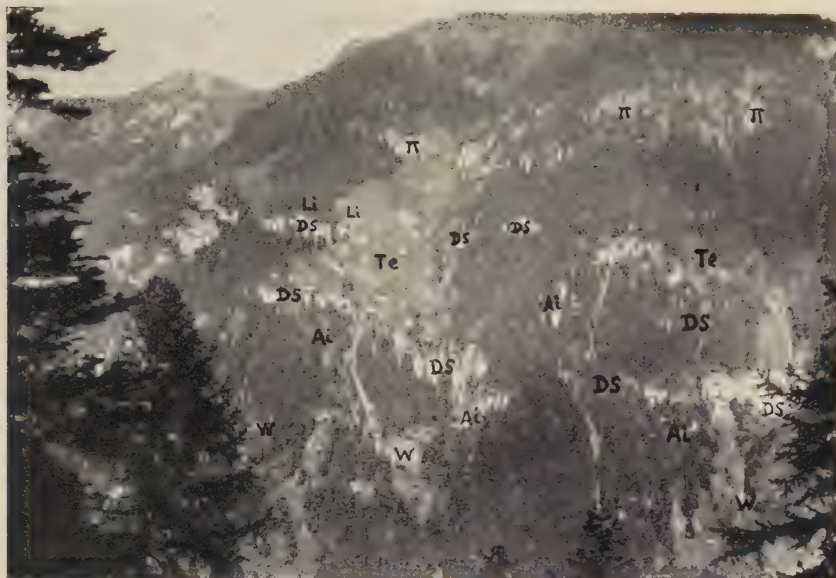
Scala 1:25.000.

susseguendosi da Nord a Sud con andamento pressoché parallelo a quello delle masse della stessa formazione appartenenti alla sottostante serie normale.

Perché si possa essere realizzata una disposizione del genere - tenendo conto della giacitura complessiva delle masse rocciose circostanti - bisogna ammettere, mi sembra, che non si sia avuto affatto uno sprofondamento di zolle verso l'interno del centro eruttivo, ma che al contrario si siano verificate spinte dall'interno verso l'esterno e verso l'alto, tali da condurre le masse isolate in discorso a sovrastare quelle della serie normale rimaste all'orlo del cratere.

Del resto non vedo come si possa interpretare nel senso prospettato dalla Ogilvie Gordon qualcuno degli stessi suoi profili, per esempio quello a pag. 90 di cui dò qui la riproduzione (fig. 1), che si riferisce a una struttura assai

(12) Si veda al riguardo particolarmente quanto è detto alle pp. 97, 98, 266 dell'opera citata.



(Fotogr. P. Leonardi)

Fig. 1. – Il versante occidentale del Gruppo del Buffaure in Val di Fassa nei dintorni di Pèra.

W = Werfeniano; Ai = Anisico inferiore; Ds = Dolomia del Serla; Li = Strati di Livinallongo; Te = Breccie tufacee di esplosione;  $\pi$  = Porfiriti augitiche.



(Fotogr. P. Leonardi)

Fig. 2. – Calcarei marnosi con grossi noduli e lenti di selce degli Strati di Livinallongo, al limite tra serie normale e zolle sovrascorse sulla mulattiera che da Pèra di Fassa conduce al Col de Pisol nel Gruppo del Buffaure.



(Fotogr. P. Leonardi)

Fig. 1. – Strati calcareo-marnosi di Livinallongo (Ladinico inferiore) raddrizzati al limite tra serie normale e zolle sovrascorse sulla mulattiera che da Pèra di Fassa sale al Col de Pisol.



(Fotogr. P. Leonardi)

Fig. 2. – Filone porfirítico con abbondanti inclusi calcareo-dolomitici, al limite tra serie normale e zolle sovrascorse, sulla mulattiera che da Pèra di Fassa sale al Col de Pisol.

analoga a quella studiata da me personalmente, e trova spiegazione logica solo ammettendo le suddette spinte agenti in senso centrifugo.

Io ritengo che anche queste spinte siano dovute, come già accennavo sopra, all'azione dei gas e dei magmi nella fase esplosiva e all'inizio della fase di deiezione delle eruzioni ladiniche, e abbiano agito su materiali sedimentari particolarmente plastici causando le caratteristiche ondulazioni discordanti con la orizzontalità delle masse più rigide sottostanti, come quelle da me constatate negli Strati di Livinallongo del fianco sinistro della Val Duron (vedi sopra) o addirittura spingendo in fuori le stesse rigide masse della Dolomia del Serla, che dovevano offrire particolare resistenza alla fuoriuscita dei gas e dei magmi, e dando origine ai succitati scorrimenti e conseguenti ripetizioni di serie.

Per citare un esempio, nel caso della zona occidentale del Buffaure già più volte nominata, sembra che le spinte abbiano agito dall'interno del gruppo – nel cui substrato sembra dovesse trovarsi, probabilmente a non grande profondità, uno dei principali focolari magmatici della regione – verso la zona dell'attuale Val di Fassa, e che in conseguenza di queste spinte laterali abbia avuto origine una specie di piega inclinata verso la posizione dell'attuale paese di Pèra.

Data la rigidità del bancone di Dolomia del Serla, la piega si sarebbe malformata e ne sarebbero derivati uno o più scorrimenti, con piano suborizzontale o debolmente inclinato, in conseguenza dei quali si avrebbe avuto la ripetizione di serie cui accennavo.

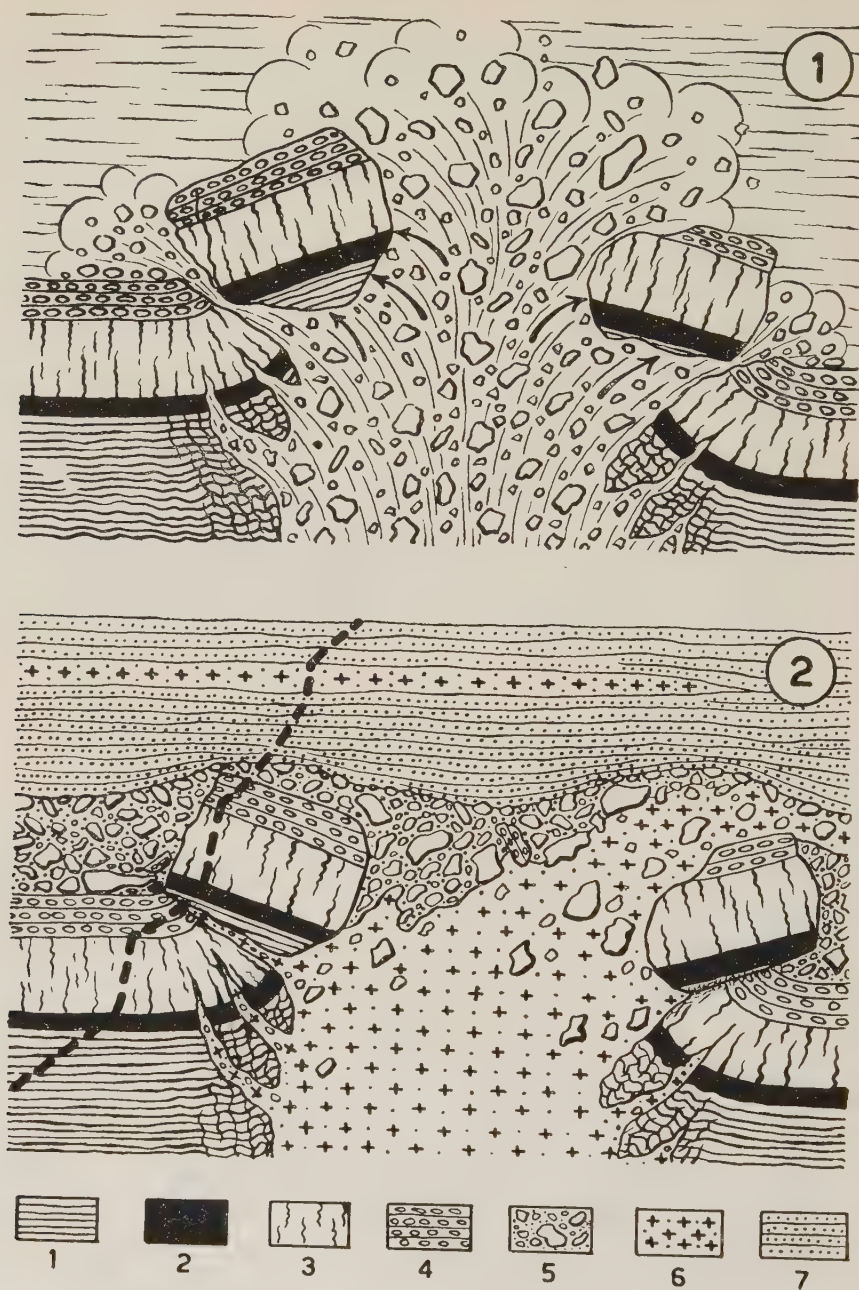
Sempre in conseguenza di questi scorrimenti, il Livinallongo marnoso della serie normale e il Werfeniano pure marnoso alla base della serie sovrascorsa si sarebbero compenetrati al punto che, data la analogia della facies, non sempre è facile distinguerli sulla mulattiera che dal Sasso delle Streghe (presso il ponte sull'Avisio) sale al Col de Pisol (Tav. II, fig. 1).

Le spinte laterali si sono prodotte, logicamente, finché la copertura, comprendente a quel tempo i termini fino alle marne e calcari nodulosi di Livinallongo, e sopportante la pressione delle sovrastanti acque marine, resistette all'espansione della colonna saliente di gas e di magma, e nel momento stesso della esplosione, quando le zolle della copertura frantumata vennero in parte spinte all'infuori (fig. 2 fase 1).

Sembra evidente infatti che poiché queste zolle conservano nella serie superiore all'incirca la loro posizione stratigrafica normale, si tratta di zolle spinte lateralmente all'infuori, e non già di masse proiettate in aria dai gas erompenti e ricadute attorno al condotto eruttivo – o nello stesso condotto come quelle che diedero origine ai « tufi di esplosione ».

Sul caos derivante delle varie fasi eruttive del Ladinico medio si depositarono poi tranquillamente i depositi tufacei e le colate laviche del Ladinico superiore e del S. Cassiano, che conservano tuttora quasi indisturbata la loro originaria giacitura orizzontale (fig. 2, fase 2).

Con l'ipotesi di questi scorrimenti dovuti a spinte laterali dei gas e dei magmi si spiega anche il fatto, abbastanza strano a prima impressione,



(Disegno dell'Autore).

Fig. 2. - Interpretazione teorica delle condizioni anormali di giacitura delle masse rocciose triassiche del fianco sinistro della Val di Fassa di fronte a Pèra (Gruppo del Bufaure). Nel disegno 2 sono indicate schematicamente le condizioni attuali (la linea tratteggiata a sinistra indica il profilo del versante), mentre lo schizzo 1 indica l'origine delle spinte laterali che secondo l'autore causarono la sovrapposizione di alcune zolle di terreni mesotriassici alla serie normale e il contatto diretto o addirittura la compenetrazione del Werfeniano di questa con gli Strati di Livinallongo delle zolle sovrascorse.

1 = Werfeniano; 2 = Anisico inferiore; 3 = Dolomia del Serla; 4 = Strati di Livinallongo; 5 = Tufo di esplosione ladinica; 6 = Porfiriti augitiche, melafiri e «lave detritiche»; 7 = Tufo ladinocarnici.

che in alcuni casi le zolle di Dolomia del Serla e di altre formazioni mesotriassiche poggino su banchi di tufi di esplosione. Mi sembra probabile che in questi casi le zolle suddette siano sovrascorse verso l'esterno su depositi tufacei depositisi antecedentemente attorno all'orificio del diatrema nella fase iniziale dell'esplosione (fig. 2, fase 2, a destra del disegno).

Riassumendo e concludendo, non tutte le dislocazioni della Val di Fassa e in generale della Regione Dolomitica sono dovute alla orogenesi alpida. Ve ne sono alcune, in generale di scarsa entità, ma abbastanza frequenti in varie zone, le quali interessano soltanto gli elementi eo- e mesotriassici della serie sedimentaria locale, e sono con ogni probabilità connesse con le manifestazioni eruttive che caratterizzano il Trias medio dolomitico.

Queste dislocazioni, e particolarmente quelle riguardanti il versante occidentale del gruppo del Buffaure di fronte a Pèra di Fassa, sono a mio parere (almeno in prevalenza) dovute alle spinte esercitate in senso centrifugo dai gas e dai magmi nella fase esplosiva e all'inizio della fase di effusione delle eruzioni verificatesi in Val di Fassa e in altre zone nel Ladinico medio.

Mi sembra che queste dislocazioni, di età mesotriassica, e di natura non orogenica, vadano nettamente distinte da quelle rispondenti all'orogenesi alpida, che in generale hanno portata più rilevante e diverso carattere, e siano possibilmente anche da indicare sulle carte geologiche con segni diversi, in modo da renderne evidente la genesi particolare.

**Microbiologia.** — *Nuova specie di « Volutella » isolata dal terreno: « Volutella piracicabana », n. sp.<sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di ONORATO VERONA e S. JOLY, presentata dal Socio A. CHIARUGI.*

Recentemente uno di noi (S. Joly) ha avuto occasione di isolare dal terreno un Micromicete che, apparendo nuovo, si è creduto interessante descrivere. Trattasi di una Tuberculariacea ialosporea riferibile al gen. *Volutella* che proponiamo di denominare — per ricordare la regione di primo isolamento — *Volutella piracicabana* n. sp.

**CARATTERI CULTURALI.** — Su *agar Czapek* vegetazione di non molto rapida crescita; le colonie in piastra, al 15° giorno, non superano i 4-5 cm. di diametro. Vegetazione di colore bianco-sporco tendente al bianco-paglia, consi-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia Agraria e Tecnica dell'Università di Pisa.

L'A. junior, Borsista della Rockefeller Foundation, è Assistente nell'Istituto Zimotecnico dell'Università di S. Paolo in Piracicaba (Brasile).

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1956.

stente fino a cuoriacea, tenace, non cotonosa, non fioccosa, non pulverulenta, poco rugosa all'inizio quindi fortemente e irregolarmente rugosa fino ad assumere aspetto mesenteroide per pliche numerose e più o meno profonde. Non sempre si formano fruttificazioni. Il substrato rimane invariato. Su *agar Sabouraud* analogo sviluppo con analoghe caratteristiche salvo l'aspetto leggermente pulvinato e biancastro della vegetazione; formazione di qualche goccia, alla superficie, di colore giallastro.

Su *agar fagioli* saccarosato la colonia riprende l'aspetto descritto su agar Czapek; solo piccole differenze nel colore, in questo caso tendente al bruno molto chiaro, nella presenza di qualche ciuffo di micelio bianco al centro e nella più facile formazione di fruttificazioni.

Su *agar carota* sviluppo meno abbondante che nei precedenti agar e forse meno plicato; si ha spesso buona fruttificazione.

Su *agar patata* sviluppo non abbondante e lento di colonia biancastra rasa, non plicata o pochissimo plicata al centro; se l'agar è disposto in basso strato non è difficile la formazione di fruttificazioni.

Su *agar malto* sviluppo ben scarso di vegetazione incolore, rasa, lucente, liscia, con assenza di fruttificazioni.

Su *agar carne* sviluppo lento, stentato, di colonia incolore, rasa, sottile, pellicolosa, poco plicata, con infossature radiali.

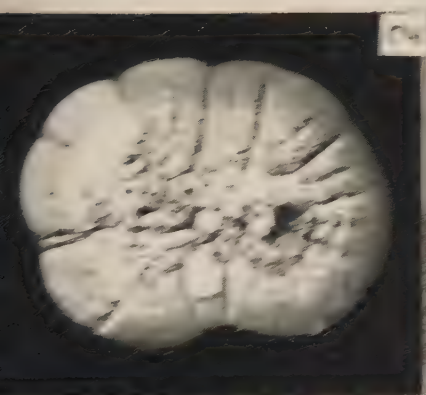
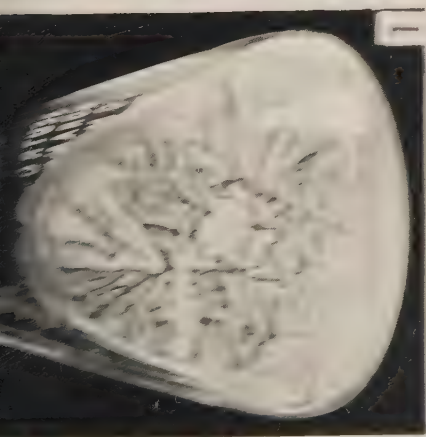
Nei *mezzi liquidi* (liq. di Czapek, di Sabouraud, infuso di carota) sviluppo stentato di ciuffi di micelio in seno al liquido; solo più tardi inizia un certo sviluppo ai bordi per poi estendersi alla superficie. Con il tempo si forma una membrana bianco-gialliccia, più o meno spessa, tenace. Dei ricordati substrati liquidi, il liquido di Sabouraud è quello che consente il migliore sviluppo; il meno buono sviluppo si è avuto nell'infuso di carote.

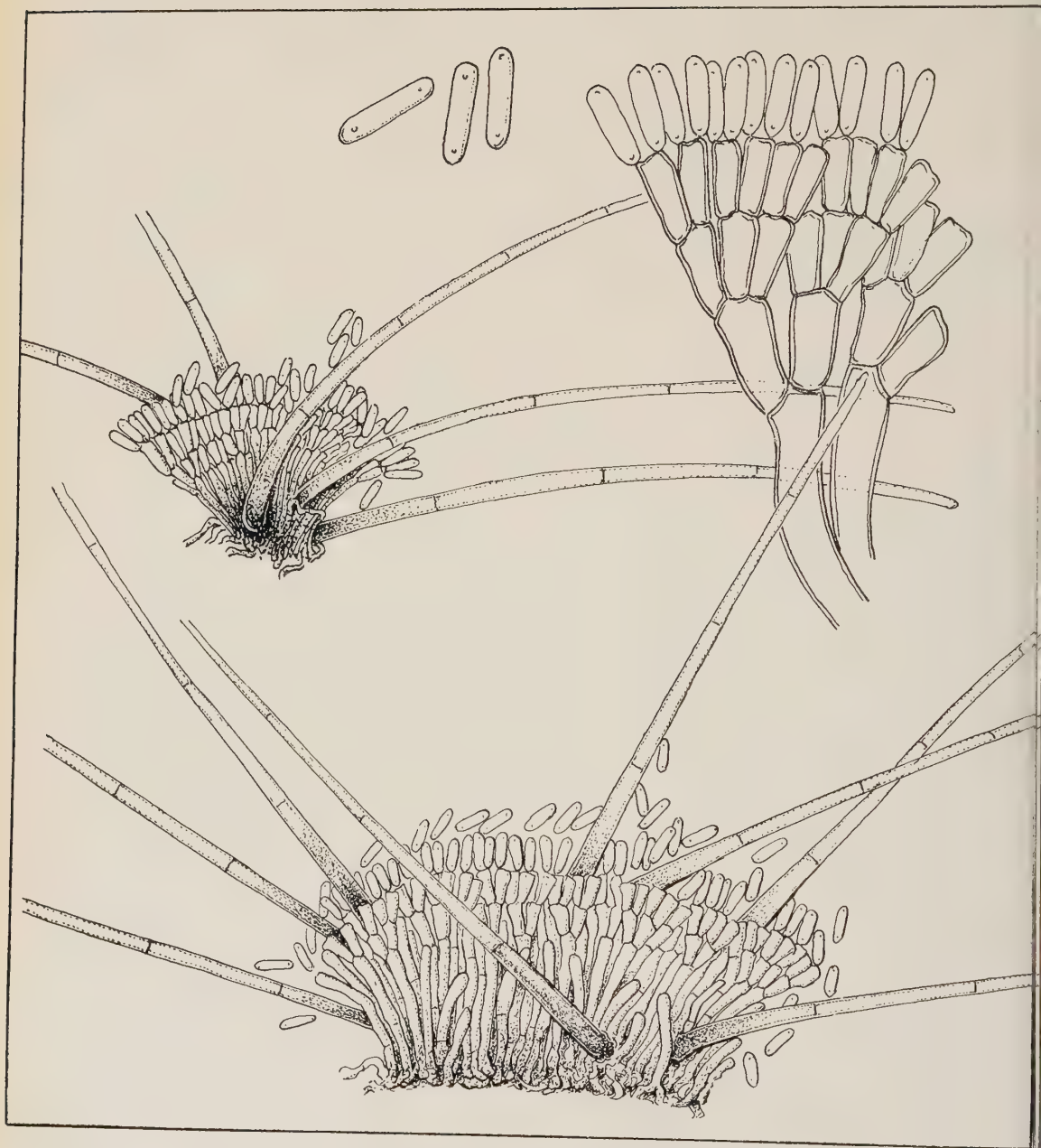
CARATTERI FISIOLGICI. - Ai fini descrittivi e diagnostici non aveva interesse rilevare i caratteri fisiologici. Desideriamo tuttavia notare che il comportamento presentato dal ceppo che si descrive lascia pensare che si tratti di specie parzialmente auxo-eterotrofa.

Saggiata nella sua attività antibiotica, una certa azione inibente verso *Bac. subtilis* e lo Stafilococco aureo si manifestò all'inizio dell'isolamento. Tale attività non si è però mantenuta <sup>(1)</sup>.

CARATTERI MORFOLOGICI. - Micelio jalino, sottile, settato, di  $\mu$  1,8-2,2 particolarmente intricato e ramificato, privo di strutture, raramente granuloso, in genere approfondentesi nel substrato. A questo tipo di micelio che costituisce la massa della vegetazione, talvolta si accompagnano ciuffi di micelio un poco più grosso, di  $\mu$  2,4-2,6, a setti più distanziati e presentante di tanto in tanto anastomosi.

(1) Anche *Volutella buxi*, che è l'unica specie saggiata dal punto di vista dell'antibiosi, si è manifestata inefficace *in vitro* verso lo Stafilococco aureo ed *E. coli*. (W. J. ROBINS ed altri, *A survey of some wood-destroying and other fungi for antibacterial activity*, « Bull. Torrey Botan. Club », vol 72, p. 165 (1945)).





Rappresentazione grafica di sporodochi e conidiofori.

La fruttificazione non sempre è pronta e facile. Quando si verifica compaiono allora, sulla superficie della vegetazione, minuti puntini nerastri gli uni prossimi agli altri spesso disposti in fila in senso circolare. Trattasi di sporodochi di dimensioni variabilissime, di colore olivaceo-bruno quasi carbonaceo, a base leggermente coartata comunque non stipitata. Hanno forma solitamente globosa e sono muniti di setole più o meno numerose, rigide, settate (2-5 setti), di  $\mu$  2,6-3,8  $\times$  80-180, alla base leggermente olivacee quindi jaline.

Nella massa sporodochiale subjalina o leggermente olivacea si osservano, addensati, conidiofori ramoso-penicillati portanti conidi isolati, jalini, cilindrici ad estremità arrotondate, biguttulati, di  $\mu$  2,6  $\times$  7,8-10,4.

RIFERIMENTO SISTEMATICO. — Poche specie di *Volutella* sono state isolate dal terreno (ved. oltre) e tutte presentano caratteri molto diversi da quelli della specie qui descritta.

Molte specie, invece, sono state rinvenute su organi vegetali che talvolta parassitizzano. Tra queste nessuna, peraltro, presenta sporodochi brunoneri e solo *Volutella scopula* Bell., isolata da bulbi putrescenti di giacinto, ha conidiofori ramoso-penicillati. In *V. scopula* gli sporodochi sono però di colore bianco-roseo mentre altre differenze si hanno nell'aspetto e dimensioni dei conidi (ved. «Rev. gén. Bot.», IX, 220, 1897 e «Sacc. Syll.», XIV, 1120).

Atteso ciò è quindi ragionevole pensare che il ceppo da noi isolato rappresenti una nuova specie che come tale viene di seguito così diagnosticata:

*Volutella piracicabana* Verona et Joly.

*In agar* Czapek colonias subhyalinas v. leniter flavo-ochraceas, membranaceas, consistentibus, plicatissimas. Substrato incolore.

*Mycelio* hyalino, subtile, septato, ramoso.

*Sporodochiis* sessilibus basi coartatis, soliter globosis v. ovoideis, olivaceo-brunneis usque atris, gregariis, saepe confluentibus; setulis rigidulis, septatis, hyalinis, in basi inflatis leniter olivaceis,  $\mu$  2,6-3,8  $\times$  80-180; conidiophoris dense fasciculatis, penicillato-ramosis, hyalinis v. leniter in basi olivaceis; conidiis cylindraceutis basi et apice rotundatis, biguttulatis, hyalinis,  $\mu$  2,6  $\times$  7,8-10,4

Hab. ad terram cultam.

Etym. a *Piracicaba* (Brasilia) isolatio loco.

Come si è precedentemente ricordato specie di *Volutella* non sono state isolate dal terreno, a tutt'oggi, con molta frequenza.

Niethammer, per esempio, nella sua pur voluminosa *Monografia sui funghi del terreno* non elenca nessuna specie di questo genere<sup>(2)</sup>.

(2) A. NIETHAMMER, *Die mikroskopischen boden-pilze*. Ed. Dr. W. Junk, L'Aja 1937.

Gilman, nel suo libro <sup>(3)</sup>, ricorda due specie: *V. roseola* Cooke isolata da Bisby e altri dai terreni del Canada (1935) e *V. piriformis* Gilman et Abbott isolata dai terreni della Luisiana (1927) <sup>(4)</sup>. Solo recentemente Tresner ed altri segnalano con una certa frequenza una *Volutella* sp. in alcuni terreni forestali del Wisconsin <sup>(5)</sup>.

**Microbiologia.** — *Un nuovo tipo serologico di leptospira patogena per l'uomo* (\*). Nota <sup>(\*\*)</sup> di BRENNO BABUDIERI, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

Quindici anni or sono Mino <sup>(1)</sup> ha isolato da pazienti che lavoravano in risaie del Vercellese, due ceppi di leptospire, serologicamente uguali fra di loro e diversi dai ceppi di cui egli disponeva.

Uno di questi due ceppi, denominato «Sari», è stato distribuito ad altri laboratori, ma non è stato mai studiato a fondo dal punto di vista della suasistematica. Ho analizzato la costituzione antigenica di tale ceppo, impiegando sia la reazione di agglutinazione e lisi, sia il procedimento dello adsorbimento degli anticorpi, secondo la tecnica di Schueffner e Bohlander.

Dalle mie ricerche, che mi riservo di esporre minutamente in altra sede, risulta che il ceppo «Sari» appartiene al serogruppo «hebdomadis» e costituisce in esso un nuovo serotipo. Ho potuto constatare che a tale serotipo appartiene anche il ceppo «Ghidorsi», isolato da Bussinello e Collaboratori l'anno scorso da un paziente della pianura padana, nonché il ceppo «Szwajizak», rappresentante di 4 ceppi, tra di loro serologicamente uguali, isolati l'anno 1954 da Smith, Brown e Collaboratori <sup>(2)</sup> nel Nord Queensland. Le prove di adsorbimento hanno però dimostrato che i ceppi italiani contengono un antigene in più di quello australiano. I ceppi italiani sono perciò

(3) J. C. GILMAN, *A manual of Soil fungi*. The Iowa State Coll. Press, 1950.

(4) Per quanto si riferisce a *V. piriformis* Gilman et Abbott notiamo che i caratteri fissati dagli Autori — particolarmente quelli relativi il colore bruno delle colonie, degli sporodochi e soprattutto dei conidi — lasciano pensare piuttosto che ad una *Volutella* ad un rappresentante del parallelo genere *Chaetostroma*.

È vero che molte specie di *Chaetostroma* sono state posteriormente trasferite nel gen. *Volutella*; ma ciò in quanto, appunto, sussiste la condizione dei conidi ialini.

(5) H. D. TRESNER, M. P. BACKUS e J. T. CURTIS, *Soil microfungi in relation to the hardwood forest continuum in Southern Wisconsin*. «Mycologia», vol. 46, p. 314 (1954).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità. Laboratorio di Microbiologia. Roma.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1956.

(1) P. MINO «Klin. Wschr.», I, 337 (1942).

(2) J. W. SMITH, H. E. BROWN, J. I. TONGE et alii «Australas. Ann. of Med.», 3, 98 (1954).

da considerarsi il biotipo completo (AB) di un serotipo, di cui il ceppo austriaco rappresenta il biotipo incompleto (A).

Propongo per il nuovo serotipo il nome di *L. mini*, in onore del ricercatore italiano Prospero Mino, morto alcuni anni or sono, che fu tra i pionieri dello studio della leptospirosi delle risaie, e che fu il primo ad isolare un ceppo di questo nuovo serotipo.

Ricerche serologiche da me eseguite in Italia, hanno rivelato che, oltre all'uomo, anche i bovini possono presumibilmente venire infettati da *L. mini*.

**Microbiologia.** — *Isolamento su coltura di tessuti di un virus da enterite suina* (\*). Nota (\*\*) CARLO MOSCOVICI, ADRIANO GINEVRI, VITTORIO MAZZARACCHIO, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

In alcuni episodi di enterite suina verificatisi nella Campagna romana, sono stati fatti nel mese di marzo del corrente anno, dei prelievi rettali da un certo numero di suini neonati. Lo scopo della ricerca è stato quello di stabilire se si potesse ritenere un *virus* come responsabile della diarrea nel suino giovane e la relazione che poteva avere l'eventuale *virus* con il gruppo dei *virus* ECHO (Enteric Cytopathogenic Human Orphan).

Da un totale di 20 campioni di tamponi rettali prelevati in diverse covate dove si era manifestata la diarrea, è stato isolato un agente citopatogeno per le colture di cellule renali tripsinizzate di scimmia e di suino.

Le modalità di prelievo, le tecniche d'isolamento e la descrizione dei terreni impiegati per le colture sono state descritte dettagliatamente in altro lavoro (1).

Le ricerche biologiche hanno mostrato che l'agente isolato non è citopatogeno né per le cellule HeLa, né per le cellule di rene umano e né per le cellule renali di coniglio. Non è inoltre patogeno per il topino neonato e adulto, inoculati entrambi per via intracranica ed intraperitoneale.

La citopatogenicità per le cellule renali di scimmia avviene in maniera rapida e drammatica: nello spazio di 24-36 ore dal momento dell'inoculazione, le cellule vengono completamente distrutte dando luogo alle caratteristiche formazioni a grappolo, a granulazione del citoplasma ed a rigonfiamento delle cellule.

Le cellule renali del suino si comportano quasi nella stessa maniera.

Le prime indagini serologiche eseguite usando sieri animali ed umani meritano ulteriori ricerche per poterne esattamente stabilire il valore. Ri-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità. Laboratorio di Microbiologia. Roma.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1956.

(1) C. MOSCOVICI, A. GINEVRI, V. MAZZARACCHIO, *Isolamento su coltura di tessuti di un virus da enterite suina*. «Zooprof.» (1956) in corso di stampa.

sulta comunque, dalle prove di neutralizzazione eseguite su colture di rene di scimmia che l'agente isolato viene neutralizzato da un pool di sieri anti-peste suina; non solo, ma anche dal siero di una scrofa, madre di una covata di 8 lattonzoli da nessuno dei quali però fu isolato alcun *virus*. L'agente isolato non viene neutralizzato dalle gamma-globuline umane, né da alcuni sieri di lattoni colpiti dalla diarrea.

Le ricerche serologiche eseguite con sieri anti-ECHO e con sieri di bambini lattanti portatori di *virus* enterici citopatogeni non ascrivibili né a *virus* polio né a *virus* Coxsackie, hanno dato i seguenti risultati:

il *virus* del suino (ceppo DS 3) viene neutralizzato dall'antisiero ECHO tipo 8;

viene inoltre neutralizzato anche da tutti i sieri dei bambini suddetti eccetto uno;

uno dei sieri dei bambini, oltre a neutralizzare il ceppo DS 3, neutralizza anche il *virus* ECHO tipo 2.

Da queste indagini si può concludere che molto probabilmente esistono delle relazioni antigeniche tra *virus* enterici animali e *virus* enterici umani.

Le nostre indagini tendono quindi a chiarire questo aspetto di virologia comparata. Pertanto sono in corso ulteriori indagini serologiche e prove d'infezione sperimentale nei suini lattanti e nelle scimmie.

**Parassitologia.** — *L'autoinfestazione per ferita di una Gregarina parassita dell'Embiottero «Haploembia solieri» Ramb<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di RENZO STEFANI, presentata dal Socio G. COTRONEI.*

In un mio precedente lavoro ho studiato il ciclo biologico della Gregarina celozoica<sup>(1)</sup> *Diplocystis clerici* Lég. nell'*Haploembia solieri* forma partenogenetica della Sardegna. Desidero qui esporre un particolare modo di autoinfestazione, per ferita, che ho constatato aver luogo in detto insetto e che mi sembra degno di nota.

Era generalmente ammesso finora che le gregarine celozoiche degli insetti venissero unicamente trasmesse per cannibalismo degli ospiti. Così infatti si esprime il Cuénot nella sua trattazione sulle *Diplocystis major* e *minor* del grillo e così si esprimono altri Autori, tra cui il Jameson. Data la particolare natura di queste gregarine che si trovano racchiuse nell'emocele

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Cagliari.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1956.

(1) Indico con l'aggettivo *celozoico*, secondo la terminologia usata da Colosi, un parassita che viva in qualunque cavità, aperta o chiusa, dell'ospite; con *fase celomatica* il periodo in cui esso vive nel celoma degli animali celomati o nell'emocele degli Artropodi.

e non possono raggiungere l'esterno, bisognava necessariamente ammettere la trasmissibilità per cannibalismo nel senso che un individuo indenne, divorando un individuo infestato contenente le sporocisti mature, le introducesse nel proprio tubo intestinale e quindi se ne infestasse.

Si può ammettere anche che un individuo parassitizzato contenente le sporocisti mature, venga a morte per una ragione qualsiasi e il suo cadavere venga divorato da un altro individuo. Infine si deve ancora ammettere una disseminazione delle sporocisti nel terreno per disgregazione del cadavere dell'ospite infetto non divorato e successiva casuale ingestione delle stesse da parte di altri individui.

Queste ultime due modalità di trasmissione sono valide per la *Diplocystis clerici* ed io le ho potute effettivamente constatare.

Il cannibalismo negli embiotteri, nel senso di divoramento di altri individui viventi della stessa specie, è del tutto eccezionale in quanto è noto che questi insetti hanno un regime alimentare esclusivamente vegetariano. Esiste solo un cannibalismo sessuale notato per l'*Embia tyrrhenica* (Stefani 1954) ma esso si presenta soltanto in questa specie ed è limitato alla ♀ durante l'atto sessuale. Non esiste negli Embiotteri un cannibalismo in senso generale, dunque, ma piuttosto una necrofagia cioè una tendenza a divorare cadaveri e parti del corpo amputate o spoglie mutali limitatamente ad individui della stessa specie.

Interpreto questi fenomeni considerandoli alla stessa stregua della tendenza di molti animali, anche superiori, di divorare parti che si staccano dal proprio corpo oppure dal corpo di altri individui della stessa specie (es. divoramento di spoglie mutali negli insetti, di annessi embrionali in animali superiori, ecc.). Ponendo un cadavere in un tubo contenente una *Haploembia* vivente, esso viene prima o poi, divorato da questa mentre invece un cadavere di qualsiasi altra specie di artropode viene lasciato intatto.

Possiamo quindi concludere, che, nel nostro caso, la trasmissione avvenga fondamentalmente in natura per divoramento di cadaveri infetti oppure per ingestione casuale di sporocisti nel terreno derivate da disgregazione di cadaveri rimasti non divorati. Escludo nella maniera più certa la possibilità di trasmissione mediante le feci; infatti non ho mai constatato, per quanto abbia insistito nella ricerca, la presenza di sporocisti nelle deiezioni di *Haploembia* infestata. Effettivamente le sporocisti non possono, racchiuse come sono nell'emocele, riguadagnare il lume intestinale in quanto non sono in grado di attraversare le pareti intestinali. Anche ammettendo la loro uscita nell'intestino attraverso ulcere o altro, esse, in contatto col succo intestinale, libererebbero ben tosto gli sporozoit, dato che non esiste la necessità di un periodo di vita latente, e quindi avrebbe inizio una nuova infestazione nello stesso ospite.

Escludo inoltre con certezza la trasmissione del parassita per via germinale. Le migliaia di uova esaminate di animali infestati non mi hanno in nessun caso dato la prova positiva di un tale fatto. Ciò è spiegabile in quanto le

pareti degli ovari non vengono intaccate dalle sporocisti e tutti i processi di sviluppo dell'uovo avvengono regolarmente.

Nei miei allevamenti ho però constatato un fatto strano che mi ha permesso di venire a conoscenza di un altro modo di infestazione e soprattutto di un processo di autoinfestazione che avviene molto frequentemente ma che finora non è mai stato descritto dagli Autori.

Ho potuto constatare che individui già infestati da vecchia data e quindi con parassiti esclusivamente in fase celomatica, tenuti isolati nell'allevamento in ambiente completamente disinfestato, si reinfestavano dopo qualche tempo, dimostrando all'esame microscopico del lume e della parete intestinale, determinate quantità di parassiti allo stadio giovanile (sporozoiti, trofozoiti, gamonti). Ho voluto esaminare attentamente il fenomeno ed ho potuto concludere trattarsi di una autoinfestazione che avviene nel seguente modo.

L'ospite già infetto presenta, nella cavità del corpo, una quantità più o meno grande di gametocisti contenenti le sporocisti. A maturazione avvenuta, come s'è già visto, per cause che possono essere le più diverse (movimenti dell'animale, movimenti muscolari o movimenti di organi, lisi della parete cistica, ecc.) un numero di gametocisti mature finisce per aprirsi e versare nell'emolinfa le sporocisti contenute.

Le correnti dell'emolinfa trasportano quindi le minutissime sporocisti in tutte le lacune dell'emocele e nelle più minute anfrattuosità del corpo. Esse pervengono così tra muscolo e muscolo nelle zampe, si spingono fino alle estremità delle antenne, si portano fin sotto il dermascheletro impregnando completamente il corpo dell'ospite. Amputando sperimentalmente alcuni articoli delle antenne o un tarso o uno dei cerci, oppure determinando in altra maniera una ferita minutissima sul corpo dell'insetto, da questa sprizza fuori l'emolinfa ed insieme ad essa una quantità più o meno grande di sporocisti. Talvolta queste sono talmente numerose che l'emolinfa uscita appare quasi lattiginosa.

È sufficiente quindi che l'animale infestato presenti una qualsiasi ferita sul proprio corpo (ricordiamo che l'esoscheletro degli Embiotteri è di debole consistenza) perché le sporocisti escano all'esterno.

Gli Embiotteri hanno l'abitudine, come del resto moltissimi animali, di leccarsi le ferite. È quindi evidente, ed io l'ho sperimentalmente constatato numerosissime volte, come un individuo infestato, contenente sporocisti mature, possa reinfestarsi quando sul suo corpo si produce, per qualsiasi ragione, una ferita.

A dar maggiore convalida a questi fatti ricorderò che il Rimsky-Korsakov ha dimostrato per gli Embiotteri e in particolare per l'*Haploembia solieri*, l'autotomia e la capacità di rigenerazione di parti amputate. Si notano infatti, sia negli esemplari raccolti in natura che in quelli allevati, frequentemente zampe in rigenerazione e antenne incomplete.

Tutto ciò sta a dimostrare come le ferite e i fenomeni di autotomia sono effettivamente frequenti in questi insetti e possano quindi permettere, in molti casi, la autoinfestazione nel modo sperimentale dimostrato.

Questo modo di infestazione attraverso ferite penso sia anzi la modalità più frequente soprattutto per quanto riguarda la infestazione dei neonati. Sappiamo infatti che i piccoli convivono con la madre per alcuni mesi dopo la nascita; essendo la madre nella maggioranza dei casi infestata e contenendo in questo periodo le sporocisti mature, essa può trasmettere con grande facilità attraverso piccole ferite del suo corpo determinate dagli stessi neonati che le razzolano intorno, il parassita ai figli.

Chiamo questo fenomeno di reinfestazione per ferita col nome di autoinfestazione perché viene riportato, per via normale, il parassita nel tubo intestinale in modo da avere una nuova infestazione a ciclo normale e uguale alla precedente, da parassiti provenienti dallo stesso individuo. Un esempio corrispondente di autoinfestazione lo abbiamo nell'ossiuro dei bambini, in cui le uova, dai dintorni dell'apertura anale, vengono riportate, dall'ospite stesso, nel tubo intestinale per via orale.

Ho fatto questa precisazione terminologica, perché intendo distinguere l'autoinfestazione suesposta dal ciclo endogeno celomatico da me descritto in un mio precedente lavoro, in cui si ha un'apertura di alcune sporocisti in seno all'emocele con successiva fuoriuscita di sporozoit che iniziano un ciclo celomatico, susseguente al normale ciclo biologico. Questa seconda infestazione endogena non segue dunque la via normale ma rappresenta semplicemente una moltiplicazione del parassita nell'interno dell'ospite.

Parlare di autoinfestazione in questo caso, significherebbe dover estendere il termine di autoinfestazione a tutti quei casi in cui un parassita si moltiplica nell'interno dell'ospite, estensione che, penso, sia del tutto inopportuna.

#### NOTE BIBLIOGRAFICHE.

- RIMSKY-KORSAKOV M. (1910). — *Regenerationerscheinungen bei Embiiden*. Verh. VIII Zool. Kongress, pp. 609-620.
- STEFANI R. (1953). — *Il cannibalismo sessuale constatato negli insetti Embiotteri*, « Rendic. Semin. Fac. Scienze Univ. Cagliari », vol. XXIII, fasc. 1-2.
- STEFANI R. (1956). — *Un ciclo endogeno celomatico susseguente al normale ciclo biologico in «Diplocystis clerici» Lég. («Eugregarina-Diplocystidae»*, « Riv. di Parassitologia » (in corso di stampa).

**Fisiologia.** — *Piezografo a trasmissione ad aria e a pressione controllata* (\*). Nota (\*\*) di GIAN LUIGI GATTI e DANIELE BOVET, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

Il rinnovato interesse nel campo dello studio della sfigmografia (Müller e coll. <sup>(1)</sup>, Della Torre <sup>(2)</sup>, Donzelot <sup>(3)</sup>, Johnson <sup>(4)</sup>, Malan <sup>(5)</sup>, Jungmann <sup>(6)</sup> e Brecht <sup>(7)</sup>) ci ha indotti a studiare e a mettere a punto un sistema di registrazione grafica delle pulsazioni delle arterie che potesse essere applicato, nelle ricerche cliniche e di laboratorio, anche a quegli esami, condotti sulle arterie periferiche, che fino ad oggi si erano urtati a notevoli difficoltà di ordine tecnico.

Ci proponiamo in questa Nota di descrivere un apparecchio, da noi studiato, e basato, per quanto concerne la parte elettrica, sul principio dello sfigmografo costruito nel 1937 da Gomez e Langevin <sup>(8)</sup> e dei successivi di Duchosal e Tavel <sup>(9)</sup> e Miller e White <sup>(10)</sup>.

L'innovazione essenziale consiste nella sostituzione del contatto rigido (la «pelote» degli autori francesi) dell'apparecchio di Gomez, con una membrana elastica sotto pressione controllabile.

Viene così introdotto, tra i tessuti e il cristallo piezoelettrico, un sistema a trasmissione ad aria costituito da due capsule di Marey nelle quali si stabilisce una pressione voluta.

Il vantaggio di un appoggio non completamente rigido sulla arteria era già stato visto da Tunis e Wolff <sup>(11)</sup> che avevano impiegato, a tal fine, nella registrazione dello sfigmogramma dell'arteria temporale, una pallina di glicerina posta tra le pelle e il cristallo. Soluzione questa che non consentiva, per altro, di regolare e conoscere la pressione esercitata sul vaso, mentre è ben noto come l'importanza della contropressione sotto la quale si ottiene

(\*) Lavoro eseguito nei Laboratori di Chimica terapeutica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1956.

(1) L. LASZT e A. MÜLLER, «Helv. Physiol. Acta», 9, 55, 442 (1951); 10, 1, 259 (1952); 12, 112 (1954).

(2) L. DELLA TORRE, *La Sphygmographie*, Roma 1946.

(3) E. DONZELOT, A. MAYER-HEINE e E. CATRAIN, «Presse med.», 62, 379 (1954).

(4) C. A. JOHNSON, «Surg. Gynecol. and Obstet.», 93, 735 (1951).

(5) E. MALAN e A. PUGLIONISI, «Medicina», 4, 497 (1951).

(6) H. JUNGSMANN e H. ROHR, «Pfl. Arch. ges. Physiol.», 258, 38 (1953).

(7) K. BRECHT e H. BOUCKE, «Pfl. Arch. ges. Physiol.», 256, 43 (1952).

(8) D. M. GOMEZ e A. LANGEVIN, *La piézographie directe et instantanée*, Paris 1937.

(9) P. DUCHOSAL e F. E. TAVEL, «Vers. d. Schweiz. Physiol. Ges.» (1942). Citato da Della Torre.

(10) A. MILLER e P. D. WHITE, «Am. Heart J.», 21, 504 (1941).

(11) M. M. TUNIS e H. G. WOLFF, «Am. J. Med. Sci.», 224, 565 (1952).

il tracciato delle oscillazioni fosse già stata messa in evidenza da Marey <sup>(12)</sup> fin dal 1881 e pare sia stata realizzata per la prima volta nel 1922 da Sahli <sup>(13)</sup> col suo sfigmobulometro.

Nell'apparecchio da noi messo a punto, una prima capsula di Marey (A) applicata sulla cute sovrastante l'arteria, è messa in comunicazione, a mezzo di un tubo di materia plastica, con una seconda capsula (B) che raccoglie le oscillazioni dell'arteria che le pervengono per via aerea. Un mano-

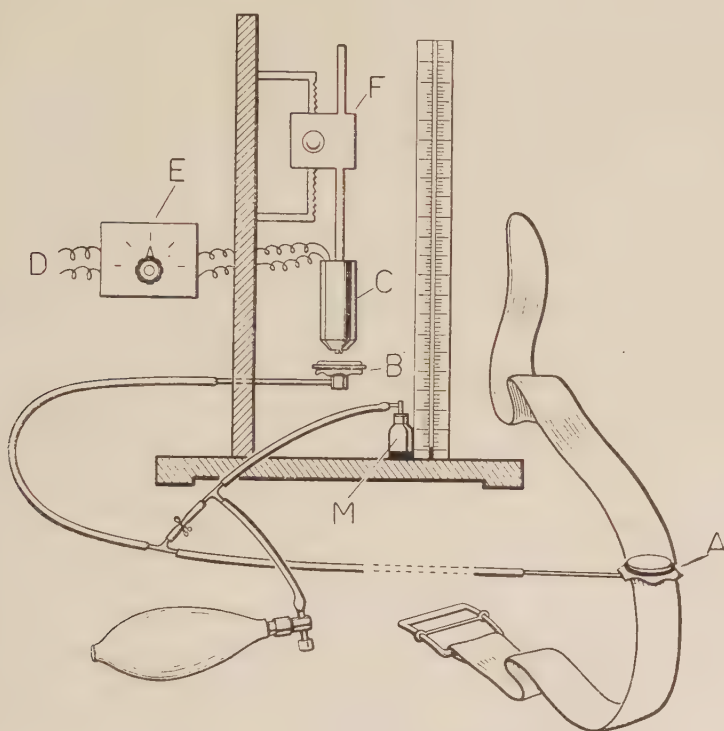


Fig. 1. - Schema del piezosfigmografo.

A - Prima capsula di Marey messa a contatto della cute sovrastante l'arteria da esplorare.  
B - Seconda capsula di Marey a contatto col cristallo piezoelettrico. C - Cristallo piezoelettrico. D - Collegamento coll'elettrocardiografo. E - Capacità variabile. F - Vite micrometrica per la regolazione del contatto tra capsula di Marey e cristallo piezoelettrico. M - Manometro a mercurio per la regolazione e il controllo della pressione nel sistema di trasmissione aerea.

metro a mercurio (M) controlla la pressione esistente nel tubo che può essere fissata ad un livello variabile tra i 10 e gli 80 mm di Hg, mentre un cristallo piezoelettrico (C), sufficientemente sensibile, disposto ad una conveniente distanza dalla capsula B mediante una vite micrometrica (F), riceve le deformazioni della membrana e le trasmette ad un elettrocardiografo a scrittura diretta (D).

(12) E. J. MAREY, *La circulation du sang*, Paris 1881.

(13) H. SAHLI, « Abderhalden, Handb. der biol. Arbeitsmethoden », V/4, 1775 (1927).

Per le nostre ricerche abbiamo usato due capsule di Marey: una del diametro di mm 30 per la registrazione delle pulsazioni arteriose nell'uomo attraverso i tessuti, l'altra del diametro di mm 20 per le ricerche realizzate sull'animale dove la capsula poggia direttamente sulla arteria messa allo scoperto (aorta, carotide, femorale, poplitea, plantare, ecc.).

Le membrane di caucciù sono di un tipo relativamente resistente e di uno spessore di circa mm 1,5 in modo che il loro invecchiamento avviene molto lentamente. Si è inoltre trovato opportuno fissare la gomma alla capsula a mezzo di un anello di materia plastica in modo che, con un po' di attenzione da parte dell'operatore, la tensione alla quale vengono fissate al tamburo le lamine di gomma, dipende dal minimo stiramento effettuato dall'anello al momento della messa in opera e risulta relativamente costante. Per il collegamento delle due capsule è stato usato un tubo di politene del diametro utile di mm 3 e dello spessore di mm 1 a parete rigida e la sua lunghezza è stata fissata in 100-150 cm. Il cristallo piezoelettrico usato è di un tipo commerciale corrente (tipo impiegato per i laringofoni) ed è costituito da una lamina di tartrato di sodio e potassio (sale di Seignette), protetto da una lamina metallica dello spessore di 1/10 mm e ha un livello di uscita normale di 150 mV. Alla lamina che protegge il cristallo è stato saldato un pulsante di materia plastica di forma cilindrica, del diametro di mm 10 e dell'altezza di mm 20 che riduce ulteriormente la superficie di contatto tra la lamina di chiusura della capsula piezoelettrica e la lamina di gomma della capsula di Marey, realizzando in questo modo un contatto a superficie virtualmente parallele.

In parallelo alla capsula è stato disposto un condensatore di differente capacità (da 0,01 a 0,5  $\mu$ F) (E) in modo di adattare meglio al fenomeno che si vuole osservare, la costante di tempo che a sua volta dipende dal prodotto di questa per la resistenza di ingresso dell'amplificatore. In questo modo si viene a costituire un filtro passa basso (in rapporto con l'impedenza dell'amplificatore), destinato ad eliminare l'induzione e i segnali non utili, e si stabilisce una conveniente costante di tempo nel sistema. Per quanto riguarda la risposta alla frequenza dell'intero sistema (trasmissione aerea, cristallo piezoelettrico, amplificatore, registratore a penna) si è verificato che, adoperando, come noi abbiamo fatto generalmente, un elettrocardiografo a scrittura diretta, l'elemento limitante è costituito dal registratore.

L'apparecchio da noi descritto si presta alla registrazione simultanea o separata degli sfigmogrammi raccolti su arterie diverse.

Nella pratica si è rivelato utile operare in luogo isolato e tranquillo, scegliendo l'ambiente in modo di evitare interferenze di vibrazioni esterne. Il paziente deve assumere la posizione supina con muscoli completamente rilasciati, mentre la applicazione della capsula alla cute sovrastante l'arteria richiede alcuni particolari di tecnica. Sugli arti e nelle regioni attorno alle quali può essere applicata una fascia, la capsula può venir fissata mediante una cintura elastica. Dove questo non è possibile è stato previsto l'inserimento della capsula su un tubo fissato con appositi sostegni al letto del paziente e orien-

tabile in modo tale da permettere di raggiungere la cute sovrastante l'arteria in direzione perpendicolare. Si è notata anche la opportunità, ai fini di una corretta registrazione, di curare che la cute sia distesa al disotto della membrana della capsula e non presenti grinze o pieghe e che la fascia non sia troppo stretta né troppo rilasciata poiché, sia in un caso che nell'altro, si possono introdurre variazioni di forma al tracciato.

La pressione da immettere nel sistema chiuso formato dalle due capsule di Marey per ottenere la migliore registrazione viene determinata facendo dei tracciati a pressione variata, da 10 fino a 80 mm di Hg e scegliendo quella pressione che a parità di amplificazione, dà un tracciato di maggiore ampiezza. Nella pratica si è osservato che una pressione di 50 mm di Hg è quella che consente di ottenere i tracciati più significativi, tenendo conto delle caratteristiche dell'apparecchio e della pressione del sangue nelle arterie.

Le diverse forme dei vari sfigmogrammi vengono illustrate dalla figura 2. I tracciati delle arterie radiale, omerale, temporale e del dito sono stati ottenuti mediante la applicazione della capsula alla cute a mezzo di una fascia elastica, lo sfigmogramma carotideo è stato invece raccolto con la fissazione della capsula ad un'asta metallica a sua volta fissata al letto del paziente.

La semplicità del metodo e la regolarità dei tracciati ottenuti compensa a nostro avviso, nella pratica registrazione degli sfigmogrammi, gli inconvenienti piuttosto teorici, del sistema di trasmissione aerea della membrana elastica. Tali inconvenienti sono infatti ridotti largamente dal fatto che gli spostamenti di volume possono essere considerati minimi data la grande sensibilità del cristallo piezoelettrico usato.

Diverse prove sono state condotte allo scopo di confrontare nello stesso soggetto gli sfigmogrammi raccolti con strumenti a trasmissione rigida direttamente applicata sulla capsula piezoelettrica, a trasmissione aerea diretta senza interposizione di membrane elastiche e con trasmissione ad acqua. Il confronto tra i vari tracciati non ha dimostrato modificazioni di forma che potessero essere attribuiti al sistema a trasmissione ad aria e a pressione controllata da noi proposto, mentre ha confermato la maggiore sensibilità e precisione di questo.

Ad illustrare le larghe possibilità del metodo vengono riprodotti alcuni tracciati che mostrano le modificazioni dello sfigmogramma radiale e temporale durante la inspirazione di nitrito di amile (fig. 3).

L'apparecchio descritto presenta, in rapporto a quelli tutt'ora impiegati o descritti, da un lato il vantaggio di una maggiore facilità di registrazione grazie alla separazione tra il ricevitore di impulsi arteriosi e l'apparecchio registratore e dall'altro lato il non meno importante vantaggio che proviene dalla sostituzione di una membrana rigida con una membrana elastica che non modifica le condizioni di circolazione idraulica locale consentendo di lasciare a lungo in posto l'apparecchio e conoscere esattamente la pressione colla quale, sia pure indirettamente, il cristallo poggia sull'arteria.

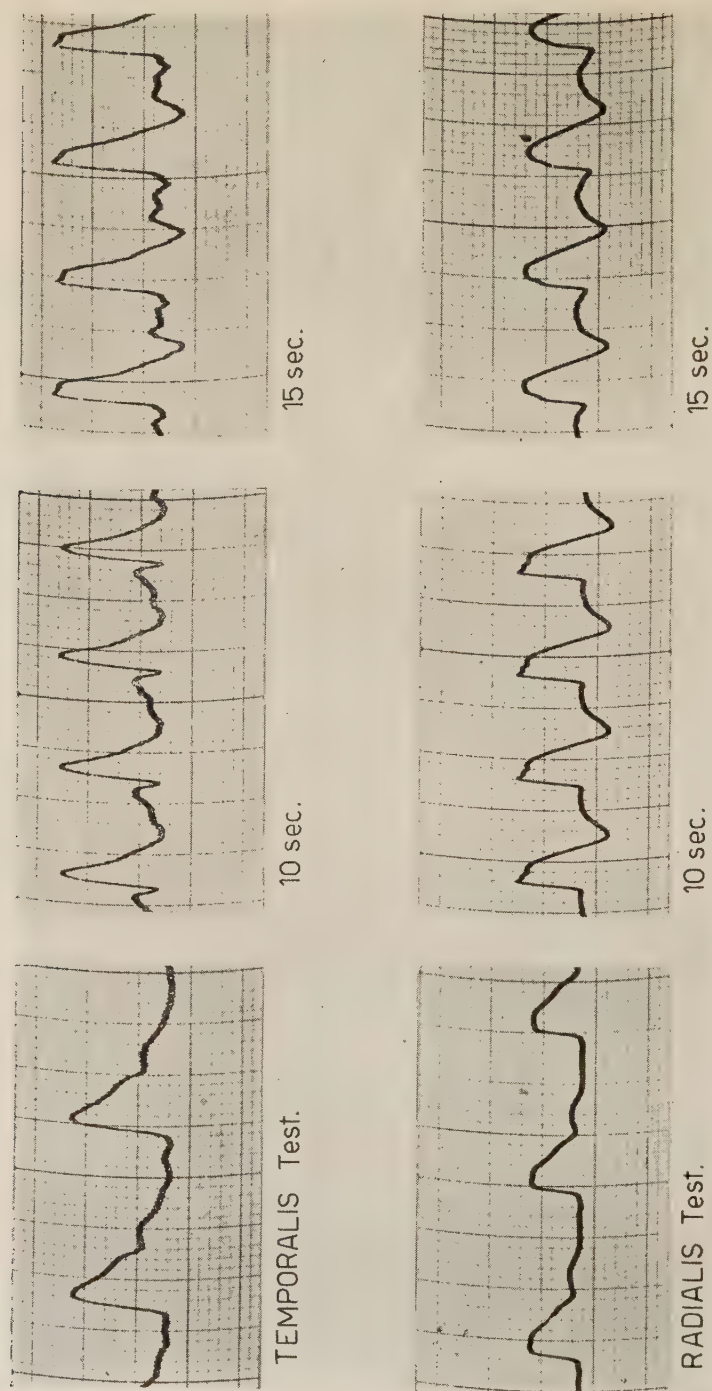


Fig. 2. - Piezofismogrammi di alcune fra le principali arterie.

Tutti i tracciati sono stati registrati alla pressione di 50 mm/Hg; i primi cinque corrispondono alla stessa amplificazione, che è stata aumentata tre volte nell'ultimo. Ogni quadratino corrisponde a 0,1 sec.

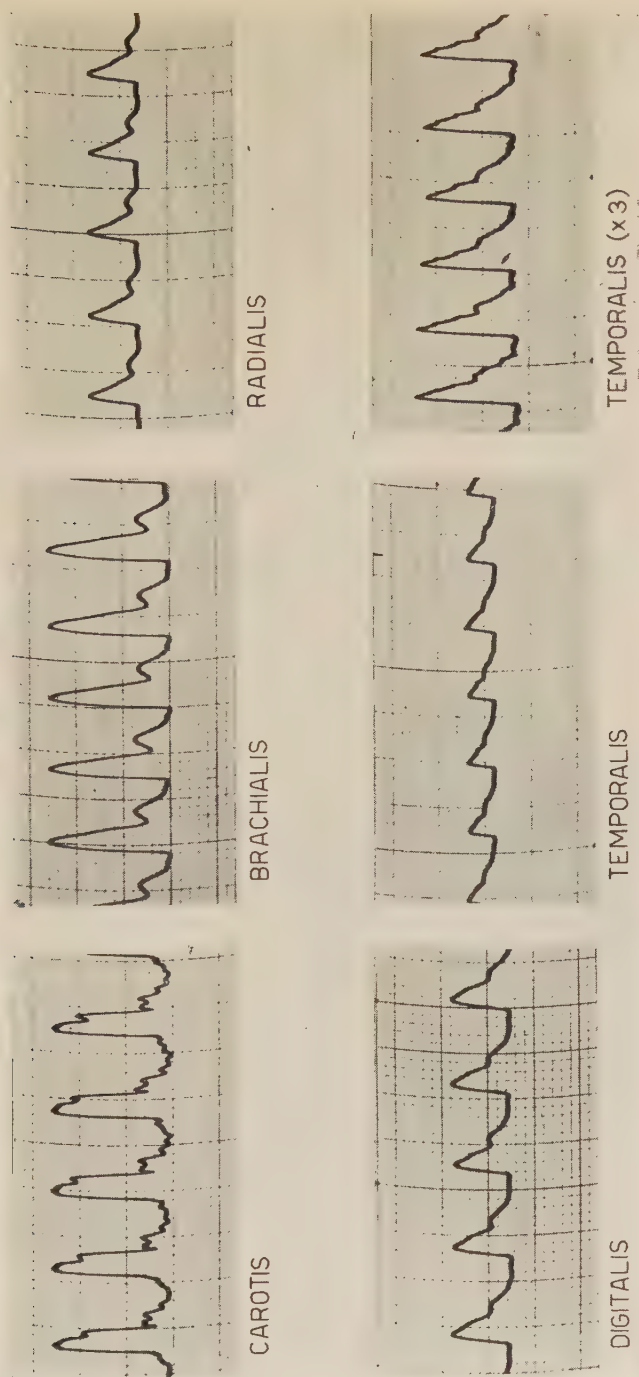


Fig. 3. — Effetto del nitrito di amile sul piezosfigmogramma temporale e su quello radiale.  
Effetto di una dose di nitrito di amile immessa in circolo mediante tre atti inspiratori normali.

Ne risulta una grande facilitazione nella interpretazione dello sfigmogramma e la possibilità di seguire anche per ore, in condizioni perfettamente costanti, l'effetto di un farmaco o le variazioni dovute a stimoli fisiologici o patologici.

Questi vantaggi appaiono particolarmente significativi per quanto riguarda lo sfigmogramma dell'arteria temporale che molto difficilmente e solo in pochi soggetti poteva essere registrato convenientemente con i metodi fino ad ora impiegati, mentre è nota l'importanza che le variazioni sfigmografiche dell'arteria temporale assumono nel corso della crisi emicranica.

**Biologia.** — *Alcune osservazioni preliminari sull'orecchio medio e la regione sfenoidale di « Chrysochloris asiatica ».* Nota (\*) di ALBERTO SIMONETTA, presentata dal Corrisp. G. COLOSI.

L'importanza morfologica della regione sfenoidale e di quella dell'orecchio medio dei tetrapodi è sempre stata sottolineata da quanti si sono interessati alla struttura del cranio; ed anche dal punto di vista della tassonomia ci si è sempre più convinti che le caratteristiche di questa regione sono altamente significative. È quindi naturale che essa abbia in passato e continui tuttora ad attirare l'attenzione costante dei ricercatori.

Poiché, peraltro, le nostre conoscenze sono ancora lungi dall'essere veramente soddisfacenti, ed in particolare, tra gli ordini di mammiferi relativamente meno noti per ciò che riguarda queste strutture, gli insettivori appaiono meritevoli di nuove indagini, ho intrapreso alcune ricerche su varie specie appartenenti a quest'ordine.

Tra i dati fino ad ora raccolti, alcuni fra quelli relativi a *Chrysochloris asiatica* (Linn.) mi sembrano meritevoli di essere oggetto di una breve comunicazione, in quanto si prestano a precisare alcuni aspetti molto interessanti della morfologia del cranio di questi curiosi insettivori.

Le nostre conoscenze relativamente alla regione sfenoidale ed uditiva dei Crisocloridi sono sostanzialmente dovute ai contributi del Leche (1907), del Broom (1916 e 1927), del Cooper (1928) e del Roux (1947). Tra gli altri autori che hanno resi noti dati relativi alla regione che ci interessa, i soli che vadano ricordati, per l'avere essi contribuito alle nostre conoscenze sui particolari punti oggetto di questa Nota, sono lo Hyrtl (1845) ed il Doran (1878).

Occorre innanzitutto notare che tutti gli autori citati, ad eccezione del Roux, classificano gli animali da loro studiati invariabilmente nel genere *Chrysochloris*, il che è particolarmente fonte di inconvenienti poiché i dati da essi raccolti si riferiscono, oltre che a *Chrysochloris*, ai generi *Eremitalpa*,

(\*) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1956.

*Amblysomus* e *Chrysospalax*, tutti generi che differiscono fra loro e da *Chrysochloris* principalmente per la morfologia della regione dell'orecchio medio.

Un primo punto degno di particolare attenzione è la parete mediale del recesso epitimpanico (parete che delimita per un buon tratto la fossa cranica) di *C. asiatica*.

In base all'esame di sezioni seriate di un feto da lui ritenuto appartenente a questa specie, ma che molto più probabilmente è da considerarsi appartenente ad *Amblysomus sclateri*<sup>(1)</sup>, il Cooper potè osservare che la parete mediale del recesso epitimpanico è formata da una lamina ossea che è tesa tra la *pars vestibularis* del periotico e lo squamoso. Egli chiamò questa lamina « petrosal wing ».

In *C. asiatica* si può facilmente osservare come questa lamina, assai più estesa di quanto non sia nella specie esaminata dal Cooper, partendo dalla *pars vestibularis* si diriga in avanti ed in alto e raggiunga lo squamoso. Peraltro occorre porre in particolare rilievo il fatto che, in questa specie, la lamina ossea in questione, si fonde, presso il suo margine antero-superiore, con l'apice dell'orbitosfenoide, che in *C. asiatica* è assai più alto ed appuntito di quanto non sia nella specie esaminata dal Cooper ed in *Eremitalpa* (descritta dal Roux).

« Petrosal wing » ed orbitosfenoide vengono così, in *C. asiatica*, a delimitare un'ampia finestra di forma triangolare e con apice rivolto in alto nella parete della fossa cranica. Tale finestra conduce in una fossa piuttosto ampia e poco profonda che ospita il ganglio di Gasser ed attraverso alla quale passano i nervi ottico, oculomotore ecc. Tale cavità è lateralmente delimitata dalla parte ascendente dell'alisfenoide, conformato a modo di pilastro, e che in alto si fonde allo squamoso.

Vengono così ad essere delimitati due forami nella parete esterna del cranio: uno tra alisfenoide ed orbitosfenoide ed uno tra alisfenoide e squamoso. Il primo è, a sua volta, suddiviso in modo incompleto da una minuta apofisi dell'alisfenoide diretta verso l'orbitosfenoide; la parte superiore del forame anteriore, limitata in basso in modo incompleto dall'apofisi dell'alisfenoide, corrisponde al forame ottico, mentre la parte inferiore, assai più ampia, corrisponde al *foramen lacerum anterius* + *foramen ovale*. Il forame posteriore, tra alisfenoide e squamoso è il *foramen ovale*.

La fossa che accoglie il ganglio di Gasser viene ad essere così delimitata: in avanti dall'orbitosfenoide, lateralmente dall'alisfenoide, in basso da una lamina (pneumatizzata) dello sfenoide che si articola con la sua superficie inferiore con la *pars coclearis*, e che appare sostanzialmente dipendere dal-

(1) In *C. asiatica* il recesso epitimpanico e la testa del martello si spingono fino a mezza via tra il margine superiore dell'arco zigomatico ed il vertice del cranio, mentre sia nella ricostruzione che nei disegni del Cooper essi rimangono completamente ricoperti dall'arco zigomatico stesso. In base alle radiografie pubblicate dallo stesso Cooper appare molto più probabile che si tratti di *Amblysomus sclateri*. Da notare che *A. sclateri* è stato da alcuni riferito ad uno speciale genere *Chlorotalpa* Roberts. La posizione sistematica di *A. sclateri* sarà esaminata nel lavoro definitivo.

l'orbitosfenoide, in alto, infine, dalla « petrosal wing ». Circa il significato morfologico di quest'ultima è evidente che essa è dovuta all'ossificazione della *lamina parietalis* e della *commissura orbito-parietalis*.

Questa ossificazione manca in *Eremitalpa* (Roux), e ciò è probabilmente in rapporto col fatto che, sebbene la testa del martello sia in *Eremitalpa* molto voluminosa, essa è quasi sferica (anziché conformata come una lunga clava, come in *Chrysochloris*) così che praticamente non si forma alcun recesso epitimpanico.

Si può, incidentalmente, notare che in *C. asiatica* l'apice dell'orbitosfenoide è separato dalla capsula nasale da una fessura entro cui scorre una vena.

Dal confronto della precedente descrizione con quella del Cooper, questa ne risulta sostanzialmente confermata, venendo peraltro precisato il significato delle varie parti ossee che la compongono. Differenze molto notevoli esistono, invece, rispetto ad *Eremitalpa*, tra le quali merita di essere posto in rilievo il fatto che in *C. asiatica* l'estesa ossificazione della *lamina parietalis* e della *pars orbitalis* del condrocranio vengono praticamente ad escludere l'alisfenoide dalla partecipazione alla formazione della parete della fossa cranica.

Un altro punto assai interessante è l'esistenza in *C. asiatica* di una completa pneumatizzazione del basisfenoide. Lo Hyrtl aveva ritenuto, in base all'esame del cranio secco, che in *Chrysochloris* esistesse una comunicazione diretta tra i due orecchi medi attraverso un seno pneumatico dello sfenoide. Il problema fu ripreso dal Cooper che concluse la comunicazione essere apparente, e che le lacune osservate nello sfenoide erano nel vivente occupate da vasi sanguigni. Egli basava queste sue conclusioni sul fatto che il feto da lui studiato non mostrava traccia di tale comunicazione, e che sezioni trasversali e longitudinali di crani di *Chrysospalax villosa* (dal Cooper indicata come *Chrysochloris villosa*) davano risultati ugualmente negativi.

In realtà sezioni seriate e dissezioni di *C. asiatica* mostrano che, oltre al timpanico, a parte dello squamoso, all'ala timpanica del periotico ed all'ala timpanica dell'alisfenoide, anche parte dell'orbitosfenoide e l'intero basisfenoide sono pneumatizzati (fig. 1), anzi la pneumatizzazione del basisfenoide è così spinta da ridurre quest'osso ad una sottilissima capsula ossea.

È evidente che esistono, a questo riguardo, notevoli differenze tra i vari Crisocloridi, differenze che sarebbe prematuro giudicare se a carattere generico o specifico. Val la pena, incidentalmente, di segnalare fin d'ora il fatto che in *Talpa caeca* Savi non solo lo sfenoide, ma anche gli pterigoidi sono pneumatizzati a partenza dalla cavità timpanica.

Un ultimo rilievo è opportuno a proposito di *C. asiatica*: sebbene il Cooper non lo abbia osservato, il reperto del Doran di una connessione tra l'apice del *processus gracilis mallei* ed il timpanico è esatto. Infatti l'apice del *processus gracilis* è connesso al timpanico da un brevissimo, ma robusto legamento (il Doran, lavorando per dissezione non poté precisare la natura della connessione). L'esistenza di questo legamento permette di rettificare

l'asserzione del Cooper (p. 279) «The absence, for instance, of the tensor tympani (which, however, requires confirmation from a study in the adult), of ligaments to the malleus. . .» ed è assai importante in quanto permette di spiegare l'assenza, assolutamente completa in *C. asiatica*, del *musculus tensor tympani*. Infatti il martello di *C. asiatica* ha, schematicamente, la forma di una clava, in cui il *manubrium mallei* rappresenta l'impugnatura, ed è situato in modo che il suo asse maggiore diretto in alto ed in avanti forma un angolo di circa  $72^{\circ}$  con l'orizzontale, quando la testa è in posizione normale. La sua estremità inferiore è inserita alla membrana timpanica, e poco al davanti



Fig. 1. - *Crysochloris asiatica*: cavità intertimpanica. Notare, oltre alla pneumatizzazione del basisfenoide, la pneumatizzazione delle lamine sopracocleari dell'orbito-sfenoide, e quella dell'ala timpanica del basisfenoide.  $\times 10$ .

ed al di sopra è situata l'articolazione timpanico-goniale. Si viene così a formare una leva di primo genere il cui fulcro è rappresentato dall'apice del goniale, la resistenza dal timpano e la potenza dal peso della testa del martello, proporzionalmente enorme e formata da osso compatto; in queste condizioni il timpano è tenuto in tensione semplicemente dalla forza di gravità, ed il *musculus tensor tympani* scompare. Da notare che movimenti di flessione e di estensione della testa, come pure lo spostamento dell'animale lungo gallerie oblique rispetto all'orizzontale, modificano necessariamente l'efficacia della leva e devono riflettersi in variazioni della tensione del timpano; a meno che non siano controbilanciate, indirettamente, dall'azione del muscolo stapedio.

Trattandosi di una Nota preliminare, mi sono limitato ad indicare l'esistenza di alcuni problemi morfologici e fisiologici. Questi saranno discussi

ampiamente non appena avrò potuto raccogliere dati embriologici sufficienti per un confronto completo con gli altri insettivori che sto attualmente studiando.

## AUTORI CITATI.

- BROOM R. (1916). *On the structure of the skull in Chrysochloris* « Proc. Zool. Soc., London », pp. 449-459.
- BROOM R. (1927). *Some further points on the structure of the mammalian basicranial axis.* « Proc. Zool. Soc. London », pp. 233-244.
- COOPER C. F. (1928). *On the ear region of certain of the Chrysochloridae* « Phil. Trans. R. Soc., London », pp. 265-283.
- DORAN A. G. H. (1878). *Morphology of the mammalian ossicula auditus* « Trans. Linn. Soc. London », Ser. 2, pp. 371-497.
- HYRTL J. (1845). *Vergleichend-anatomische Untersuchungen über das innere Gehörorgan*, Prag.
- LECHE W. (1907). *Zur Entwicklungsgeschichte des Zahnsystems der Säugethiere* « Zoologica », 49, pp. 1-158.
- ROUX G. H. (1947). *The cranial development of certain Ethiopian « Insectivores » and its bearing on the mutual affinities of the group*, « Acta Zoologica », 28, pp. 165-397.

**Biologia.** — *Osservazioni sul meccanismo di azione degli acidi iodo-, bromo- e cloroacetico nella blatta, « Periplaneta americana »* (\*).  
Nota (\*\*) di SERGIO BETTINI, GIUSEPPINA NATALIZI e MARIO BOC-  
CACCI, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

L'azione tossica degli acidi iodo-, bromo- e cloroacetico (sostanze alchilanti alogenate) come inibitrici della triosofosfatodeidrogenasi (TPD) del muscolo di insetto è già stata studiata [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. In uno di questi lavori [3] gli autori riferivano di avere osservato, in individui di *P. americana*, che, l'inoculazione di 4 DL<sub>50</sub> di acido iodoacetico portava, innanzi tutto, all'arresto dell'attività cardiaca e, solo dopo qualche ora, alla paralisi muscolare generale. In un seguente lavoro [4] sul destino dell'acido bromoacetico marcato con C<sup>14</sup> inoculato in *P. americana*, gli autori mettevano in evidenza che i valori della radioattività nell'apparato cardiaco erano più alti di quelli riscontrati per i muscoli scheletrici. Ulteriori esperimenti, di cui qui riportiamo in breve i dati conclusivi, sono stati eseguiti per saggiare il potere tossico selettivo dell'acido iodoacetico verso l'apparato cardiaco di blatta.

Un primo gruppo di blatte è stato inoculato, in parte con acido iodoacetico ed in parte con acido bromoacetico, fra il 3° ed il 4° urotergo al fine di porre la sostanza tossica a contatto immediato con il vaso dorsale.

Un secondo gruppo di blatte è stato trattato topicamente (sulla faccia dorsale dell'addome) con acido iodoacetico al fine di porre la sostanza a contatto con la regione dell'esoscheletro più prossima al vaso dorsale.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità — Laboratorio di Parassitologia.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1956.

Un terzo gruppo è stato posto a contatto con superficie trattate sia con acido iodoacetico che con acido cloroacetico in olio di oliva in modo che la sostanza tossica venisse a contatto con i soli tarsi.

Nel primo gruppo di blatte si è osservato che, sia con l'acido iodoacetico che con l'acido bromoacetico, la paralisi cardiaca precede la paralisi in contrattura dei muscoli scheletrici. Lo stesso risultato si è ottenuto nel secondo gruppo di blatte. Nel terzo gruppo, invece, l'abbattimento e la paralisi dei muscoli scheletrici hanno nella quasi totalità dei casi preceduto l'arresto delle pulsazioni del vaso dorsale.

Quanto sopra riportato dimostra come dipenda dalla via di somministrazione delle sostanze alchilanti alogenate e non da una loro particolare azione selettiva, se la paralisi del vaso dorsale avviene prima o dopo quella dei muscoli volontari.

È stato infine determinato, sul preparato di vaso dorsale di blatta [8], l'effetto di varie concentrazioni di acido iodoacetico (sale sodico) sulla motilità del vaso dorsale stesso; alla concentrazione di 1 : 500 si osserva il blocco cardiaco entro 10 minuti mentre alla concentrazione di 1 : 10000 entro 120 minuti.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BETTINI S. e BOCCACCI M., « Riv. Parass. », 13, 165 (1951).
- [2] BETTINI S. e BOCCACCI M., « Rend. Ist. Sup. San. », 17, 188 (1954).
- [3] BETTINI S. e BOCCACCI M., « Riv. Parass. », 16, 13 (1955).
- [4] BETTINI S., BOCCACCI M. e ROSSI C., « Riv. Parass. », 14 103 (1955).
- [5] BETTINI S. e BOCCACCI M., « J. Econ. Ento. », 1956 (in corso di stampa).
- [6] BOCCACCI M. e BETTINI S., « Experientia », 1956 (in corso di stampa).
- [7] NATALIZI G., BETTINI S. e BOCCACCI M., « Rend. Ist. Sup. San. », 1956 (in corso di stampa).
- [8] YEAGER J. F., HAGER A. e STRALEY J. M., « Ann. Ento. Soc. Amer. », 28, 256 (1935).

A. SIGNORINI.

## IL PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Visto il Regolamento per il personale dell'Accademia Nazionale dei Lincei, approvato con Decreto interministeriale 24 gennaio 1949;

Visto il Decreto Ministeriale 12 novembre 1955, relativo alle modifiche del regolamento organico del personale dell'Accademia;

Vista la deliberazione del Consiglio di Presidenza in data 19 luglio 1956;

### DECRETA:

#### Art. 1.

È bandito un concorso per esami e per titoli a due posti di Vice Bibliotecario in prova (Gruppo A, grado X) nel ruolo dei Bibliotecari dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

#### Art. 2.

Al concorso sono ammessi coloro che, in possesso dei requisiti di cui al seguente art. 3, prestino o abbiano già prestato lodevole servizio non di ruolo nella Biblioteca accademica per un periodo non inferiore a 10 mesi.

#### Art. 3.

Per l'ammissione al concorso è richiesto il possesso dei seguenti requisiti:

A) aver conseguito la maturità classica ed essersi successivamente laureato in una delle Facoltà delle Università della Repubblica in lettere o in magistero o in filosofia;

B) aver compiuto il 18° anno di età e non aver superato il 35°, salvo le elevazioni consentite, per questo ultimo limite, dalle disposizioni di legge vigenti in materia;

C) essere cittadino italiano;

D) avere il godimento dei diritti politici;

E) avere sempre tenuto regolare condotta morale e civile;

F) essere di sana costituzione fisica ed esente da difetti o imperfezioni che influiscano sul rendimento in servizio;

G) avere ottemperato alle leggi sul reclutamento militare.

#### Art. 4.

I requisiti per ottenere l'ammissione al concorso debbono essere posseduti prima della scadenza del termine utile per la presentazione delle domande, ad eccezione del requisito dell'età di cui gli aspiranti debbono essere provvisti alla data del presente bando. Tali requisiti dovranno essere documentati entro il termine stabilito dal primo comma del successivo art. 7.

Art. 5.

Le domande di ammissione al concorso dovranno essere redatte su carta legale da L. 200 e dovranno pervenire direttamente alla Cancelleria dell'Accademia Nazionale dei Lincei entro 45 giorni dalla data del presente bando. Le domande dovranno essere compilate secondo lo schema allegato al presente bando.

Art. 6.

Ai fini dei titoli di precedenza, e di preferenza nella nomina e di quello di elevazione del limite massimo di età, si applicano le disposizioni vigenti per le Amministrazioni statali.

Art. 7.

I concorrenti dichiarati vincitori dovranno far pervenire alla Cancelleria dell'Accademia Nazionale dei Lincei, sotto pena di decadenza, entro il termine di trenta giorni dal ricevimento dell'apposita comunicazione, i seguenti documenti di rito:

1° Estratto dell'atto di nascita su carta legale da L. 100, rilasciato dall'ufficiale dello stato civile del Comune di origine e legalizzato dal Presidente del Tribunale o dal cancelliere da lui delegato o dal Pretore competente per territorio. Tale documento non può essere sostituito dal semplice certificato di nascita.

2° Certificato su carta da bollo da L. 100, rilasciato dal Sindaco del Comune di origine o di residenza e legalizzato dal Prefetto, dal quale risulti che l'aspirante all'assunzione è cittadino italiano.

3° Certificato su carta da bollo da L. 100, rilasciato dal Sindaco del Comune di origine o di residenza e legalizzato dal Prefetto, dal quale risulti che l'aspirante all'assunzione gode dei diritti politici.

4° Certificato generale del casellario giudiziario, su carta da bollo da L. 200, rilasciato dal segretario della procura presso il Tribunale e legalizzato dal Procuratore della Repubblica.

5° Certificato medico, su carta da bollo da L. 100, rilasciato dal medico provinciale o militare, ovvero dall'ufficiale sanitario del Comune di residenza, dal quale risulti che l'aspirante è di sana costituzione fisica. Nel caso che l'aspirante abbia qualche imperfezione, questa dovrà essere specificatamente menzionata, con la dichiarazione che essa non menoma l'attitudine fisica all'impiego per il quale concorre. La firma del medico provinciale dovrà essere autenticata dal Prefetto, quella del medico militare dalle superiori autorità militari e quella dell'ufficiale sanitario dal Sindaco la cui firma dovrà a sua volta essere legalizzata dal Prefetto.

6° Copia dello stato di servizio o del foglio matricolare in bollo da L. 200 per i militari in servizio o in congedo, per i militari in congedo illimitato provvisorio (cioè arruolati dagli organi di leva e tuttora in attesa di chiamata alle armi della propria classe, oppure appartenenti a classi già chiamate alle armi ma non ancora incorporati perché ammessi ai benefici del ritardo o del rinvio previsti dalle vigenti disposizioni), per i riformati in rassegna (dopo l'arruolamento, in sede di selezione attitudinale, o durante la prestazione del servizio alle armi). I rivedibili o riformati dalle Commissioni di leva (giovani cioè che appartengono a classe non ancora chiamata alla leva), dovranno rispettivamente presentare un certificato di esito di leva o di iscrizione nelle liste di leva rilasciato su carta da bollo da L. 100 dai sindaci e

vistato, per conferma, dai commissari di leva. La firma del Sindaco deve essere legalizzata dal Prefetto. La firma delle autorità militari incaricate di rilasciare i documenti suddetti non necessita di alcuna legalizzazione. Il foglio di congedo illimitato, assoluto o provvisorio non può costituire il documento militare richiesto. Gli aspiranti ex combattenti sono tenuti ad allegare alla copia dello stato di servizio o del foglio matricolare la prescritta dichiarazione integrativa delle competenti autorità militari sui servizi resi in zona di operazione.

7° Diploma originale di laurea e diploma originale di maturità classica. Quallora gli istituti presso cui sono stati conseguiti i titoli di studio non avessero ancora rilasciato i diplomi originali, è consentita la presentazione dei certificati provvisori di diploma su carta legale, dai quali risulti che essi sostituiscono a tutti gli effetti i diplomi originali. In luogo dei suddetti documenti i candidati potranno produrre una copia dei medesimi, in carta da bollo da L. 200, autenticata da un notaio, la cui firma dovrà essere legalizzata dal Presidente del Tribunale o dal cancelliere delegato o dal Pretore competente per territorio.

8° Copia dello stato di servizio civile in bollo da L. 200 rilasciata dall'Amministrazione statale cui l'aspirante eventualmente appartenga con l'attestazione che l'aspirante stesso è in attività di servizio. Tale documento dovrà essere prodotto da coloro che facciano parte del personale civile dei ruoli organici o dei ruoli speciali transitori delle Amministrazioni statali.

9° Certificato su carta da bollo da L. 100 rilasciato dall'Amministrazione dell'Accademia Nazionale dei Lincei, dal quale risultino gli estremi del Decreto o del provvedimento di assunzione in servizio non di ruolo presso la Biblioteca accademica, nonché la data di inizio del servizio stesso, la durata e la natura del medesimo.

10° Dichiarazione del Direttore della Biblioteca accademica, su carta da bollo da L. 100, circa il lodevole servizio prestato dal candidato nella Biblioteca stessa per un periodo non inferiore a 10 mesi.

11° Stato di famiglia, su carta da bollo da L. 100 rilasciato dal Sindaco del Comune di residenza, legalizzato dal Prefetto da prodursi soltanto dai coniugati con o senza prole o dai vedovi con prole.

I candidati che siano impiegati di ruolo organico o di ruolo speciale transitorio alle dipendenze dello Stato si limiteranno a produrre i documenti di cui ai numeri 6, 8, 9 e 10.

I documenti di cui ai numeri 2, 3, 4, 5 e 6 debbono essere di data non anteriore a tre mesi da quella di ricevimento della comunicazione di cui al primo comma del presente articolo.

La legalizzazione delle firme non occorre per i documenti rilasciati dalle autorità residenti in Roma.

#### Art. 8.

Per sostenere le prove scritte e quelle orali i candidati dovranno essere muniti di un documento di riconoscimento.

#### Art. 9.

Al concorso si applicano le disposizioni degli articoli 5, 6, 7, 8, 9 e 10 del regolamento per gli esami di ammissione e di promozione del personale delle Biblioteche governative, approvato con Regio decreto 12 dicembre 1938, n. 1954.

Art. 10.

Gli esami scritti e orali avranno luogo in Roma, nel luogo e nei giorni che saranno comunicati agli interessati e consisteranno delle seguenti prove:

Prove scritte:

- a) svolgimento di un tema di storia o di letteratura italiana;
- b) versione dal latino in italiano;
- c) versione dal greco in italiano;
- d) composizione in francese su argomento proposto dalla Commissione;
- e) versione in italiano dal tedesco o dall'inglese, a scelta del candidato.

Prove orali:

- a) elementi di paleografia con prova pratica;
- b) elementi di bibliografia generale e biblioteconomia;
- c) elementi di diritto costituzionale e amministrativo e di statistica; legislazione concernente le Biblioteche pubbliche governative, la tutela del materiale bibliografico raro e di pregio, l'amministrazione del patrimonio e la contabilità generale dello Stato.

Nelle prove scritte di cui alle lettere b), c), d), e) è consentito, con le cautele che la Commissione creda di stabilire, l'uso del dizionario, escluso ogni altro sussidio.

In aggiunta alla somma delle medie di cui all'art. 7, comma settimo, del Regio decreto 12 dicembre 1938, n. 1954, la Commissione per stabilire la votazione complessiva dispone:

- a) di un massimo di cinque punti per diplomi o certificati di particolari studi attinenti alle discipline bibliografiche o paleografiche;
- b) di un massimo di cinque punti per pubblicazioni, con particolare riguardo a quelle concernenti le discipline bibliografiche o paleografiche;
- c) di un massimo di cinque punti per una prova facoltativa che il candidato sostenga di paleografia o papirologia greca o di traduzione di una lingua moderna straniera diversa da quelle sulle quali esso ha sostenuto le prove obbligatorie;
- d) di un massimo di cinque punti per gli effettivi servizi di biblioteca, che il candidato ha già prestati e dai quali risulti che il candidato stesso abbia dimostrato particolare attitudine ai lavori e servizi di biblioteca.

Art. 11.

La graduatoria dei vincitori del concorso sarà formata secondo l'ordine dei punti riportati nella votazione complessiva.

A parità di merito saranno osservate le disposizioni del Regio decreto 5 luglio 1934, n. 1176, e successive modificazioni.

Saranno dichiarati vincitori del concorso i primi elencati in graduatoria, in relazione al numero dei posti conferibili, tenendo però conto dei diritti di precedenza e di preferenza previsti a favore dei candidati che si trovino in possesso dei particolari requisiti voluti dalle leggi vigenti.

*Il Presidente*

VINCENZO ARANGIO-RUIZ

Roma, 1° ottobre 1956.

## SCHEMA DI DOMANDA

ALLA CANCELLERIA DELL'ACCADEMIA  
NAZIONALE DEI LINCEI    *ROMA*

Il Sottoscritto . . . . . nato a . . . . .  
(Provincia di . . . . .) il . . . . . e residente in . . . . .  
(Provincia di . . . . .) Via . . . . . n. . . . . chiede di essere ammesso  
al concorso a due posti di Vice Bibliotecario in prova nel ruolo dei Bibliotecari del-  
l'Accademia Nazionale dei Lincei.

All'uopo fa presente di essere cittadino italiano, di essere iscritto nelle liste elet-  
torali del Comune di . . . . . di non aver riportato condanne penali, di essere  
in possesso della maturità classica conseguita presso l'Istituto . . . . .  
in data . . . . . nonchè di laurea in . . . . . e, per quanto riguarda  
gli obblighi militari di . . . . .

Il sottoscritto fa presente di aver diritto all'elevazione del limite di età in  
quanto . . . . .

Il sottoscritto intende sostenere la prova scritta obbligatoria di versione dalla  
lingua . . . . .

. . . . . li . . . . . 1956.

Firma . . . . .

Indirizzo presso cui si desidera vengano inviate le comunicazioni relative al  
concorso. . . . .

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Ferie 1956 - Settembre-Ottobre*

## NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

**Astronomia geodetica.** — *Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali.* — III. *Procedimento per la determinazione delle irregolarità.* Nota (\*) del Socio GIOVANNI SILVA.

13. Manteniamo le notazioni del n. 3 e del n. 6, ma supponiamo che la gamba della livella sovrapposta al perno che si considera, sia sostituita da un cuscinetto rovesciato a  $\wedge$  terminante superiormente con un piano orizzontale. Mezzi elettronici permettono di misurare le piccolissime variazioni  $K_z$  che subisce l'altezza di questo piano, sul punto A del cuscinetto sottostante, al variare della distanza zenitale  $z$  del cannocchiale, per colpa delle irregolarità del perno. Quando il valore osservato  $K_z$  è nullo, il detto piano orizzontale ha una posizione origine, della quale diremo  $H_0$  l'altezza sul punto A, mentre diremo  $h_0$  l'altezza costante del piano stesso sul punto B del cuscinetto rovesciato sovrastante al perno. In corrispondenza ad una distanza zenitale generica  $z$  del cannocchiale, l'altezza  $H_0 + K_z$  del piano in parola sul punto A, diminuita di  $h_0$ , è l'altezza  $H_z$  del punto B sul punto A e, per la (10) e le (5), con la posizione:

$$K_0 = \frac{R}{2 \sin \alpha} + \frac{R}{2 \sin \beta} + h_0 - H_0,$$

risulta

$$K_0 + \frac{\Delta(\theta_1) + \Delta(\theta_2)}{2 \sin \alpha} + \frac{\Delta(\theta_3) + \Delta(\theta_4)}{2 \sin \beta} = K_z$$

(\*) Presentata nella seduta dell'8 giugno 1956.

dove, come si è detto ai nn. 3 e 6,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  sono le anomalie dei quattro punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  di contatto fra perno e cuscinetti ed hanno le espressioni (6).

Diamo a  $z$  un certo numero  $n$  di valori successivi equidistanti e precisamente, posto  $\mu = 2\pi/n$  facciamo  $z = r\mu$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ); sostituiamo questi valori nelle (6) e quindi nella precedente equazione, che dà così origine alle  $n$  equazioni:

$$(23) \quad K_0 + \frac{\Delta(r\mu + 90^\circ + \alpha) + \Delta(r\mu - 90^\circ - \alpha)}{2 \sin \alpha} + \frac{\Delta(r\mu - 90^\circ + \beta) + \Delta(r\mu + 90^\circ - \beta)}{2 \sin \beta} = K_{r\mu},$$

nelle quali  $K_0$  e le varie  $\Delta$  che vi compariscono sono le incognite,  $\alpha, \beta$  e le  $K_{r\mu}$  sono le quantità note.

14. Per risolvere più facilmente e per meglio discutere queste equazioni, ricorriamo per la funzione  $\Delta(\theta)$  alla serie di Fourier:

$$(24) \quad \Delta(\theta) = \rho(\theta) - R = \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\theta + b_s \sin s\theta),$$

nella quale è stato ommesso il primo termine  $a_0$ , avendo attribuito ad  $R$  il significato di valor medio della funzione  $\rho(\theta)$  quando  $\theta$  varia con continuità da 0 a  $2\pi$ .

Sostituiamo nella (23) le quattro  $\Delta$  con le loro espressioni (24); poniamo:

$$(25) \quad \gamma_s = \frac{\cos s(90^\circ + \alpha)}{\sin \alpha} + \frac{\cos s(90^\circ - \beta)}{\sin \beta}$$

e la (23) diviene

$$(23') \quad K_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s (a_s \cos sr\mu + b_s \sin sr\mu) = K_{r\mu}.$$

Nella (23') diamo a  $r$  i successivi valori  $0, 1, 2, \dots, n-1$ ; facciamo la somma e la media, membro a membro, delle  $n$  equazioni così ottenute, tenendo presente che nella somma si annullano tutti i termini della sommatoria, tranne quelli in  $a_s$  per i quali  $s$  è un multiplo  $nh$  di  $n$ ; sottraiamo tale equazione media da quelle singole e poniamo:

$$(26) \quad \gamma_0 a_0 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma_{nh} a_{nh} \quad ; \quad k_r = K_{r\mu} - \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} K_{r\mu}.$$

Le (23') assumono allora la forma

$$(23'') \quad \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s (a_s \cos sr\mu + b_s \sin sr\mu) - \gamma_0 a_0 = k_r.$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri della (23'') prima per  $\cos mr\mu$ , poi per  $\sin mr\mu$  (essendo  $0 < m \leq n/2$ ) e sommiamo rispetto ad  $r$  da 0 ad  $n-1$ . I prodotti di coseni e di seni degli archi  $sr\mu$  per coseni e seni degli archi  $mr\mu$  possono scomporsi in somme o differenze di coseni o di seni di archi del tipo  $(m+s)r\mu, (m-s)r\mu$ , e tutte le somme di questi coseni e seni per

$r=0, 1, 2, \dots, n-1$  sono nulle, salvo le somme di coseni di archi multipli della circonferenza, il che avviene quando  $s$  rende  $m+s$  o  $m-s$  eguali a multipli di  $n$ . È facile così riconoscere che le operazioni indicate conducono:

I) per  $m=0$ , alla conferma della prima delle posizioni (26) <sup>(1)</sup>.

II) per  $0 < m < n/2$  alle relazioni:

$$(27) \quad \begin{cases} \gamma_m a_m + \gamma_{n-m} a_{n-m} + \gamma_{n+m} a_{n+m} + \gamma_{2n-m} a_{2n-m} + \dots = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} k_r \cos mr\mu, \\ \gamma_m b_m - \gamma_{n-m} b_{n-m} + \gamma_{n+m} b_{n+m} - \gamma_{2n-m} b_{2n-m} + \dots = \frac{2}{n} \sum_{r=0}^{n-1} k_r \sin mr\mu. \end{cases}$$

III) per  $m=q$ , se  $n$  è pari ed eguale a  $2q$ , all'unica relazione

$$(28) \quad \gamma_q a_q + \gamma_{3q} a_{3q} + \gamma_{5q} a_{5q} + \dots = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} k_r \cos qr\mu = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r k_r$$

che coincide con la prima delle (26) per  $m=n-m$ , mentre, nello stesso caso, ambo i membri della seconda delle (26) sono nulli.

15. Se si ha una sola serie di  $n$  dati di osservazioni  $k_r$ , la cui somma è nulla, i dati indipendenti sono  $n-1$  e possono essere calcolate al più  $n-1$  incognite, quali sarebbero  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{q-1}, b_{q-1}, a_q$  se  $n=2q$ , oppure  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_q, b_q$ , se  $n=2q+1$ . I valori dati dalle (27) e (28), considerando nulli tutti i termini di Fourier dopo quelli con indice  $q$ , renderebbero rigorosamente soddisfatti i dati di osservazione raccolti. Ma ciò esige che i coefficienti  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$  delle incognite siano diversi da zero. E ciò non è, come subito vedremo.

Tuttavia, sempre nell'ipotesi di una sola serie di  $n$  dati di osservazione  $k_r$ , anche se derivante dalla media di più gruppi di osservazioni, fatti tutti con valori immutati di  $\alpha$ , di  $\beta$  e di  $n$ , si potrà raggiungere lo stesso scopo di soddisfare rigorosamente ai dati di osservazione raccolti, sostituendo alle incognite  $\Delta$ , il primo dei coefficienti  $a$  e  $b$  di ognuna delle (27) - e della (28) se  $n=2q$  - che ha a fattore un  $\gamma$  non nullo.

Quanto sopra vale anche se il numero delle incognite originarie  $\rho(\theta)$ , o meglio  $\Delta(\theta)$ , è superiore ad  $n$ , come avviene quando  $360^\circ, 90^\circ + \alpha$  e  $90^\circ - \beta$  non hanno  $\mu$  quale divisore comune; infatti in tal caso i vari punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , del contorno  $\Omega$  della sezione del perno, che di volta in volta vengono a contatto con i due cuscinetti che racchiudono il perno stesso, non fanno parte di un'unica serie di  $n$  punti distanti  $\mu$  gradi ciascuno dal successivo, e possono anche costituire quattro serie di  $n$  punti ciascuna, diversi da una serie all'altra.

La possibilità che alcuni coefficienti  $\gamma$  siano nulli è evidente. Osserviamo anzitutto che, essendo  $O$  il centro di massa del contorno  $\Omega$  del perno, considerato come una linea materiale uniforme, debbono essere nulli i valori medi di

(1) Si arriverebbe invece alla deduzione di quella posizione, se, abbandonando il significato attribuito precedentemente ad  $R$ , fosse stato introdotto nella serie (24) di Fourier anche il termine  $a_0$ ; ciò spiega l'uso dell'espressione  $\gamma_0 a_0$  per la detta posizione.

$\rho(\theta) \cos \theta$  e di  $\rho(\theta) \sin \theta$  e quindi anche quelli di  $\Delta(\theta) \cos \theta$  e  $\Delta(\theta) \sin \theta$ . Ora, per la forma (24) attribuita alle  $\Delta(\theta)$ , questi valori medi sono  $a_i$  e  $b_i$ , sicché la sommatoria (24) dovrebbe cominciare dal valore 2 di  $s$ , e nelle (27), per  $m = 1$ , il primo termine non nullo dovrebbe essere rispettivamente  $\gamma_{n-1} a_{n-1}$  e  $\gamma_{n-1} b_{n-1}$ .

E che il primo termine  $\gamma_i a_i$  e  $\gamma_i b_i$  effettivamente manchi, lo dimostra la posizione (25), che dà  $\gamma_s = 0$  per  $s = 1$ .

È pure facile riconoscere che, per  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma_s$  si annulla per tutti i valori dispari di  $s$ , mentre assume il valore 2 per tutti i numeri pari. Ciò corrisponde al fatto che in questo caso il cuscinetto di sostegno e quello sovrapposto hanno le ganasce ad angolo piatto; i quattro punti di contatto si riducono a due e ogni coppia di misure, fra le quali interceda una rotazione di  $180^\circ$  del perno, si riferisce a uno stesso diametro. Le misure indipendenti si riducono dunque a metà ed il formulario riduce a metà anche le incognite deducibili.

16. Consideriamo più in particolare il caso che è preferibile seguire in pratica e cioè supponiamo:

1° che siano state eseguite più serie di misure nelle quali sono stati variati i valori  $\alpha$  e  $\beta$ ;

2° che  $n$  sia rimasto invariato nelle varie serie e che sia un numero pari  $2q$ ;

3° che  $\mu = 360^\circ/n = 180^\circ/q$  sia un sottomultiplo anche di  $90^\circ + \alpha$  e di  $90^\circ - \beta$ .

Alle  $n$  incognite  $\Delta(\theta)$  relative ai valori  $0, \mu, 2\mu, \dots, n\mu$  di  $\theta$  si sostituiscono l'incognita  $K_0$  della (23'), variabile da una serie all'altra, e i coefficienti  $a_2, a_3, \dots, a_q, b_2, b_3, \dots, b_{q-1}$  della serie di Fourier, conservando  $K_{r\mu}$  come termine noto.

L'eliminazione di  $K_0$  mediante la corrispondente equazione normale

$$nK_0 = \sum_{r=0}^{n-1} K_{r\mu}$$

e la seconda delle posizioni (26) consente di dare alle equazioni degli errori la forma, analoga alla (23'')

$$\gamma_2 a_2 \cos 2r\mu + \gamma_2 b_2 \sin 2r\mu + \gamma_3 a_3 \cos 3r\mu + \dots + \gamma_q a_q \cos qr\mu = k_r + v_r$$

e consente altresì di dare alle equazioni normali che derivano da ogni serie di osservazioni la forma seguente, che sostituisce le (27) e (28) e che, riducendosi ai termini della diagonale principale del sistema di dette equazioni normali, costituisce anche il gruppo delle formule risolutive finali:

$$q\gamma_{2,p} a_2 = \sum_r k_{r,p} \cos 2r\mu$$

$$q\gamma_{2,p} b_2 = \sum_r k_{r,p} \sin 2r\mu$$

$$q\gamma_{3,p} a_3 = \sum_r k_{r,p} \cos 3r\mu$$

$$q\gamma_{3,p} b_3 = \sum_r k_{r,p} \sin 3r\mu$$

$$\dots \dots \dots$$

$$q\gamma_{q-1,p} a_{q-1} = \sum_r k_{r,p} \cos (q-1)r\mu$$

$$q\gamma_{q-1,p} b_{q-1} = \sum_r k_{r,p} \sin (q-1)r\mu$$

$$n\gamma_{q,p} a_q = \sum_r (-1)^r k_{r,p}$$

VALORI DI  $\gamma_m$ .

|    | $\beta = 90^\circ$  |                     |                     |                     |                     |                     | $\beta = 75^\circ$  |                     |                     |                     |                     |                     | $\beta = 60^\circ$  |                     |                     |                     |                     |                     | $\beta = 45^\circ$  |                     | $\beta = 30^\circ$  |                     |
|----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|    | $\alpha = 90^\circ$ | $\alpha = 75^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 75^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ |
| 2  | + 2,00              | + 1,90              | + 1,58              | + 1,00              | 0,00                | + 1,79              | + 1,47              | + 0,90              | - 0,10              | + 1,15              | + 0,58              | - 0,42              | + 1,15              | + 0,58              | - 0,42              | + 1,15              | 0,00                | - 1,00              | - 2,00              | 0,00                | - 1,00              | - 2,00              |
| 3  | 0,00                | + 0,27              | + 1,00              | + 2,00              | + 3,00              | 0,00                | + 0,73              | + 1,73              | + 2,73              | 0,00                | + 1,00              | + 2,00              | 0,00                | + 1,00              | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | + 1,00              | 0,00                | + 1,00              | 0,00                | 0,00                |
| 4  | + 2,00              | + 1,52              | + 0,42              | - 0,41              | 0,00                | + 1,04              | - 0,06              | - 0,90              | - 0,48              | - 1,15              | - 1,99              | - 1,58              | - 1,15              | - 1,99              | - 1,58              | - 1,15              | 0,00                | - 2,83              | - 2,41              | - 2,00              | - 2,83              | - 2,00              |
| 5  | 0,00                | + 0,73              | + 2,00              | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | + 1,27              | + 1,27              | - 0,73              | 0,00                | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | 0,00                |
| 6  | + 2,00              | + 1,00              | - 0,16              | + 1,00              | + 3,00              | 0,00                | - 1,16              | 0,00                | + 2,00              | - 2,31              | - 1,16              | + 0,85              | - 2,31              | - 1,16              | + 0,85              | - 2,31              | 0,00                | + 2,00              | + 2,00              | + 2,00              | + 2,00              | + 4,00              |
| 7  | 0,00                | + 1,27              | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | 0,00                | + 0,73              | - 1,27              | - 1,27              | 0,00                | - 2,00              | - 2,00              | 0,00                | - 2,00              | - 2,00              | 0,00                | 0,00                | 0,00                | 0,00                | 0,00                | 0,00                | 0,00                |
| 8  | + 2,00              | + 0,48              | + 0,42              | + 2,41              | 0,00                | - 1,04              | - 1,10              | + 0,90              | - 1,52              | - 1,15              | + 0,84              | - 1,58              | - 1,15              | + 0,84              | - 1,58              | - 1,15              | + 2,83              | + 0,41              | - 2,00              | + 0,41              | - 2,00              | - 2,00              |
| 9  | 0,00                | + 1,73              | + 1,00              | 0,00                | + 3,00              | 0,00                | - 0,73              | - 1,73              | + 1,27              | 0,00                | - 1,00              | + 2,00              | 0,00                | - 1,00              | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | + 3,00              | 0,00                | + 3,00              | 0,00                | 0,00                |
| 10 | + 2,00              | + 0,10              | + 1,58              | + 1,00              | 0,00                | - 1,79              | - 0,32              | - 0,90              | - 1,90              | + 1,15              | + 0,58              | - 0,42              | + 1,15              | + 0,58              | - 0,42              | + 1,15              | 0,00                | - 1,00              | - 2,00              | - 1,00              | - 2,00              | - 2,00              |
| 11 | 0,00                | + 2,00              | 0,00                | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | 0,00                |
| 12 | + 2,00              | - 0,04              | + 2,16              | - 0,41              | + 3,00              | - 2,07              | + 0,12              | - 2,45              | + 0,97              | + 2,31              | - 0,26              | + 3,16              | + 2,31              | - 0,26              | + 3,16              | + 2,31              | - 2,83              | + 0,59              | + 4,00              | + 0,59              | + 4,00              | + 4,00              |
| 13 | 0,00                | + 2,00              | 0,00                | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | - 2,00              | 0,00                | 0,00                |
| 14 | + 2,00              | + 0,10              | + 1,58              | + 1,00              | 0,00                | - 1,79              | - 0,32              | - 0,90              | - 1,90              | + 1,15              | + 0,58              | - 0,42              | + 1,15              | + 0,58              | - 0,42              | + 1,15              | 0,00                | - 1,00              | - 2,00              | - 1,00              | - 2,00              | - 2,00              |
| 15 | 0,00                | + 1,73              | + 1,00              | 0,00                | + 3,00              | 0,00                | - 0,73              | - 1,73              | + 1,27              | 0,00                | - 1,00              | + 2,00              | 0,00                | - 1,00              | + 2,00              | 0,00                | 0,00                | + 3,00              | 0,00                | + 3,00              | 0,00                | 0,00                |

Il secondo indice  $p$  sta ad indicare il numero d'ordine della serie considerata.

I coefficienti  $\gamma$  cambiano da una serie all'altra e in ogni serie ve ne possono essere alcuni di nulli. L'insieme di tutte le serie osservate, dà origine ad un unico sistema di equazioni normali, che sono simultaneamente le formule risolutive finali, e che differisce dal precedente perché a fattore di una  $q a_m$  o  $q b_m$  (e della  $n a_q$ ) deve figurare la  $\Sigma_p$  di  $\gamma_{m,p}$  (o di  $\gamma_{q,p}$ ) e similmente perché entro la  $\Sigma_r$  del secondo membro deve figurare a fattore di  $\cos mrq$  o di  $\sin mrq$  la  $\Sigma_p$  di  $k_{r,p}$ .

Il peso di  $a_m$  e  $b_m$  è il coefficiente ora definito, cioè  $q \Sigma_p \gamma_{m,p}$  (ed  $n \Sigma_p \gamma_{q,p}$  per  $a_q$ ). La scelta degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  dei cuscinetti deve essere fatta con riguardo a questo peso, che dovrebbe essere il più grande possibile, specialmente per i piccoli valori dell'indice  $m$ , in quanto è più probabile che le maggiori irregolarità abbiano i più grandi periodi. Indicazioni opportune in proposito possono essere date dall'annessa tabella, in cui sono elencati i valori di  $\gamma_m$  per  $m = 2, 3, 4, \dots, 15$ , in corrispondenza a varie coppie di valori di  $\alpha$  e  $\beta$ .

È da notare che, se  $\alpha$  e  $\beta$  si scambiano fra loro, il coefficiente  $\gamma_m$  rimane sempre inalterato in valore assoluto e conserva lo stesso segno, o cambia di segno, a seconda che  $m$  è pari o dispari.

**Mineralogia.** — *Sulla presenza di un minerale a strati misti clorite-vermiculite (« swelling chlorite ») nei diabasi di Rossena e Campotrera nell'Appennino emiliano<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> del Corrisp. PAOLO GALLITELLI.*

La presenza di un minerale a strati misti appartenente alla famiglia delle « swelling chlorites » e della « corrensite » è stata da me segnalata in alcune argille scagliose sopracretacee dell'alloctono appenninico, e nel prodotto naturale di argillificazione del diabase della Guardiola di Rossena (Gallitelli 1955 a, b, 1956).

Il ritrovamento dello stesso minerale allo stato di notevole purezza entro i diabasi di Rossena e di Campotrera mi consente ora di definire in modo più completo le sue proprietà e di discutere le sue più probabili condizioni di genesi in questa nuova forma di giacitura.

Le masse diabasiche di Rossena e di Campotrera affiorano fra le argille scagliose nella valle del torrente Ceresola, affluente di destra del fiume Enza, in provincia di Reggio Emilia, con giacitura cioè analoga a quella delle altre masse diabasiche dell'Appennino emiliano (Anelli 1922, Montanaro Gallitelli 1947). Esse sono costituite prevalentemente da un diabase rosso a struttura nettamente sferoidale con larghe chiazze violacee o verdastre, inter-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della Università di Modena con i mezzi messi a disposizione dal C.N.R. per ricerche sull'alloctono appenninico.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1956.

calato da porzioni irregolari di diabase afanitico verde, o più raramente da un diabase con inclusi porfirici di feldispato.

Il minerale a strati misti, riconoscibile per via roentgenografica, è presente in tutte le frazioni ottenute per sedimentazione frazionata dalla polvere del diabase verde a struttura porfirica e del diabase rosso, e si rivela notevolmente più abbondante in quelle frazioni formate da granuli con diametro equivalente inferiore a  $5\ \mu$ .

Tentativi eseguiti con un separatore magnetico hanno permesso di ottenere un concentrato con circa 10–15 % del minerale in esame. La sua separazione è stata effettuata al microscopio dopo aver esaminato ai raggi X tutti i minerali costituenti la roccia, separandoli singolarmente dalla frazione formata da granuli di  $30\text{--}100\ \mu$  di diametro.

Si è così giunti a stabilire che il minerale a strati misti si presenta in masserelle semiopache tondeggianti o irregolari di colore verde gialliccio o verde bruniccio di aspetto cloritico. Dalla clorite, pure presente nella roccia, si distingue per essere quest'ultima in lamine di colore verde intenso o in aggregati irregolari notevolmente trasparenti.

Un accurato e molto lungo lavoro di separazione al microscopio, accompagnato da un continuo controllo roentgenografico, ha consentito di raccogliere una quantità sufficiente di materiale puro sul quale sono state eseguite le osservazioni seguenti.

**PROPRIETÀ OTTICHE.** — Al microscopio il minerale si presenta in aggregati di minutissime fibrille di colore verde pallido con pleocroismo appena percettibile dal verde azzurrino parallelamente all'allungamento ( $\gamma'$ ) al verde azzurrino pallido perpendicolarmente ( $\alpha'$ ).

La birifrazione è bassa con colori di interferenza azzurro cupo. L'indice di rifrazione medio delle minuscole fibrille, col metodo di Becke e per la luce bianca, è risultato:

$$\gamma' = 1,584 \pm 0,002.$$

**RICERCHE ROENTGENOGRAFICHE.** — Registrazioni con un Diffratometro Hilger & Watts (fig. 1) e spettrogrammi sono stati eseguiti su polvere e su aggregati orientati sia del minerale naturale, sia dello stesso dopo averlo sottoposto a trattamenti diversi. Caratteristiche fondamentali, che appaiono subito evidenti, sono la sua appartenenza al gruppo dei minerali triottaedrici, e la esistenza di una serie completa di riflessioni basali ( $00l$ ) dal  $1^\circ$  al  $10^\circ$  ordine a partire da una periodicità di  $29\ \text{\AA}$  (Tabella I).

Il trattamento con glicerina provoca una espansione del reticolo da  $29$  a  $31\ \text{\AA}$  e la comparsa di quasi tutti gli ordini basali fino al  $10^\circ$ .

Il riscaldamento prolungato per 9 ore a  $330^\circ$  provoca solo piccole variazioni nelle intensità di alcune interferenze ( $00l$ ), mettendo in evidenza la stabilità del reticolo a questa temperatura. Riscaldamenti successivi a  $450^\circ$  provocano un forte indebolimento dell'interferenza ( $001$ ) che viene sostituita da una larga banda fra  $23$  e  $25\ \text{\AA}$ , nonché lo spostamento della ( $002$ )

a  $13,9 \text{ \AA}$ . Solo per riscaldamento a  $550^\circ$  si ha la comparsa di una debole banda sfumata a  $12-13 \text{ \AA}$ .

Queste caratteristiche corrispondono a quelle di un reticolo complesso formato dalla regolare alternanza di una unità strutturale cloritica a  $14,2 \text{ \AA}$  con altra a reticolo espandibile a  $14,6-14,8 \text{ \AA}$ . Che questa seconda unità non sia da identificare con la montmorillonite risulta dalla notevole resistenza che il nostro reticolo presenta al riscaldamento. Early e Brindley (1956) hanno infatti dimostrato che le associazioni regolari clorite-montmorillonite

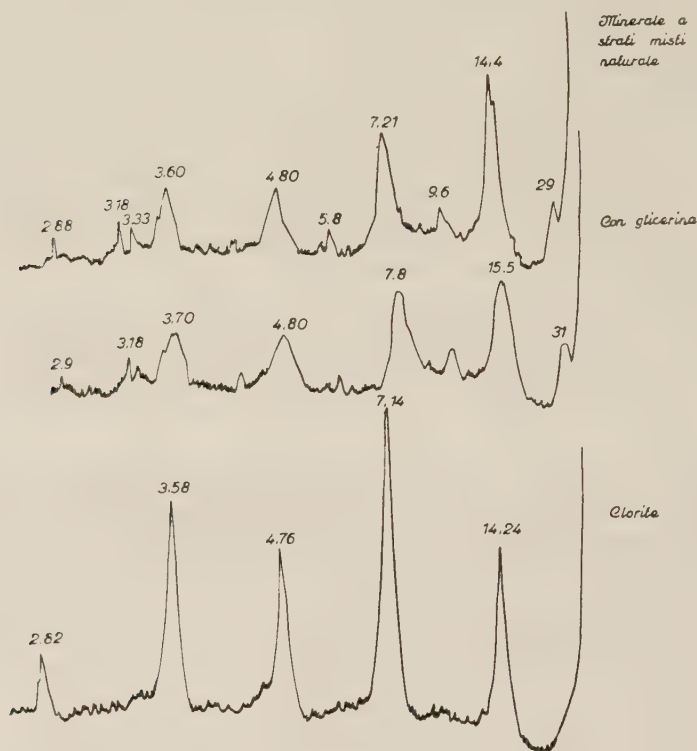


Fig. 1. - Registrazioni ottenute col diffrattometro su aggregati orientati.  $\text{Cu}_{ka}$ .

perdono la caratteristica interferenza a  $29 \text{ \AA}$  quando vengono riscaldate a  $85^\circ$ . Il minerale di Rossena e Campotrera mantiene invece inalterato il suo reticolo - e l'intensità dell'interferenza a  $29 \text{ \AA}$  - fino a  $330^\circ$ . Inoltre prove eseguite per identificare la presenza, nel reticolo complesso, dell'unità strutturale della montmorillonite, per mezzo dei saggi con benzidina, safranina Y e verde malachite (Mielenz, King, Schieltz, 1950), hanno dato esito completamente negativo.

Migliore accordo con le proprietà osservate si ha quando si consideri l'associazione regolare di un reticolo cloritico con uno vermiculitico. In questo caso si ha pure una dilatazione del reticolo dopo il trattamento con glicerina, ed una contrazione a  $24-25 \text{ \AA}$  per riscaldamento a  $550^\circ$ , ma la stabilità del reticolo è conservata fino a circa  $300^\circ$ .

TABELLA I.

*Interferenze osservate negli spettrogrammi e nelle diffrattometrie del minerale a strati misti di Rossena e Campotrera. Camera  $\varnothing$  114,6 mm.*

| Indici | naturale  | trattato con<br>glicerina   | riscaldato a    |                 |   |
|--------|---|---|-----------------|-----------------|---|
|        |   |   | 330°<br>(9 ore) | 450°            | 550°  |
| 001    | $\left\{ \begin{array}{l} 29 \text{ } m \\ 28,8^* \end{array} \right.$      | $\left\{ \begin{array}{l} 31 \text{ } m \\ 31,8^* \end{array} \right.$  | 28,5 <i>m</i>   | 25-23 <i>m</i>  | $\left\{ \begin{array}{l} 24,5-22,3 \text{ } m \\ 23,2^* \end{array} \right.$ |
| 002    | $\left\{ \begin{array}{l} 14,45 \text{ } ff \\ 14,40^* \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 15,6 \\ 15,3^* \end{array} \right.$           | 14,2 <i>ff</i>  | 13,95 <i>ff</i> | $\left\{ \begin{array}{l} 13,9-12,3 \text{ } f \\ 12,6^* \end{array} \right.$ |
| 003    | 9,60* <i>dd</i>   | 10,1 <i>dd</i>  |                 |                 |   |
| 004    | $\left\{ \begin{array}{l} 7,21 \text{ } ff \\ 7,20^* \end{array} \right.$   | $\left\{ \begin{array}{l} 7,8 \text{ } ff \\ 7,7^* \end{array} \right.$ | 7,13 <i>ff</i>  | 7,05 <i>f</i>   | 7,20 <i>f</i>   |
| 005    | $\left\{ \begin{array}{l} 5,80 \text{ } ddd \\ 5,76^* \end{array} \right.$  | 6,3 <i>ddd</i>  |                 |                 |   |
| 006    | $\left\{ \begin{array}{l} 4,76 \\ 4,80^* \text{ } f \end{array} \right.$    | 4,80 <i>f</i>   | 4,70 <i>f</i>   | 4,71 <i>m</i>   | 4,79 <i>m</i>   |
|        | 4,60 <i>ddd</i>   | 4,60 <i>d</i>   | 4,56 <i>dd</i>  | 4,56 <i>dd</i>  | 4,54 <i>dd</i>  |
| 007    | 4,10 <i>ddd</i>   |   |                 |                 |   |
| 008    | $\left\{ \begin{array}{l} 3,57 \text{ } f \\ 3,60^* \end{array} \right.$    | 3,70 <i>f</i>   | 3,55 <i>f</i>   | 3,56 <i>m</i>   | 3,48 <i>m</i>   |
|        | 3,33 <i>ddd</i>   | 3,33 <i>ddd</i>   |                 |                 |   |
| 009    | 3,18 <i>d</i>   | 3,25 <i>d</i>   | 3,17 <i>d</i>   | 3,18 <i>d</i>   | 3,12 <i>d</i>   |
| 0010   | $\left\{ \begin{array}{l} 2,88 \text{ } d \\ 2,90^* \end{array} \right.$    | 3,05 <i>d</i>   |                 | 2,85 <i>dd</i>  | 2,83 <i>dd</i>  |
| 0011   | 2,58 <i>d</i>   | 2,58 <i>d</i>   | 2,55 <i>d</i>   | 2,55 <i>d</i>   |   |
| 0012   | 2,41 <i>dd</i>  |   |                 |                 |   |
| 060    | 1,536* <i>m</i>   | 1,540 <i>m</i>  | 1,532 <i>d</i>  | 1,530 <i>m</i>  | 1,530 <i>m</i>  |
|        | 1,502 <i>dd</i>   | 1,505 <i>dd</i>   | 1,500 <i>dd</i> |                 | 1,500 <i>dd</i>   |
|        | 1,328 <i>dd</i>   |   | 1,328 <i>dd</i> |                 |   |

I valori segnati con asterisco corrispondono alle misure effettuate al diffrattometro ( $\text{Cu}_{k\alpha}$ ). Gli altri corrispondono alle misure effettuate sugli spettrogrammi per  $\text{Fe}_{k\alpha}$ .

Le intensità sono: *f* = forte; *m* = media; *d* = debole; *dd* = molto debole; *ddd* = appena percettibile.

Anche il rapporto di intensità fra gli ordini basali (00 $L$ ) - ben diverso da quello di una clorite tipica (fig. 1) - è in ogni caso molto simile a quello dei minerali del gruppo della vermiculite.

ANALISI TERMICA DIFFERENZIALE. - L'analisi D.T.A. è stata eseguita sia sulla porzione più fine separata per sedimentazione della polvere del diabase (curva A, fig. 2), sia sul minerale puro (curva B). Caratteristici sono i minimi endotermici a 150° e 210° - quest'ultimo molto debole - cui si accompagnano due forti reazioni dello stesso tipo a 615° ed a 840°, seguita quest'ultima da un netto picco esotermico fra 870° e 880°. L'andamento di questa curva corrisponde assai bene a quella del minerale a strati misti clorite-vermicu-

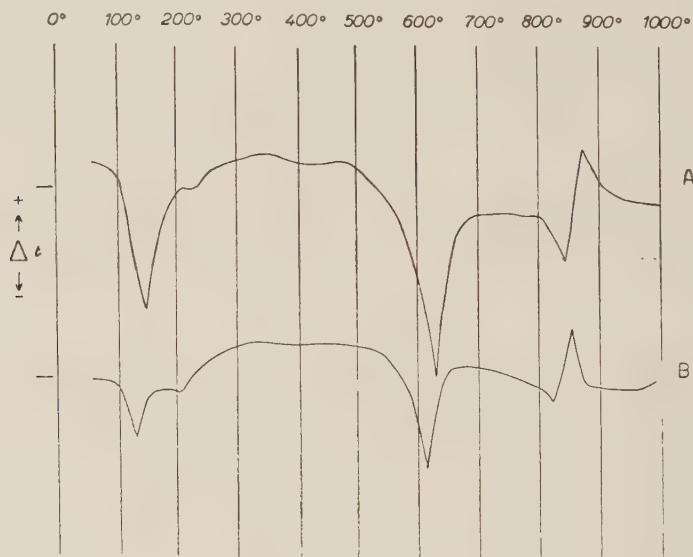


Fig. 2.

lite studiato da Bradley e Weaver (1956) ed alla corrensite di Lippmann (1954), e conferma la diagnosi fatta per via roentgenografica, che si tratti anche per il minerale di Rossena di una interlaminazione regolare clorite-vermiculite.

COMPOSIZIONE CHIMICA. - L'analisi chimica riportata nella tabella II è stata eseguita dalla dott.<sup>ssa</sup> Fr. Cremonesi, con i metodi semimicro attualmente in uso nell'analisi dei silicati, su due differenti porzioni del minerale puro separate dal diabase rosso di Rossena. L'analisi del minerale presente nel diabase verde a struttura porfirica di Campotrera è stata eseguita con i comuni metodi analitici su gr. 0,3 di sostanza. Nella stessa tabella II riporto per confronto le analisi del minerale a strati misti clorite-vermiculite di Juniper Canyon (Bradley, Weaver, 1956) e della vermiculite del Kenya studiata da Mathieson e Walker (1954).

TABELLA II.

|  | Minerale a strati misti clorite-vermiculite |                              |                | Vermiculite<br>Kenya |
|--|---|------------------------------|----------------|----------------------|
|  | Rossena<br>an. Cremonesi                    | Campotrera<br>an. Gallitelli | Juniper Canyon |                      |
| SiO <sub>2</sub> . . . . .               | 34,00                                       | 33,90                        | 41,2*          | 34,04                |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . . | 16,25                                       | 17,60                        | 12,1           | 15,37                |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . . | 12,60                                       | 10,92                        | 1,74           | 8,01                 |
| FeO . . . . .                            |   | 1,20                         | 0,39           | —                    |
| MgO . . . . .                            | 22,16                                       | 20,98                        | 22,00          | 22,58                |
| CaO . . . . .                            | 0,50  | 1,10                         | 1,40           | —                    |
| Na <sub>2</sub> O . . . . .              | 0,37  | 0,67                         | 0,07           | —                    |
| K <sub>2</sub> O . . . . .               | 0,28  | 0,68                         | 0,22           | —                    |
| H <sub>2</sub> O <sup>-</sup> . . . . .  | 13,95                                       | 2,92                         | 6,80           | —                    |
| H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> . . . . .  |   | 9,83                         | 15,40          | 19,93                |
|  | 100,11                                      | 99,80                        | 101,32         | 99,93                |
| Potere di scambio                        | 37 me/100 gr.                               |                              | 40 me/100 gr.  | 130 me/100 gr.       |

0,20 Na<sup>+</sup>, K<sup>+</sup>, Ca<sup>2+</sup>Rossena [Si<sub>2,59</sub>Al<sub>1,41</sub>] [Al<sub>0,008</sub>Fe<sub>0,72</sub><sup>3+</sup>Mg<sub>2,50</sub>] O<sub>10</sub>(OH)<sub>2</sub> 2,54 H<sub>2</sub>OCampotrera [Si<sub>2,57</sub>Al<sub>1,43</sub>] [Al<sub>0,03</sub>Fe<sub>0,69</sub><sup>3+</sup>Mg<sub>2,37</sub>] O<sub>10</sub>(OH)<sub>2</sub> 2,22 H<sub>2</sub>OJuniper Canyon S<sub>6</sub>Al<sub>3</sub>Mg<sub>8</sub>O<sub>20</sub>(OH)<sub>10</sub> + 4 H<sub>2</sub>OVermiculite Kenya [Si<sub>2,72</sub>Al<sub>1,28</sub>] [Al<sub>0,16</sub>Fe<sub>0,48</sub><sup>3+</sup>Mg<sub>2,36</sub>] O<sub>10</sub>(OH)<sub>2</sub> 4,32 H<sub>2</sub>OMg<sub>0,32</sub><sup>2+</sup>(\*) Compresa circa il 20 % di SiO<sub>2</sub> libera.

Dall'esame dei risultati ottenuti risulta che il minerale di Rossena e di Campotrera ha un elevato contenuto in Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ed un relativamente basso contenuto di H<sub>2</sub>O. È però molto evidente la stretta analogia di composizione sia con il minerale di Juniper Canyon, sia con la vermiculite del Kenya. L'alto contenuto in MgO e Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> risulta in ottimo accordo con il carattere triottaedrico del minerale, mentre il contenuto in ioni scambiabili trova la sua corrispondenza nel potere di scambio non eccessivamente elevato e simile a quello del minerale di Juniper Canyon.

Per la sua composizione chimica il minerale a strati misti di Rossena e Campotrera si inquadra assai bene nella famiglia dei minerali dovuti a una

interlaminazione regolare del reticolo cloritico con quello vermiculitico, e mostra una stretta analogia sia col minerale di Juniper Canyon, sia con la vermiculite del Kenya.

Se ora si passano a considerare le condizioni di giacitura di questo caratteristico minerale è possibile fare qualche interessante osservazione.

Lo studio microscopico dei diabasi che lo contengono (diabase rosso e diabase verde a struttura porfirica) ha messo in evidenza che il minerale cloritico è in essi tutt'altro che scarso ed è costituito da due termini differenti. Oltre alla clorite in lamine e con le note proprietà ottiche - riconosciuta come tipica clorite anche all'esame roentgenografico - sono presenti, come già si è detto dianzi, masserelle verdi dovute a un'intreccio di finissime fibrille, assai difficilmente risolvibile anche con i più forti ingrandimenti, quasi del tutto estinte, con colori di polarizzazione azzurro cupo ed assai raramente gialli di I ordine. Numerose serie di spettrogrammi hanno dimostrato che di questi due ultimi minerali quello a birifrazione più bassa è il minerale a strati misti a  $29 \text{ \AA}$ , mentre quello con i colori di interferenza gialli di I ordine è riferibile a clorite.

Per quanto riguarda la distribuzione del minerale entro il diabase si può osservare che talvolta esso forma aggregati sferoidali - che al massimo raggiungono 0,2 mm. di diametro - più spesso è in esili venule o in aggregati che occupano il posto dell'originario pirosseno, del quale qua e là è ancora riconoscibile qualche minuto frammento. In generale il nostro minerale è in masserelle di assai piccole dimensioni e non dà origine, almeno nei campioni studiati, a concentrazioni di qualche entità.

Tale modo di presentarsi non lascia dubbi sulla genesi del minerale stesso, che appare originato dagli stessi processi di mobilizzazione di ioni dovuti ai fenomeni idrotermali che hanno provocato la trasformazione della roccia diabasica, ed in particolare la scomparsa del pirosseno e la sua sostituzione con il minerale di tipo cloritico. Questa interpretazione trova conferma nel fatto che il minerale a strati misti manca nella roccia diabasica con plagioclasio e pirosseno ancora freschi, e che esso fa la sua apparizione solo in quelle facies rocciose dove il pirosseno è completamente sostituito.

Sulle modalità che possono aver portato alla sua genesi, le osservazioni suddette inducono a pensare che essa sia avvenuta in quei soli punti ove si avevano condizioni adatte di ambiente (pH) che non debbono essere state comuni a tutta la roccia, se si giudica dalla distribuzione del minerale stesso. Che esso rappresenti una trasformazione della clorite della roccia sembra poco probabile data la maggiore stabilità del reticolo della clorite rispetto a quella del minerale a strati misti, e la maggiore diffusione della clorite stessa. Lo studio di tutte le facies diabasiche di Rossena e di Campostrera ha dimostrato infatti che quelle porzioni di roccia intensamente verdi nelle quali si è avuta la formazione di masse cospicue di clorite o che hanno subito azioni evidenti di laminazione, non contengono neppure tracce del

minerale a strati misti; e che anche le numerose venule verdi che attraversano la roccia, spesso con abbondante calcite, sono costituite da una clorite tipica.

Sembra perciò verosimile che nella roccia diabasica il minerale a strati misti clorite-vermiculite rappresenti un prodotto derivato dalla trasformazione del pirosseno, piuttosto che della clorite, in un ambiente nel quale era stata mobilizzata la maggior parte del  $\text{Na}^+$  e del  $\text{K}^+$  dei feldspati, ma che pure conservava carattere alcalino per la presenza di forti quantità di ioni  $\text{Mg}^{++}$ .

Per quanto riguarda la stabilità del minerale a strati misti è da notare che negli sferoidi diabasici e nelle facies diabasiche rosso-verdastre (che in sezione sottile appaiono notevolmente alterate e con pochi relictii dell'originario feldspato) è possibile riconoscere ancora la presenza di piccole quantità del minerale a  $29 \text{ \AA}$ . Si tratta in questo caso di masserelle verdicce o biancastre opache, traslucide, che all'esame ai raggi X rivelano la presenza di una larga banda fra  $25$  e  $29 \text{ \AA}$ , che si sposta a  $31 \text{ \AA}$  per trattamento con glicerina. Con ogni evidenza è lo stesso minerale a strati misti, che differisce però da quello del diabase verde dianzi descritto per una successione irregolare o disordinata dei foglietti cloritici e vermiculitici. Tale stato di maggiore disordine si va accentuando nel minerale ancora presente nei prodotti di disfacimento della massa diabasica e nelle argille rosse che circondano la massa diabasica stessa. Negli spettrogrammi ottenuti da queste argille si osserva infatti una larga banda a  $24\text{--}29 \text{ \AA}$  del tutto simile per struttura e per comportamento a quella osservata nelle argille di Sassomorello e Castelvecchio (Gallitelli, 1955 *b*).

Appare quindi evidente che la regolarità nell'alternanza dei foglietti clorite-vermiculite, massima nel minerale a strati misti del diabase, va diminuendo in quello presente nei suoi prodotti di disfacimento e nelle argille rosse che tali prodotti ancora contengono. Essa risulta perciò strettamente legata alle condizioni dell'ambiente nel quale il minerale è venuto a trovarsi dopo la sua formazione.

Da tutto quanto precede si può dunque concludere che il minerale a strati misti clorite-vermiculite, già noto come costituente delle argille scagliose sopracretacee appenniniche, si ritrova anche nelle rocce eruttive diabasiche di Rossena e Campotrera inglobate nell'alloctono dell'Appennino stesso. In queste rocce esso ha preso origine dal pirosseno durante quei fenomeni di mobilizzazione di ioni, legati alle azioni idrotermali, che hanno portato alla completa alterazione della roccia diabasica. La regolarità nell'interlaminazione dei reticoli clorite vermiculite, massima nel minerale del diabase, va diminuendo nei prodotti del suo disfacimento. Nelle argille che circondano tale roccia è ancora riconoscibile un minerale di questo tipo, caratterizzato da una successione dei foglietti cloritici e vermiculitici irregolare, causata dalle condizioni di ambiente nelle quali tali argille si sono trovate.

## LAVORI CITATI NEL TESTO.

- ANELLI M., 1922. - *I dintorni di Rossena*, « Boll. Soc. Geol. It. », vol. 41, pp. 17-29.
- BRADLEY W. F., WEAVER C. E., 1956. - *A regularly interstratified chlorite-vermiculite clay mineral.*, « Am. Min. » vol. 41, pp. 497-504.
- EARLY J. W., BRINDLEY G. W., MCVEAGH W. J., VANDEN HEUVEL R. C., 1956. - *A regularly interstratified montmorillonite-chlorite*, « Am. Min. », vol. 41, pp. 258-267.
- GALLITELLI P., 1955 a. - *Clay minerals of the Argille scagliose of the Modenese Appennines*, « Clay Miner. Bull. », vol. 2, pp. 275-280.
- GALLITELLI P., 1955 b. - *Ricerche su alcune argille della formazione argilloscistosa appenninica. - I. Le argille della zona di Varana, Sassomorello e Castelvécchio nell'Appennino modenese*, « Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat. », vol. 62, pp. 88-124.
- GALLITELLI P., 1956. - *Osservazioni sul prodotto di argillificazione del diabase della Guardiola di Rossena nell'Appennino emiliano*, « Rend. Soc. Min. It. », vol. 12, pp. 139-144.
- LIPPMANN FR., 1954. - *Ueber einen Keuperton von Zaisersweiher bei Maulbronn*, « Heidelb. Beitr. Miner. Petrogr. », vol. 4, pp. 130-134.
- LIPPMANN FR., 1956. - *Clay minerals from the Röt member of the Triassic near Göttingen. Germany*, « Journ. Sedim. Petrology. », vol. 26, pp. 125-139.
- MATHIESON A.McL., WALKER G. F., 1954. - *Crystal structure of magnesium-vermiculite*, « Am. Miner. », vol. 39, pp. 231-255.
- MIELENZ R. C., KING M. E., SCHIELTZ N. C., 1950. - *Analytical data on reference clay minerals*. 6. Staining tests. Am. Petr. Inst. Project 49. Preliminary Report 7. pp. 135-160.
- MONTANARO GALLITELLI E., 1947. - *Argillificazione del diabase e genesi di alcune argille scagliose appenniniche*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. 8, pagg. 815-821.

**Giacimenti minerari.** — *Depositi italiani magmatogeni e idrotermali da attività vulcaniche sottomarine*. Nota (\*) del Corrisp. ANTONIO CAVINATO.

## PREMESSE.

Conseguono da esalazioni idrotermali che sfociano nei fondi di bacini di sedimentazione marina.

La esalazione sottomarina si ipotizza formata da correnti di acqua gazzosa o liquida in cui sono in soluzione, od in sospensione colloidale, alogenuri, solfuri, solfati, carbonati, ecc. dei metalli; alogenuri di silicio, silice libera, anche gayseriana, ecc.: una composizione, dunque, non diversa da quella che si postula per gli ordinari convogli metallizzanti idrotermali: salvo la necessità di dover ammettere che queste esalazioni sottomarine abbiano, talora, alta concentrazione, specie in solfuri colloidali, e sfocino ad alta pressione.

Nella generalità dei casi, esse, rappresentano una fase esalativo-idrotermale o fumarolica, di una attività vulcanica subacquea; e, quindi, sono

(\*) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1956.

precedute da eruzioni laviche e tufacee, oppure con queste sono intervallate.

Si possono così creare anche dense nubi, che sono una mescolanza di materiale esalativo e di fine pulviscolo tufaceo.

L'esalativo colloidale cade, trascinandosi alquanto tufo e formando coaguli.

L'esalativo in soluzione, per il raffreddamento, e per varie reazioni con l'acqua, facilmente intuibili, precipita per lo più in forma di «germi» che, cadendo, si accrescono per deposizione, intorno ad esso, di nuovo precipitato e di tufo, assumendo così una tessitura concentrica: *quella oolitica*.

L'inizio della enucleazione «oolitica» può compiersi oltreché intorno ad un germe formatosi per precipitazione chimica, anche intorno a granuli clastici, o spoglie di organismi, anche strappati dal fondo marino dalle esplosioni e dalle esalazioni, od intorno ad organismi ancor viventi e natanti.

Circa la necessità di aver delle acque mosse per il formarsi dell'«oolitico», essa è, in abbondanza, soddisfatta dal turbinio che determinano le effusioni.

In sì fatti modi ha luogo una deposizione che può rivestire aspetti variabilissimi geo-minerari.

Ad esempio nell'*oolitico ferrifero* della Nurra (Sardegna), la singola oolite è formata da strati concentrici di una clorite fibrillare con pleocroismo dal verde-giallino chiaro al verde erba scuro, ad estinzione parallela, allungamento ottico positivo, angolo degli ottici negativo e variabile tra gli otto ed i sedici gradi. La singola oolite imprigiona da 10 sino a 20-30 cristallini di magnetite e qualche cristallino, pure minutissimo, di quarzo. Il cemento tra oolite ed oolite e nella generalità dei casi del talco, sempre ricco di siderite, è talvolta anche ricco in quarzo.

Concluso il periodo di attività vulcanica che è sempre una frazione insignificante del totale ciclo sedimentare, il processo di sedimentazione terrigena ed organogena continua: quindi il produttivo, eventualmente coltivabile, formatosi nei modi ora illustrati, viene ricoperto.

Le caratteristiche complessive geo-minerarie che conseguono per il deposito utile che per tal via si formi possono, e sono, variabilissimi, è vero, ma nonostante ciò, *tre sono* le inconfondibili *proprietà* che fanno di questi depositi una classe con propria inconfondibile individualità:

1° essi hanno forma sedimentare; e possono, in certo senso, considerarsi facies eteropiche rispetto ai sedimenti coevi clastici ed organogeni che fanno parte della formazione, soprattutto non hanno *nessuna autonomia stratigrafica* rispetto al complesso della formazione alla quale appartengono;

2° essi hanno condiviso *tutte* le vicende tettoniche, del complesso stratigrafico in cui sono inseriti;

3° essi sono caratterizzati da una evoluzione metamorfica provocata e controllata dalle identiche condizioni fisiche che provocarono e controllarono quella del complesso stratigrafico: anche se talora i risultati furono diversi: e ciò in conseguenza della loro diversa natura.

E se la loro particolarità di assestamento stratigrafico-strutturale può risultare talora incoerente, rispetto al rimanente pacchetto stratigrafico, ciò è da attribuirsi, unicamente, alle loro peculiarità meccaniche, per cui alle sollecitazioni delle forze corrugatrici essi hanno diversamente reagito.

Come è avvenuto alla Nurra, dove quei banchi ferriiferi, cui lo scrivente ha già assegnata una genesi per eruzione sottomarina, per la loro alta coerenza, hanno, talora, assunto, per le sollecitazioni meccaniche cui furono sottoposti durante il diastrofismo ercinico, rapporti di giacitura del tutto anomali, sino a tipicamente discordanti, rispetto agli argilloscisti facilmente modellabili, nei quali essi banchi ferriiferi sono di regola concordemente interstratificati.

La località in cui il disordine tra plastico e clastico ha toccato lo scolastico è La Colti.

Depositi di questo tipo ricorrono in ogni parte del mondo: il ferriifero del Lahn e del Dill<sup>(1)</sup> (Westfalia); il piritoso-zincifero-baritico di Meggen<sup>(2)</sup>; i ferriiferi di Elbingerode e di Huttenrode nell'Harz, ecc.

Appartengono a svariate età geologiche dal cambriano al mesozoico.

#### DEPOSITI ITALIANI.

Presso di noi i più caratteristici sono:

- 1° i ferriiferi della Nurra (Sardegna);
- 2° gli ocracei-diasprigni di Capo Rosso (Isola di S. Pietro);
- 3° i piritosi di Chialamberto e di Calceranica;
- 4° gli uraniferi di Peveragno;
- 3° il solfatarico di Vulcano.

Che i depositi ferriiferi della Nurra conseguano da esalazioni sottomarine è già stato illustrato<sup>(3)</sup>; non sono state però ancora studiate le condizioni paleogeografiche e paleomorfologiche della geosinclinale al tempo della loro formazione.

Del pari è noto che analoga genesi hanno le metallizzazioni diasprigno-ocracee dell'Isola di S. Pietro<sup>(4)</sup>.

*Chialamberto.* - Anche a questa miniera è assegnabile una analoga genesi.

(1) W. KEGEL, *Ueber das diabaszulkanismus in Lahn-Dill*, «Gebiet. jahrb. Pr. Geol. Landesanstalt», 53, 936-946 (1935).

(2) H. EHRENBURG, A. PILGER und F. SCHRODER, *Das schwefelkies-Zinkblende-Schwerspartlager von Meggen - Monographien der Deutschen blei-Zink Erzlagertstätten*.

(3) A. CAVINATO, *Metallizzazioni a forma sedimentare per esalazioni sottomarine. I depositi ferriiferi della Nurra*, «Atti del Congresso Minerario italiano», 1948; A. CAVINATO, *Le pietre verdi della Sardegna*, «Atti dell'Accademia dei Lincei», 1956.

(4) A. CAVINATO, *Ocre e diaspri di Capo Rosso*, «Resoconti dell'Associazione Mineraria Sarda», 1956, 6°.

È costituita da sottili banchi di potenza variabile da pochi centimetri a 50-60 centimetri, estesi per oltre un chilometro quadrato: nei banchi il tenore in pirite è pure variabile da un 15-20% al 95%. Le matrici sono: quarzo, muscovite, sericite, albite, soizite, titanite, ecc.

Questi banchi di minerale poggiano su una anfibolite sodica glaucofanica-granatifero-epidotica, con alquanto pirite e titanite: la pirite raggiunge talvolta il 5-10%. Sono ricoperti da una prasinite cloritico-epidotica. Sia la prasinite che la anfibolite hanno forma lenticolare appiattita, e sono a loro volta intercluse nelle formazioni gneissiche e micascistose.

I singoli strati di pirite, le lenti di anfibolite e di prasinite, le formazioni gneissiche formano un complesso stratificato rigorosamente concordante. Il motivo tettonico è comune (un'ampia sinclinale); le accidentalità stratigrafiche le stesse (qualche faglia con piccoli rigetti); l'azione metamorfica uguale in tutto il complesso stratigrafico (frantumazioni, cristalloblastesi, fibroblastesi, lenticolarità, ecc.).

Per cui è convincente assegnare alle rocce verdi (prasinite ed anfibolite) una genesi per eruzione lavica sottomarina, ed alla pirite per esalazione idrotermale sottomarina ed in parte per eruzione sottomarina di un magma altamente « piritoso ». In questo ultimo caso si ha una facies produttiva che è di segregazione magmatica del tipo particolare di piccola colata sottomarina.

*Calceranica.* — Si tratta di un esteso banco di pirite che ai bordi è sottile, e nella sua parte centrale spesso anche oltre tre metri con a tetto ed a letto una roccia eruttiva prasinitico-cloritico-micacea; così come micaceo-cloritico-quarzosa è la matrice del produttivo. Spesso il banco piritoso sfuma nella roccia eruttiva traverso successivi arricchimenti in matrice.

Sia il banco di pirite che gli strati rocciosi piroclastici che lo rivestono, ricorrono entro alla potente formazione filladica affiorante nell'area per parecchi chilometri quadrati.

Anche qui la concordanza stratigrafica tra filladico, banco piritoso e piroclastico è rigorosa; anche qui il motivo tettonico, le modulazioni stratigrafiche e relativi disturbi sono le medesime per tutto l'insieme; anche qui, il tutto, sottoposto alle medesime forze ed azioni diagenetico-metamorfiche.

Per cui anche per la genesi di questa mineralizzazione consegue la medesima formulazione.

Avrebbe alto interesse precisare le condizioni paleogeografiche e paleomorfologiche esistenti all'atto dell'eruzione; avrebbe interesse accertare se le due separate lenti che attualmente si coltivano, provengono da separate eruzioni, sgorganti da due distinti e distanti ombelichi vulcanici, ed avvenute in tempi successivi, e, quindi appartenenti a livelli stratigrafici diversi; oppure se conseguano da fagliatura e rigetto di un *unico* primitivo banco.

Consequirebbero ragionati criteri circa la consigliabilità di ricerche e modalità per condurle.

*Peveragno.* - Di accentuata attualità è il discorso sugli arricchimenti uraniferi di Peveragno, Chiusa Pesio, Lurisia <sup>(5)</sup> ecc.

Quivi sopra alle filladi ed a quarziti ricorre la formazione eruttiva dei porfiroidi: gneis porfiroidi, scisti sericitici porfiroidi, tufi porfiroidici sericitici.

Clastico ed eruttivo formano una serie comprensiva ben stratificata e concordante anche nelle scistosità, avendo essi condivise le stesse vicende tettoniche e diagenitico-metamorfiche dopo la loro deposizione.

Entro al porfiroidico, ricorrono interstratificati, ben concordanti, a diversi livelli, dei sottili strati di quarzo, dello spessore medio di cinque centimetri, nei quali ricorrono anche minerali uraniferi: ossidi pulverulenti, qualche cristallino di uraninite ecc.

Questi straterelli di quarzo hanno le tre proprietà precisate nelle premesse: per cui assegniamo ad essi una formazione conseguente da esalazioni idrotermali sottomarine: eventualmente alquanto tufacee. Anche il porfiroidico nel quale essi straterelli sono concordemente interstratificati consegue da eruzioni laviche e tufacee pure subacquee.

Le altre forme che i corpi mineralizzati ad uranio possono rivestire, i minerali secondari cui possono dar luogo per alterazione i minerali uraniferi primari, sono stati già illustrati nei lavori dello scrivente citati in nota.

La possibilità, anzi la probabilità, che mineralizzazioni stratificate, uguali a quelle qui descritte, od anche occasionalmente discordanti, ricorrono anche nel clastico, non dovrebbe aver bisogno di essere qui ribadita.

Piuttosto stimiamo opportuno *ripetere* un cenno sulle consistenze perché il pubblico minerario possa formarsi una idea circa il valore economico di quelle concentrazioni.

Gli straterelli di quarzo a solfurati vari ed a minerali anche uraniferi, hanno il sopradetto spessore medio di cinque centimetri, ed hanno una scarsa estensione: qualche migliaio di metri quadrati. Ogni uno di essi ricorre in un proprio livello stratigrafico: per cui, per coltivare uno straterello è d'uopo abbattere i soliti 1,5-2 metri di spessore di roccia.

Il tenore in uranio metallo, nello straterello dello spessore medio di cinque centimetri, è intorno al 0,21 % (media di alcune analisi). Il tenore sull'abbattuto scende, quindi, a 0,007 %, oppure a 0,005 % a secondo dello spessore dell'abbattuto. Inoltre, sul cernito a mano, l'uso degli ordinari metodi di arricchimento non ha dato risultati incoraggianti.

Per l'estrazione del metallo dovrà quindi procedersi con trattamenti chimici sul cernito a mano, solo parzialmente arricchito.

(5) Chi scrive ebbe già occasione di occuparsene (l'« Industria Mineraria », 1950, fasc. 5; 1951, fasc. 10): ma sembra che quei suoi cenni siano passati inosservati dato che una posteriore non egregia letteratura non ne fa menzione, neppure per semplice citazione bibliografica.

Inoltre gli straterelli individuati sono, attualmente, ben pochi, e non si ha la guida di ragionati criteri per cercarne altri, se non quelli conseguenti dalla interpretazione genetica esposta sopra, e dai prodotti di ossidazione dei minerali uraniferi che compaiono in superficie.

*Il solfatarico di vulcano.* — Nell'isola di Vulcano (gruppo delle Lipari) ricorrono fumarole, in gran numero: le quali entro alle screpolature, ma specie all'aperto, depositano il solfo. Ciò è ben noto.

La forma del deposito è a « mucchio » quando la fumarola eroga nell'aria: a « mucchio » intorno alla sua bocca.

Ma vi è una fumarola, la cui bocca è sotto al livello del mare (ad oriente dell'Isola, verso Lipari). Il solfo che essa emette, dopo aver turbinato nell'acqua, si spande, facilitato anche dal moto ondoso, e si deposita su una larga superficie del fondo marino. Si deposita insieme ad alquanto terrigeno ed a qualche alga ed a qualche conchiglia, assumendo forma sedimentare, la più franca.

Non è da escludere che gli eventi, nel decorso dei tempi, ne facciano un deposito del tipo di quelli sopradescritto. È un esempio che dimostra la possibilità del formarsi di tali depositi: e che può persuadere dell'alto valore probativo delle ipotesi genetiche formulate per i depositi di cui qui si è discusso.

*Avvertenza.* — Anche altri depositi utili italiani in rocce verdi: Ollomont, S. Marcel, Praly, Predoi potrebbero avere una tale genesi. Chi scrive li visitò molti anni fa, e non seppe rendersi conto del processo formativo; e non lo persuadeva quello che ad essi, altri autori avevano assegnato (Si veda in proposito la letteratura).

Avvertiamo ancora che il convoglio metallizzante (od il magma) può depositare (o consolidare) anche nelle vie che attraversa prima di sfociare nel fondo marino. In tale caso il produttivo oltreché la parte stratificata e concordante, ha apofisi (o radici), che nella generalità dei casi, sono, grosso modo, ortogonali alla stratificazione, ed hanno la forma di quelle vie (ombelichi, screpolature a decorso di incassamento regolare, ecc.).

È implicito che analoga genesi viene assegnata alle rocce vulcaniche nelle quali questi tipi di arricchimenti sono interstratificati. Le quali, pertanto, avevano, all'origine, forma sedimentare: e la potenza dello strato era pressoché uguale alla attuale.

È implicita l'esclusione di stiramenti e di laminazioni su larga scala, e di imposte concordanze ad esse rocce e ad essi depositi, conseguenti dagli eventualmente subiti posteriori assestamenti strutturali.

**Fisiologia.** — *Le reazioni elettriche provocate nel cervelletto di Gatto dallo stimolo fotico e derivate in profondità* (\*). Nota (\*\*) di GIAN PIETRO VON BERGER, ETTORE FADIGA e GIULIO CESARE PUPILLI, presentata dal Socio G. C. PUPILLI.

Le reazioni elettriche che per effetto d'impulsi provenienti dalle stazioni ottiche mesencefaliche si registrano dalla superficie dorsale del cervelletto di Gatto, sono state analizzate in una serie di ricerche esposte in Note precedenti<sup>(1,2,3)</sup>. Abbiamo continuato il nostro studio, prendendo in esame la risposta cerebellare derivata in profondità e paragonandola con quella ottenuta in superficie per quanto riguarda il segno, la forma e l'ampiezza: a tale scopo, abbiamo registrato simultaneamente la risposta alla stimolazione fotica ottenuta dalla superficie di una lamella cerebellare, secondo il procedimento descritto in precedenza, e quella derivata da strati profondi della lamella medesima.

La esplorazione in profondità era eseguita mediante fili di Pt del diametro di  $20\ \mu$  e rivestiti, fuorché in punta, di un sottile strato di vetro tirato alla fiamma. Questi elettrodi, aventi una resistenza media di  $20.000\ \Omega$  e il diametro esterno di  $60-80\ \mu$ , erano fissati al micromanipolatore dell'apparecchio stereotassico (mod. Dell) e collegati con un preamplificatore Grass mod. P 4, connesso col secondo pennello catodico dell'oscillografo; la derivazione era, come in superficie, monopolare. L'elettrodo di profondità veniva progressivamente introdotto nell'interno della lamella, in modo da derivare le risposte da punti situati sulla normale alla superficie della struttura, mentre la sede dell'elettrodo di superficie veniva mantenuta invariata per tutta la durata delle osservazioni; era così possibile in ogni grafico comparare direttamente i fenomeni superficiali e quelli profondi. La esplorazione dell'attività elettrica veniva fatta a livelli di profondità progressivamente crescenti di  $50\ \mu$ ; la posizione raggiunta dall'elettrodo era poi controllata istologicamente.

La corteccia esplorata in profondità è la vermiana. Nelle condizioni sperimentali indicate si osservano differenze di forma e segno tra le risposte

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1956.

(1) E. FADIGA, G. C. PUPILLI e G. P. VON BERGER, *Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8<sup>a</sup>, questo volume.

(2) E. FADIGA, G. C. PUPILLI e G. P. VON BERGER, *Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto trattato con cloralosio*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8<sup>a</sup>, questo volume.

(3) G. P. VON BERGER, E. FADIGA e G. C. PUPILLI, *Gli effetti della stimolazione diretta del N. ottico sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8<sup>a</sup>, questo volume.

derivate a determinati livelli di profondità e quelle registrate in superficie: ciò si verifica sia in animali non narcotizzati, sia in quelli trattati con cloralosio (in dose di 70 mg/kg per via intraperitoneale), a livelli corrispondenti nei due casi. Le modificazioni che compaiono col procedere della esplorazione si riscontrano con grande costanza in tutti i preparati.

Dall'esame degli elettrogrammi risulta in generale quanto segue: finché la punta dell'elettrodo non oltrepassa i 350-450  $\mu$  all'incirca, le onde elettriche riflesse derivate in profondità non sono sostanzialmente diverse da quelle registrate con l'elettrodo di controllo; oltrepassati detti limiti, e fino a 450-

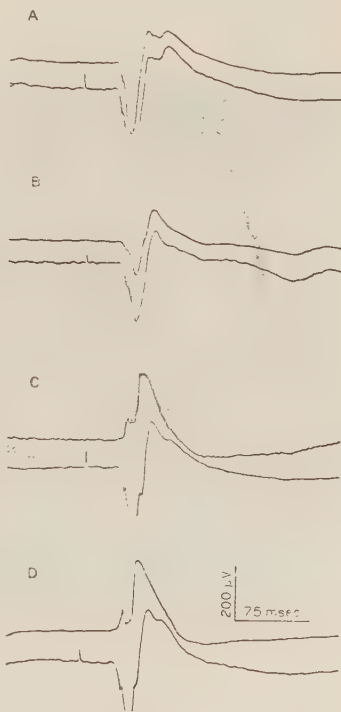


Fig. 1. - Evoluzione formale della risposta allo stimolo fotico registrata dal verme cerebellare di Gatto durante la penetrazione di un elettrodo in profondità.

Animale cloralosato. Ciascuna registrazione comprende i tracciati dell'attività elettrica riflessa derivata dalla profondità (in alto) e dalla superficie (in basso) di una medesima lamella del *folium vermis*. In A, B, C e D la posizione dell'elettrodo di superficie è mantenuta costante, mentre la punta dell'elettrodo di profondità trovasi rispettivamente a 200, 550, 780 e 830  $\mu$ . I *flashes* sono indicati dall'artefatto, ottenuto mediante il circuito derivato del fotostimolatore; la polarità negativa corrisponde alla deflessione verso l'alto.

550  $\mu$ , si nota una progressiva diminuzione di ampiezza della componente positiva della risposta; a profondità maggiori (a partire da 550-650  $\mu$ ) si deriva una oscillazione negativa, che spesso appare interrotta da una deflessione di segno opposto e quasi sempre è seguita da un'onda positiva di scarsa ampiezza e di durata alquanto lunga (fig. 1). La risposta ottenuta in superficie e quella derivata in profondità principiano contemporaneamente: la durata della oscillazione negativa che essenzialmente costituisce la risposta profonda, è pressoché equivalente alla somma delle durate delle due componenti principali della risposta superficiale.

In alcuni casi, la descritta inversione di polarità della reazione elettrica è apparsa a livelli più profondi (intorno a 800-900  $\mu$ ) ovvero più prossimi alla superficie (400-450  $\mu$  circa). Questo fatto risulta comprensibile: per un determinato valore lineare, la posizione della punta esplorante rispetto agli

strati della corteccia non era infatti sempre la stessa nei diversi preparati, il che è potuto accadere sia perché lo spessore della sostanza grigia può variare da lamella a lamella, sia perché l'affondamento dell'elettrodo, nonostante le cautele usate, non in tutti gli esperimenti era stato effettuato in direzione normale alla superficie, come si è potuto rilevare nei preparati di controllo. In ogni caso, l'esame delle sezioni istologiche dimostra che la punta dell'elettrodo, al momento della inversione di polarità della risposta, si trova nello strato granuloso (fig. 2).

In esperimenti eseguiti più specialmente sul *lobulus ansiformis*, abbiamo esaminato i potenziali che si registrano, sempre per effetto della stimolazione fottica, dalla sostanza bianca immediatamente sottostante alla corteccia, a

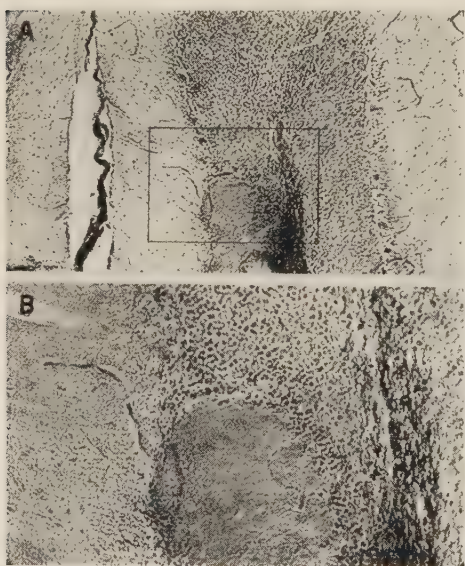


Fig. 2. - Sezione trasversale di una lamella del *folium vermis* di Gatto.

Colorazione col metodo di Weil. A, ingr.  $\times 65$ ; B, particolare di A (ingr.  $\times 160$ ). Nella sede corrispondente alla zona di elettrocoagulazione, visibile nello strato granuloso, si trovava la punta dell'elettrodo al momento della inversione di polarità della risposta.

profondità maggiori di mm 1 e fino a mm 4. In corrispondenza di entrambi i *crura*, il segno della oscillazione registrabile dalla sostanza bianca è negativo e l'ampiezza della oscillazione stessa è molto maggiore (fino a un massimo di 10 volte) rispetto alla risposta derivata in superficie; a tale oscillazione fa costantemente séguito un'onda positiva lenta, della durata di 100-200 msec e notevolmente più ampia di quella con cui di frequente termina la risposta in superficie. Confrontando le durate della latenza dei fenomeni elettrici superficiali e di quelli profondi, si rileva che la comparsa delle due risposte è contemporanea nel *crus I*; quanto al *crus II*, dove la reazione registrata dalla superficie s'inizia comunemente con una oscillazione positiva [cfr. Fadiga, Pupilli e von Berger<sup>(2)</sup>], questa si manifesta con un ritardo di qualche msec (5-8) rispetto all'onda derivata in profondità. Se la risposta superficiale del *crus II* presenta inizialmente una deflessione negativa di scarsa ampiezza, l'inizio di tale accidente coincide con quello dell'onda negativa profonda. L'esame delle sezioni istologiche mostra come tale andamento

abbiano le reazioni derivate a livelli di profondità che corrispondono, nei vari preparati, ai prolungamenti intralamellari del corpo midollare o a questo stesso.

Alla possibilità di derivare onde negative di grande ampiezza mediante elettrodi introdotti nell'interno della sostanza bianca, si è data evidenza anche in esperimenti eseguiti sul verme. In questo caso l'infissione della punta dell'elettrodo nella sostanza bianca lamellare risulta per altro meno agevole che per la derivazione dagli emisferi: la maggiore profondità dei solchi, il loro più frequente incrociarsi e il conseguente infittirsi delle lamelle in corrispondenza del verme fanno sì che la punta stessa ne trapassi meno facilmente la sostanza grigia.

I risultati ora esposti vanno messi in relazione con quelli fatti noti precedentemente <sup>(1,2,3)</sup>: si dispone così di una serie di osservazioni che permette di dare delle risposte destinate nel cervelletto dagli impulsi trasmessi per le vie ottiche una interpretazione sostanzialmente analoga a quella proposta da Bremer e Bonnet <sup>(4)</sup> e da Bremer e Gernandt <sup>(5)</sup> per i potenziali cortico-cerebellari provocati da stimoli acustici.

Alla componente superficie-positiva delle risposte vermiane andrebbe propriamente attribuito, secondo i nostri esperimenti, il significato in parte di reazione neuronica postsinaptica e in parte di potenziale degli influssi delle vie afferenti. Tale oscillazione è fortemente esaltata dalla stricnina [cfr. Fadiga, Pupilli e von Berger <sup>(1,2)</sup>], farmaco di cui è noto lo scarsissimo effetto sui potenziali assonici [Heinbecker e Bartley <sup>(6)</sup>]: inoltre, dalle prove eseguite in profondità risulta che dallo strato granuloso della corteccia si deriva un potenziale negativo, il cui tempo di latenza è uguale a quello della oscillazione superficie-positiva (fig. 1). Si è indotti quindi a considerare l'eccitamento degli interneuroni cerebellari come fenomeno con cui deve ricollegarsi, almeno in parte, la componente positiva della risposta. Che la genesi di tale oscillazione per altro sia anche riferibile agli impulsi trasmessi per le vie afferenti sottocorticali, risulta dagli effetti dell'applicazione della cocaina sulla corteccia [cfr. Fadiga, Pupilli e von Berger <sup>(1,2)</sup>]: il farmaco diminuisce di molto l'ampiezza dell'onda, ma non l'abolisce completamente.

Per quanto concerne la componente superficie-negativa della reazione derivata dal verme, i nostri risultati integrano i rilievi di Bremer e Gernandt <sup>(5)</sup>. Questi autori ammettono che detta componente sia la manifestazione di *after-discharges* ripetitive asincrone delle cellule di Purkinje o delle cellule granulose, tenuto conto che la corteccia cerebellare presenta una netta tendenza a reagire agli impulsi afferenti mediante simili scariche [Brookhart,

(4) F. BREMER et V. BONNET, *Caractères généraux de la réponse du cervelet à une volée d'influx afférents*, « J. Physiologie », XLIII, 662 (1951).

(5) F. BREMER a. B. E. GERNANDT, *A micro-electrode analysis of the acoustic response and the strychnine convulsive patterns of the cerebellum*, « Acta physiol. scand. », XXX, 120 (1954).

(6) P. HEINBECKER a. S. H. BARTLEY, *Manner of strychnine action on nervous system*, « Amer. J. Physiol. », CXXV, 172 (1939).

Moruzzi e Snider<sup>(7)</sup>]. Lo stato di *sink* che in coincidenza con la componente superficie-negativa abbiamo detto manifestarsi nello strato granuloso, indica infatti che le cellule di questo strato si trovano in fase di eccitamento; e che tale attività non si manifesti con una deflessione positiva in superficie, può essere la conseguenza del fatto che il rispettivo stato di *source* è sovracompensato dall'effetto delle scariche asincrone delle cellule di Purkinje, più prossime alla superficie stessa e quindi più efficaci sul suo stato di polarizzazione.

Le risposte del *lobulus ansiformis* si manifestano con oscillazioni che per alcuni caratteri si differenziano da quelle proprie delle risposte vermiane, in apparente contrasto con l'assoluta uniformità strutturale della corteccia cerebellare [Fadiga, Pupilli e von Berger<sup>(2)</sup>]. È tuttavia possibile riconoscere nelle reazioni elettriche della corteccia emisferica le medesime componenti di quelle del verme, e interpretare gran parte delle differenze come quantitative: il che viene di conseguenza dall'esame dei dati raccolti registrando contemporaneamente la risposta vermiana e quelle del *lobulus ansiformis*, come pure dai risultati dell'applicazione di soluzioni di farmaci sulla corteccia delle due regioni. Nella Memoria *in extenso* questo aspetto del problema verrà discusso diffusamente, e saranno esposte le particolari condizioni anatomiche che danno ragione della diversa ampiezza che le singole componenti della risposta assumono rispettivamente in corrispondenza del verme e degli emisferi; basti ora segnalare come le differenze di segno e di latenza che si notano tra la reazione vermiana e quella del *crus I* (considerate nella loro forma più comune) siano solo apparenti. La prima porzione dell'onda negativa che costituisce la risposta del *crus I*, come si è visto<sup>(2)</sup>, compare infatti 5-10 msec prima della componente positiva della risposta derivata dalle altre sedi, e permane immodificata dopo il trattamento della corteccia con soluzioni di farmaci: il fenomeno non appare cioè di origine corticale, e può invece spiegarsi come la conseguenza della diffusione di potenziali profondi<sup>(8)</sup>. E la minore durata di latenza delle risposte registrabili dalla superficie del *crus I*, rispetto a quelle del verme e del *crus II*, sarebbe in sostanza solo apparente, essendone causa la presenza di un fenomeno che in realtà non è la espressione di un processo reattivo dei neuroni cerebellari. Va del resto ricordato che una deflessione negativa, di basso voltaggio, talora precede la comparsa della componente positiva della risposta vermiana, come di quella registrata dal *crus II*<sup>(1,2)</sup>; a tale deflessione è da attribuirsi lo stesso significato che

(7) J. M. BROOKHART, G. MORUZZI e R. S. SNIDER, *Spike discharges of single units in the cerebellar cortex*, « J. Neurophysiol. », XIII, 465 (1950).

(8) Si tratterebbe cioè di un effetto analogo a quello riscontrato nel cervelletto di Gatto da BREMER e BONNET [*Action de la strychnine sur les réponses sensorielles et sur les potentiels électriques spontanés de l'écorce cérébelleuse. L'activité convulsive du cervelet*, « Folia psychiat. neurol. neurochir. neerl. », LVI, 438 (1953)]: i potenziali che per la stimolazione di esterocettori si derivano dalle lamelle emisferiche più laterali, sono di debole voltaggio e di segno negativo, essendo fenomeni di diffusione che dipendono dalla prossimità degli emisferi ai fasci cerebellari afferenti e alle vie lemniscali.

abbiamo ora assegnato alla porzione iniziale della risposta del *crus I*, giacché i due accidenti sono sincroni ed entrambi permangono dopo la cocainizzazione protratta della corteccia.

Resta a considerare la natura della oscillazione positiva assai lenta che può concludere tutte le manifestazioni riflesse analizzate, registrate in superficie e in profondità, da lamelle tanto degli emisferi quanto del verme. La frequenza con cui la si osserva, è bassa per le risposte vermiane superficiali, alquanto più elevata se le registrazioni si compiono dalla superficie degli emisferi: l'onda medesima si modifica assai scarsamente e tardivamente per effetto della cocainizzazione della corteccia. Quando si derivino i potenziali



Fig. 3. — Rappresentazione schematica delle risposte cerebellari a impulsi trasmessi per le vie ottiche e derivate: in I, dalla superficie del verme; in II e in III rispettivamente da quella del *crus II* e del *crus I*.

In *a*, fenomeni elettrici trasmessi dalle vie profonde; in *b* ed in *c*, componenti fondamentali della risposta; in *d*, potenziale postumo positivo. Le linee punteggiate rappresentano fenomeni meno costanti.

della sostanza bianca, mediante elettrodi introdotti in corrispondenza del verme o del *lobulus ansiformis*, l'onda lenta positiva è invece costante e cresce di ampiezza a mano a mano che aumenta la profondità del punto di derivazione. Per la sua durata, per la costanza della sua polarità ai vari livelli di derivazione, e infine anche per il fatto che essa è tanto più ampia quanto più l'elettrodo è prossimo alla massa compatta del centro midollare, tale oscillazione va interpretata come un potenziale postumo positivo delle vie di conduzione [cfr. la letteratura in Grundfest<sup>(9)</sup>].

L'analisi che ora abbiamo fatta delle risposte cerebellari destinate da impulsi trasmessi per le vie ottiche e derivate dal verme e dagli emisferi, mostra come le rispettive loro componenti siano sostanzialmente le medesime (fig. 3), e come il loro significato sia analogo a quello delle oscillazioni riflesse provocate nella corteccia del cervelletto da stimoli di altra natura.

(9) H. GRUNDFEST, *Bioelectric potentials*, « Ann. Rev. Physiol. », II, 213 (1940).

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari.* Nota II di GAETANO FICHERA, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

Vogliamo dare per le funzioni di  $\mathfrak{M}$ , ( $\mathfrak{M}'$ ) e più in generale, per le misure di  $\mathfrak{M}''$ , significato alle condizioni al contorno (3) della Nota I. A tal proposito consideriamo la varietà lineare  $\mathfrak{V}$  costituita da tutte le funzioni di  $\Gamma$  tali che per ogni  $u \in \mathfrak{C}$  verificante le (3) si abbia:

$$F(u, v) = 0.$$

È evidente che  $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{V}_0$ . Se la funzione  $u$  di  $\mathfrak{C}$  verifica le (3), per ogni  $v \in \mathfrak{V}$  riesce:

$$(13) \quad \int_{\Lambda} [v \mathfrak{E}(u) - u \mathfrak{E}^*(v)] dx = 0^{(1)}.$$

Orbene, se è  $u \in \mathfrak{M}$  ( $u \in \mathfrak{M}'$ ), dando ad  $\mathfrak{E}(u)$  il significato attribuitogli nella Nota I, diremo che essa verifica le (3) se per ogni  $v$  di  $\mathfrak{V}$  sono verificate le (4) [(4')]. Più in generale diremo che la misura  $u$  di  $\mathfrak{M}''$  verifica le condizioni al contorno (3), se essa soddisfa le (6) non soltanto per  $v \in \mathfrak{V}_0$  ma per ogni  $v \in \mathfrak{V}$ .

Siamo così condotti a dare al problema al contorno (2), (3) le seguenti formulazioni generalizzate:

G) Assegnata la funzione  $f$  di  $\mathfrak{L}^{(1)}(A)$  ricercare una  $u(x) \in \mathfrak{L}^{(1)}(A)$ , verificante le (4) per ogni  $v \in \mathfrak{V}$ .

G') Assegnata la misura  $\mu$  di  $\Lambda(A + \Sigma)$  ricercare una  $u(x) \in \mathfrak{L}^{(1)}(A)$ , verificante le (4') per ogni  $v \in \mathfrak{V}$ .

G'') Assegnata la misura  $\mu$  di  $\Lambda(A + \Sigma)$  ricercare una misura  $u \in \Lambda(A + \Sigma)$  verificante le (6) per ogni  $v \in \mathfrak{V}$ .

Indicheremo con  $\mathfrak{L}^{(p)}(A)$ , come di consueto, lo spazio di Banach delle funzioni reali di modulo di potenza  $p$ -esima sommabile in  $A$ , essendo  $p$  un numero reale che supporremo sempre  $\geq 1$ .

Sia  $f \in \mathfrak{L}^{(p)}(A)$  e supponiamo che esista una soluzione  $u$  del problema G) ed appartenga a  $\mathfrak{L}^{(q)}(A)$  ( $q \geq 1$ ). La  $u(x)$  sarà, per definizione, chiamata una *soluzione debole*  $[\mathfrak{L}^{(q)}, \mathfrak{L}^{(p)}]$  del problema al contorno (2), (3). Se esiste una soluzione del problema G') ed appartiene a  $\mathfrak{L}^{(q)}(A)$ , essa sarà detta una *soluzione debole*  $[\mathfrak{L}^{(q)}, \Lambda]$  del problema (2), (3). Denoteremo invece *soluzione debole*  $[\Lambda, \Lambda]$  di (2), (3) ogni soluzione del problema G''). Fra queste

(\*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) La numerazione delle formule e dei teoremi della presente Nota prosegue quella della Nota I.

chiameremo *soluzioni deboli*  $[\Lambda, \mathfrak{L}^{(p)}]$  quelle per le quali la misura assegnata  $\mu$  è assolutamente continua ed ha una derivata appartenente ad  $\mathfrak{L}^{(p)}(A)$ .

Nelle impostazioni  $G$ ,  $G'$ , e  $G''$ ) del problema al contorno (2), (3) si inquadra una concezione della teoria generale di siffatti problemi, che fin dal 1932 è stata messa in atto dal Picone per il calcolo della soluzione dei problemi stessi. Quest'Autore, infatti, esplicitamente riconduce le condizioni differenziali (2) e (3) a quelle integrali date dal teorema di reciprocità e, cioè, considerando, come Egli fa, soluzioni del tipo  $(\mathfrak{L}^{(2)}, \mathfrak{L}^{(2)})$ , alle (4), che Egli interpreta come equazioni di Fischer-Riesz in uno spazio di Hilbert. Il nome di soluzioni debole (*weak solution*) è stato, successivamente e sempre nel caso  $(\mathfrak{L}^{(2)}, \mathfrak{L}^{(2)})$ , introdotto dal Friedrichs in connessione a problemi di tipo particolare ed usando una classe di funzioni ausiliarie diversa dalla  $\mathfrak{V}$  da noi impiegata.

Il problema consistente nell'assegnare le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza e l'unicità delle soluzioni deboli dei vari tipi del problema (2), (3) può completamente risolversi impiegando un principio generale di Analisi astratta relativo agli spazi di Banach, già formulato dallo scrivente in un altro lavoro <sup>(2)</sup>.

Riportiamo l'enunciato di tale principio. A tal proposito indichiamo con  $\mathfrak{V}$  un insieme astratto lineare rispetto al corpo reale o a quello complesso <sup>(3)</sup>. Siano  $\mathfrak{B}_1$  e  $\mathfrak{B}_2$  due spazi di Banach reali, se  $\mathfrak{V}$  è lineare rispetto al corpo reale, complessi nell'altro caso. In  $\mathfrak{V}$  siano definite due trasformazioni lineari <sup>(4)</sup>  $M_1(v)$  ed  $M_2(v)$ , le quali mutano l'elemento di  $\mathfrak{V}$ , rispettivamente, in un elemento di  $\mathfrak{B}_1$  ed in un elemento di  $\mathfrak{B}_2$ .

Sia  $\Phi(w_1)$  un funzionale lineare e continuo definito in  $\mathfrak{B}_1$ . Consideriamo la seguente equazione funzionale:

$$(14) \quad \Phi[M_1(v)] = \Psi[M_2(v)].$$

In essa l'incognita è il funzionale  $\Psi(w_2)$  lineare e continuo definito in  $\mathfrak{B}_2$ .

Il principio in questione assegna la condizione necessaria e sufficiente perché, assegnato comunque  $\Phi$ , esista  $\Psi$  verificante le (14) per ogni  $v \in \mathfrak{V}$ .

III. *Condizione necessaria e sufficiente perché esista la soluzione  $\Psi$  dell'equazione (14), comunque si assegni  $\Phi$ , è che esista una costante  $K$  tale che qualunque sia  $v \in \mathfrak{V}$  si abbia:*

$$(15) \quad \|M_1(v)\| \leq K \|M_2(v)\|.$$

*Soddisfatta la (15), esiste una soluzione  $\Psi$  della (14) verificante la disuguaglianza:*

$$(16) \quad \|\Psi\| \leq K \|\Phi\|,$$

*ed ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale lineare e continuo ortogonale al codominio della trasformazione  $M_2$ .*

(2) Cfr. G. FICHERA, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, «Atti del Convegno internazionale sulle Equazioni alle derivate parziali», Trieste, agosto 1954, Edit. Cremonese, Roma, 1955, pp. 174-227.

(3) Cfr. loc. cit. in nota <sup>(2)</sup> della Nota I, cap. III.

(4) Cfr. loc. cit. in nota <sup>(3)</sup> p. 76.

Per la dimostrazione di questo teorema rimandiamo al lavoro già citato.

È da notare che da quanto in esso asserito si deduce subito che la soluzione  $\Psi$  della (14) è unica allora ed allora soltanto che il codominio  $M_2(\mathfrak{V})$  della trasformazione  $M_2(v)$  è una base per lo spazio  $\mathfrak{B}_2$  <sup>(5)</sup>.

Prima di applicare il teorema III alla deduzione delle condizioni per l'esistenza e l'unicità delle soluzioni deboli del problema (2), (3), vogliamo notare come in esso possono farsi rientrare i principi generali di esistenza negli spazi di Banach ed in quelli di Hilbert, che vengono principalmente usati nella teoria delle equazioni funzionali, in particolare differenziali, lineari.

Osserviamo intanto che il teorema III può riguardarsi come una generalizzazione del noto teorema di prolungamento di Hahn-Banach. Questo afferma che dato uno spazio di Banach  $\mathfrak{B}$ , reale o complesso, e una varietà lineare  $\mathfrak{V}$  in esso contenuta, se  $f(v)$  è un funzionale lineare e continuo definito in  $\mathfrak{V}$ , esiste un funzionale lineare e continuo  $F(v)$  definito in  $\mathfrak{B}$ , coincidente con  $f(v)$  per  $v \in \mathfrak{V}$  e tale che  $\|F\| = \|f\|$ .

Si assuma infatti come  $\mathfrak{B}_1$  il corpo reale o quello complesso, a seconda che  $\mathfrak{B}$  è reale o complesso;  $\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{B}$ ;  $M_1(v) \equiv f(v)$ ;  $M_2(v) \equiv v$ . Se  $w_1$  è il generico numero di  $\mathfrak{B}_1$ , sia  $\Phi(w_1) \equiv w_1$ . La (15) è soddisfatta essendo  $|f(v)| \leq \|f\| \|v\|$  e riesce  $K = \|f\|$ . Esiste allora un funzionale lineare e continuo  $\Psi$  definito in  $\mathfrak{B}_2$  tale che per ogni  $v \in \mathfrak{V}$  si ha  $f(v) = \Psi(v)$ . La (16) in questo caso implica:  $\|\Psi\| = \|f\|$  <sup>(6)</sup>.

Altro principio d'esistenza che trova largo successo d'applicazione nella teoria delle equazioni alle derivate parziali lineari di tipo ellittico e il cosiddetto *teorema della proiezione*, relativo ad uno spazio di Hilbert. Esso afferma che se  $\mathfrak{V}$  è una varietà lineare completa immersa nello spazio di Hilbert  $\mathfrak{H}$ , considerato un qualsiasi elemento  $\varphi$  di  $\mathfrak{H}$ , esiste la *proiezione*  $\psi$  di  $\varphi$  su  $\mathfrak{V}$ . Ciò significa che qualunque sia  $v \in \mathfrak{V}$  si ha:

$$(17) \quad (v, \varphi) = (v, \psi).$$

Anche questo principio è un caso particolarissimo del teorema III. Infatti si assuma:  $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{H}$ ;  $\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{V}$ ;  $M_1(v) \equiv M_2(v) \equiv v$ ;  $\Phi(v) \equiv (v, \varphi)$ ;  $\Psi(v) \equiv (v, \psi)$ . Allora la (14) si riduce alla (17) e la (15) alla banale identità  $\|v\| = \|v\|$ , talché il teorema III assicura l'esistenza e l'unicità della proiezione  $\psi$  di  $\varphi$  su  $\mathfrak{V}$ , verificante la disuguaglianza  $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$ .

Recentemente P. D. Lax e A. Milgram <sup>(7)</sup> hanno dato un nuovo teorema per la rappresentazione dei funzionali lineari e continui in uno spazio di Hilbert, che come essi stessi ed altri Autori hanno mostrato, si presta ad utili applicazioni nella teoria delle equazioni differenziali lineari.

(5) Cfr. loc. cit. in nota (3), p. 28 e p. 142.

(6) Per le applicazioni del teorema di Hahn-Banach e del metodo della proiezione alle equazioni lineari, in particolare differenziali, cfr. loc. cit. in nota (3), cap. IV, loc. cit. in nota (2) e Bibliografia ivi citata. Cfr. anche loc. cit. in nota (7) della Nota I e Bibliografia ivi citata.

(7) Cfr. P. LAX e A. MILGRAM, *Parabolic Equations*, «Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. Math. Studies», n. 33, Princeton 1954, pp. 167-190.

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert completo che supporremo complesso. Denoti  $B(u, v)$  un funzionale bilineare e continuo definito per ogni coppia ordinata  $u$  e  $v$  di vettori di  $\mathcal{H}$  <sup>(8)</sup>. Esista una costante  $K$  tale che per ogni  $v \in \mathcal{H}$  si abbia:

$$(18) \quad \|v\|^2 \leq K |B(v, v)|.$$

Esiste allora, assegnato comunque il funzionale  $\Phi(v)$  lineare e continuo definito in  $\mathcal{H}$ , un elemento  $\psi \in \mathcal{H}$  tale che sussista la rappresentazione:

$$(19) \quad \Phi(v) = B(v, \psi),$$

oppure un elemento  $\psi \in \mathcal{H}$  tale che sussista la seguente altra:

$$(19') \quad \Phi(v) = \overline{B(\psi', v)}.$$

Anche questo teorema rientra come caso particolare nel teorema III. Infatti, tenendo presente che può porsi:

$$B(v, \psi) = (T(v), \psi),$$

essendo la  $T(v)$  una trasformazione lineare e continua univocamente determinata <sup>(9)</sup>, si vede subito che la (19) equivale alla (14), assumendo:  $\mathcal{V} \equiv \mathcal{H}$ ;  $M_1(v) \equiv v$ ;  $M_2(v) \equiv T(v)$ ;  $\psi(v) = (v, \psi)$ . L'esistenza di  $\psi$  è assicurata dal sussistere della (15) che è certo verificata, dato che:  $\|v\| \leq |B(v, v)| \leq K \|T(v)\| \|v\|$ .

Se anche  $\bar{\psi}$  soddisfa la (19), dovendo  $\psi - \bar{\psi}$  essere ortogonale a  $T(\psi - \bar{\psi})$ , per la (18) segue  $\psi = \bar{\psi}$ .

Analogamente si dimostra l'esistenza e l'unicità di  $\psi'$ .

Veniamo ora a mostrare come il teorema III permetta di dare le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle soluzioni deboli.

Sussistono i seguenti teoremi:

IV. *Siano  $p$  e  $q$  due numeri reali maggiori di 1. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione debole  $[\mathcal{L}^{(q)}, \mathcal{L}^{(p)}]$  del problema (2), (3), comunque si assegni il termine noto  $f \in \mathcal{L}^{(p)}(A)$ , è che esista una costante  $K$  tale che:*

$$(20) \quad \left( \int_A |v|^{p/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p} \leq K \left( \int_A |\mathcal{E}^*(v)|^{q/(q-1)} dx \right)^{(q-1)/q}$$

per ogni  $v \in \mathcal{V}$ .

Soddisfatta la (20), esiste una soluzione debole  $[\mathcal{L}^{(q)}, \mathcal{L}^{(p)}]$  tale che:

$$(21) \quad \left( \int_A |u|^q dx \right)^{1/q} \leq K \left( \int_A |\mathcal{E}(u)|^p dx \right)^{1/p}.$$

(8) Cfr. loc. cit. in nota <sup>(3)</sup>, p. 214.

(9) Cfr. loc. cit. in nota <sup>(3)</sup>, teor. XXXVI del cap. V.

Questo teorema è una immediata conseguenza del teorema III. Basta infatti assumere:

$$\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{L}^{(p/(p-1))}(\Lambda) \quad ; \quad \mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{L}^{(q/(q-1))}(\Lambda) \quad ; \quad M_1(v) \equiv v \quad ; \quad M_2(v) \equiv \mathfrak{E}^*(v);$$

$$\Phi(w_1) = \int_{\Lambda} w_1 f dx \quad (w_1 \in \mathfrak{B}_1) \quad ; \quad \Psi(w_2) = \int_{\Lambda} w_2 u dx \quad (w_2 \in \mathfrak{B}_2).$$

Tenendo presente il teorema di rappresentazione di un funzionale lineare e continuo in uno spazio  $\mathfrak{L}^{(s)}$  <sup>(10)</sup>, è subito visto che la (14), con le assunzioni fatte, altro non è che la (4).

È da notare che nel caso  $p = \infty$  ( $q = \infty$ ), nel primo (secondo) membro della (20)  $p/(p-1)$  e  $(p-1)/p$  ( $q/(q-1)$  e  $(q-1)/q$ ) devono essere sostituiti da 1.

Nel caso che il termine noto sia una misura di  $\Lambda$  ( $\Lambda + \Sigma$ ) si ha:

V. *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione debole*  $[\mathfrak{L}^{(q)}, \Lambda]$  ( $q > 1$ ) *del problema (2), (3), comunque si assegni*  $\mu \in \Lambda$  ( $\Lambda + \Sigma$ ), *è che esista una costante K tale che:*

$$(22) \quad \max_{\Lambda + \Sigma} |v| \leq K \left( \int_{\Lambda} |\mathfrak{E}^*(v)|^{q/(q-1)} dx \right)^{(q-1)/q}$$

per ogni  $v \in \mathfrak{V}$ .

Soddisfatta la (21) esiste una soluzione debole  $u$   $[\mathfrak{L}^{(q)}, \Lambda]$  tale che:

$$(23) \quad \left( \int_{\Lambda} |u|^q dx \right)^{1/q} \leq K v_{\mu}(\Lambda + \Sigma).$$

La dimostrazione è identica a quella del teorema IV, con il solo cambiamento della definizione di  $\mathfrak{B}_1$  e  $\Phi$ , che nel caso attuale si assumono al modo seguente:

$$\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{S}(\Lambda + \Sigma)^{(11)} \quad , \quad \Phi(w_1) = \int_{\Lambda + \Sigma} w_1 d\mu \quad (w_1 \in \mathfrak{B}_1).$$

Teoremi analoghi di ovvia enunciazione e dimostrazione, sussistono per le soluzioni deboli  $[\Lambda, \mathfrak{L}^{(p)}]$  ( $p > 1$ ) e  $[\Lambda, \Lambda]$ . È anche evidente che:

VI. *La soluzione debole*  $[\mathfrak{L}^{(q)}, \mathfrak{L}^{(p)}]$  o  $[\mathfrak{L}^{(q)}, \Lambda]$  ( $[\Lambda, \mathfrak{L}^{(p)}]$  o  $[\Lambda, \Lambda]$ ), *del problema (2), (3) è unica allora ed allora soltanto che*  $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{V})$  *è una base per lo spazio*  $\mathfrak{L}^{(q/(q-1))}(\Lambda)$  ( $\mathfrak{S}(\Lambda + \Sigma)$ ).

È nota la definizione che dà l'Hadamard di *problema al contorno ben posto* <sup>(12)</sup>. Precisamente, riferendoci alla classe  $\mathfrak{M}$  (oppure alla  $\mathfrak{M}'$  o alla  $\mathfrak{M}''$ )

(10) Cfr. loc. cit. in nota <sup>(3)</sup>, teor. XXXVI del cap. IX.

(11) Con  $\mathfrak{S}(\Lambda + \Sigma)$  denotiamo lo spazio di Banach delle funzioni continue in  $\Lambda + \Sigma$  normalizzato al modo consueto.

(12) Cfr. J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Ch. II, Paris 1932.

da noi introdotta, il problema al contorno (2), (3) in tale classe, cioè il problema G) (oppure G') o G''), è *ben posto* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

a) esiste la soluzione  $u$  del problema (2), (3) in  $\mathfrak{A}$  ( $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{A}''$ ) comunque si assegni il termine noto  $f(\mu)$ ;

b) tale soluzione è unica;

c) essa dipende *con continuità* dal termine noto.

La condizione c) significa che  $u$ , introducendo in  $\mathfrak{A}$  e nello spazio  $\mathfrak{S}$  in cui varia il termine noto, una topologia, o, in particolare, una metrica e considerata la trasformazione, la quale al generico elemento di  $\mathfrak{S}$  fa corrispondere in  $\mathfrak{A}$  ( $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{A}''$ ) la soluzione del problema (2), (3), questa è continua.

Orbene, se le topologie adottate in  $\mathfrak{A}$  ed in  $\mathfrak{S}$  sono quelle forti degli spazi di Banach  $\mathfrak{L}^{(q)}$  o  $\Lambda$  da noi considerati, si verifica la assai notevole circostanza che la condizione c) non è indipendente da a) e b), ma è di queste una conseguenza. Ciò segue dal sussistere della (21) o della (23), o delle analoghe per gli altri tipi di soluzioni deboli.

Pertanto nella impostazione da noi adottata *il problema al contorno* (2), (3) *è da considerarsi ben posto secondo Hadamard nelle sole ipotesi che per esso sono soddisfatte le condizioni a) e b), cioè allorquando sussiste la (20) o le (22) (o analoghe) ed  $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{A})$  gode della proprietà di completezza espressa dal teorema VI.*

Finora abbiamo supposto i coefficienti dell'operatore  $\mathfrak{E}(u)$ , l'incognita  $u$  ed il termine noto reali. Tutto quanto è stato detto nella Nota I e nella presente si estende immediatamente al caso che tali funzioni siano complesse. Supponiamo pertanto che  $\mathfrak{E}(u)$  sia un operatore lineare di ordine  $m$  a coefficienti complessi, verificanti le ipotesi di regolarità già assunte nel caso reale. Considereremo il caso che  $\mathfrak{E}(u)$  dipenda linearmente da un parametro complesso  $\lambda$ , cioè che riesca:

$$\mathfrak{E}(u) \equiv \mathfrak{E}_0(u) + \lambda \mathfrak{E}_1(u)$$

essendo  $\mathfrak{E}_0$  ed  $\mathfrak{E}_1$  operatori di ordine  $m$  indipendenti da  $\lambda$ .

Limitiamoci a considerare le soluzioni deboli complesse  $[\mathfrak{L}^{(q)}, \mathfrak{L}^{(p)}]$  ( $p, q > 1$ ) del problema:

$$(2') \quad \mathfrak{E}_0(u) + \lambda \mathfrak{E}_1(u) = f \quad (3) \quad L_h(u) = 0 \quad \text{su} \quad \Sigma_h^{(13)}.$$

Questo diremo si estende senza difficoltà agli altri tipi di soluzioni deboli.

Ci proponiamo di caratterizzare i valori (complessi) del parametro  $\lambda$  in corrispondenza ai quali il problema (2'), (3) ammette, comunque si fissi il termine noto  $f$  (complesso) una soluzione debole  $[\mathfrak{L}^{(q)}, \mathfrak{L}^{(p)}]$ .

Siano  $\mathfrak{E}_0^*$  ed  $\mathfrak{E}_1^*$  gli operatori aggiunti di  $\mathfrak{E}_0$  ed  $\mathfrak{E}_1$ , rispettivamente. Consideriamo nella solita classe  $\mathfrak{A}$ , della quale però supporremo che facciano parte anche funzioni complesse, l'equazione omogenea:

$$\mathfrak{E}_0^*(v) + \lambda \mathfrak{E}_1^*(v) = 0.$$

(13) Anche gli operatori  $L_h$  vengono supposti a coefficienti complessi.

Orbene noi diremo che  $\lambda$  è uno *pseudo-autovalore* per la (24) in  $\mathfrak{Q}$ , se il funzionale:

$$J(v) = \frac{\left( \int_A |\mathfrak{S}_0^*(v) + \lambda \mathfrak{S}_1^*(v)|^{q/(q-1)} dx \right)^{(q-1)/q}}{\left( \int_A |v|^{p/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p}}$$

considerato nella classe  $\mathfrak{Q}$ , privata della funzione identicamente nulla, ammette come estremo inferiore lo zero. Nel caso che tale estremo inferiore nullo sia un minimo, lo pseudo-autovalore  $\lambda$  è un autovalore, cioè gli autovalori sono particolari pseudo-autovalori.

Il teorema IV immediatamente fornisce:

VII. *Il problema al contorno (2'), (3) è risolubile, comunque si fissi  $f \in \mathfrak{L}^{(p)}$ , nella classe delle soluzioni deboli  $[\mathfrak{L}^{(q)}, \mathfrak{L}^{(p)}]$  allora ed allora soltanto che  $\lambda$  non è uno pseudo-autovalore.*

Tale teorema è da riguardarsi come una estensione alla teoria generale delle equazioni differenziali lineari di risultati già noti per particolari equazioni lineari.

**Matematica.** — *Sui funzionali che sono funzioni di funzionali lineari dei loro argomenti.* Nota di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata (\*) dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ.

Si riprende in questa Nota un interessante problema, studiato dal professore Fantappiè in [3] <sup>(1)</sup>, pp. 198-207, relativamente al suo spazio di funzioni localmente analitiche. Il problema viene ora impostato e risolto in piena generalità, cioè per qualsivoglia spazio vettoriale complesso, anche senza topologia.

La struttura dei funzionali analitici che sono funzioni di funzionali lineari è precisata dal teorema 1, diverso da quello espresso dal Fantappiè con le equazioni (47) e (54) in [3], n. 93. È tuttavia da rilevare che, in parte, la dimostrazione del teorema 1 è basata su idee simili a quelle che hanno condotto il Fantappiè ai suddetti risultati.

Al n. 3 consideriamo poi il problema analogo per il caso degli operatori a codominio contenuto in uno spazio funzionale analitico. I risultati non sono conseguenze immediate di quelli precedenti; anzi, si presentano fatti nuovi che costringono a considerare funzioni meromorfe, dove prima si avevano soltanto funzioni olomorfe.

1. Per comodità del lettore, richiameremo alcune delle nozioni necessarie all'intelligenza di ciò che segue; per i dettagli, v. [1], [2], [4] e [6].

(\*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia che si trova alla fine di questa Nota.

Sia  $S$  uno spazio vettoriale qualunque sul corpo complesso  $\mathbf{C}$ . Si dice che un insieme  $D \subset S$  è *finitamente aperto*, se, comunque si prendano  $x \in D$ ,  $h_1, \dots, h_n \in S$  (in numero finito arbitrario), le  $n$ -uple  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  di numeri complessi, per le quali riesce  $x + \sum_i \lambda_i h_i \in D$ , formano un insieme aperto nello spazio cartesiano  $\mathbf{C}^n$  (cfr. [4], def. 4, 3, 1).

Supponiamo verificata questa condizione rispetto a  $D$  e sia  $E$  uno spazio vettoriale topologico, localmente convesso<sup>(2)</sup>, sul corpo  $\mathbf{C}$ .

Una funzione  $f(x)$ , definita in  $D$  e a codominio in  $E$ , si dice *analitica* in  $D$  nel senso di Gateaux generalizzato (o, semplicemente, *G-analitica* in  $D$ ) se, per ogni  $x \in D$  e ogni  $h \in S$ , la funzione  $F(x + \lambda h)$ , della variabile complessa  $\lambda$ , riesce analitica in un intorno di  $O$ . Si dimostra allora che, per ogni  $x \in D$ , esiste un'applicazione lineare  $L_x$  di  $S$  in  $E$ , tale che

$$L_x(h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}, \quad \text{qualunque sia } h.$$

Chiameremo *derivata di  $f(x)$  in  $x$*  quest'applicazione lineare e la denoteremo con  $f'(x)$ . Scriveremo dunque  $f'(x)h = L_x(h)$ , per ogni  $h \in S$ . Rappresentando con  $\Lambda(S, E)$  l'insieme di tutte le applicazioni lineari di  $S$  in  $E$ , con la topologia della convergenza puntuale in  $S$ , si avrà quindi

$$f'(x) \in \Lambda(S, E), \quad \text{per ogni } x \in D.$$

Si dimostra poi che anche la funzione  $f'(x)$  di  $x$  è *G-analitica* in  $D$ ; la sua derivata,  $f''(x)$ , è per ogni  $x$ , un'applicazione lineare di  $S$  in  $\Lambda(S, E)$  e può quindi considerarsi come applicazione bilineare di  $S^2$  in  $E$ . Scriveremo  $f''(x) \cdot (h, k)$  con lo stesso significato di  $(f''(x)h)k$ ; in particolare, per  $h = k$ , scriveremo  $f''(x) \cdot h^{[2]}$  come abbreviazione di  $f''(x) \cdot (h, h)$ . E così di seguito. È facile allora vedere che, per ogni  $h$  tale che l'insieme dei punti  $x + \lambda h$ , con  $|\lambda| \leq 1$ , sia contenuto in  $D$ , vale lo sviluppo

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot h + \dots,$$

dove  $f^{(n)}(x)$ , *derivata  $n$ -esima* di  $f(x)$ , si può considerare, per ogni  $x \in D$ , un'applicazione multi-lineare di  $S^n$  in  $E$  data dalla formula

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) = \left[ \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} f(x + \sum_i \lambda_i h_i) \right]_{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}.$$

La funzione  $f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n)$  di  $h_1, \dots, h_n$  è manifestamente simmetrica. Per  $h_1 = \dots = h_n = h$ , l'indichiamo abbreviatamente con  $f^{(n)}(x)h^{[n]}$ .

Nei due casi considerati nel seguito lo spazio  $E$  sarà: 1° la retta complessa,  $\mathbf{C}$ ; 2° uno spazio funzionale analitico,  $\mathfrak{A}(\mathbf{C})$ . Nel primo caso, le funzioni nume-

(2) Si chiama *spazio vettoriale topologico* ogni spazio vettoriale  $E$ , reale o complesso, nel quale sia definita una struttura topologica che renda continue le operazioni di addizione e di moltiplicazione scalare. Si dice poi che  $E$  è *localmente convesso*, se la topologia di  $E$  può essere definita a mezzo di un sistema d'intorni dell'origine costituito da insiemi *convessi*.

riche di codominio in  $E$  saranno dette, per brevità, *funzionali*. Nel secondo caso, verranno usati i termini « applicazione » e « funzione », col significato generale.

2. Designi ancora  $S$  uno spazio vettoriale qualunque sul corpo complesso. Vale allora il

**TEOREMA 1.** - Sia  $F(u)$  un funzionale definito e  $G$ -analitico in un insieme finitamente aperto,  $D \subset S$ , e siano  $L_1(u), L_2(u), \dots, L_n(u)$ ,  $n$  funzionali lineari definiti in  $S$ , linearmente indipendenti. Perché il funzionale  $F(u)$  sia del tipo.

$$F(u) = f(L_1(u), L_2(u), \dots, L_n(u)), \quad \text{per ogni } u \in D,$$

essendo  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  una funzione complessa delle  $n$  variabili complesse  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , è necessario e sufficiente che la derivata di  $F(u)$  sia, per ogni  $u \in D$ , una combinazione lineare di  $L_1, \dots, L_n$ , cioè del tipo

$$F'(u) = \varphi_1(u) L_1 + \varphi_2(u) L_2 + \dots + \varphi_n(u) L_n,$$

essendo  $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u)$  funzionali definiti in  $D$ . Allora la  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  sarà olomorfa nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{C}^n$  costituito dai punti  $z = (L_1(u), \dots, L_n(u))$ , con  $u \in D$ .

*Dimostrazione.* - a) Supponiamo che esista una funzione  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  definita in  $A$  tale che

$$F(u) = f(L_1(u), L_2(u), \dots, L_n(u)).$$

Cominceremo col mostrare che questa funzione è necessariamente olomorfa in  $D$ . Sia  $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$  un punto arbitrario di  $A$ , con  $z_i^0 = L_i(u_0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e  $u_0 \in D$ . Siccome, per ipotesi, i funzionali  $L_1, \dots, L_n$  sono linearmente indipendenti, possiamo scegliere, per ogni indice  $i$ , un elemento  $e_i$  di  $S$  tale che <sup>(3)</sup>

$$L_i(e_i) = 1, \quad L_k(e_i) = 0, \quad \text{per } i \neq k.$$

Dunque  $L_i(u^0 + \lambda e_i) = z_i^0 + \lambda$ ,  $L_k(u^0 + \lambda e_i) = z_k^0$  per  $i \neq k$  e ogni scalare  $\lambda$ . Allora, dato che il funzionale  $F(u)$  è  $G$ -analitico, la funzione di  $\lambda$

$$\Phi_i(\lambda) = F(u_0 + \lambda e_i) = f(z_1^0, \dots, z_{i-1}^0, z_i^0 + \lambda, z_{i+1}^0, \dots, z_n^0)$$

dev'essere analitica in un intorno di  $O$ . Ma questo significa che la  $f(z_1, \dots, z_n)$  è analitica per rapporto a ciascuna delle sue variabili, il che, secondo un noto teorema di Hartogs, permette di affermare che la  $f(z_1, \dots, z_n)$  è analitica nel complesso delle sue variabili (in  $D$ ).

Ciò posto, è facile vedere, applicando direttamente la definizione di derivata, che

$$F'(u) = \frac{d}{du} f(L_1(u), \dots, L_n(u)) = \frac{\partial f}{\partial z_1} L_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n} L_n,$$

(3) Vedi per esempio [1], pp. 51-56.

onde, ponendo  $\varphi_i(u) = f'_{z_i}(L_1(u), \dots, L_n(u))$ , per  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$F'(u) = \varphi_1(u) L_1 + \varphi_2(u) L_2 + \dots + \varphi_n(u) L_n.$$

b) Supponiamo, reciprocamente, che la derivata  $F'(u)$  sia di questo tipo. Allora, si avrà, per ogni  $u \in D$  e ogni coppia  $(h, k)$  di elementi di  $S$ ,

$$F''(u)(h, k) = (\varphi'_1(u)h)(L_1 k) + \dots + (\varphi'_n(u)h)(L_n k),$$

dove, per ogni determinazione di  $u, h, k$ , il termine  $(\varphi'_i(u)h)(L_i k)$ , designa il prodotto, nel senso ordinario, del numero  $\varphi'_i(u)h$  per il numero  $L_i k$ . Ma, siccome l'operatore bilineare  $F''(u)$  dev'essere simmetrico, si avrà

$$\sum_{i=1}^n (\varphi'_i(u)h)(L_i k) = \sum_{j=1}^n (\varphi'_j(u)k)(L_j h)$$

e, data l'indipendenza lineare degli  $L_i$ , si può determinare, per ogni  $i$ , un  $k_i \in S$  tale che  $L_i(k_i) = 1$ ,  $L_j(k_i) = 0$  per  $i \neq j$ . Quindi

$$\varphi'_i(u)h = \sum_{j=1}^n (\varphi'_j(u)k_i)(L_j h), \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n,$$

onde, ponendo  $\varphi_{ij}(u) = \varphi'_j(u)k_i$ :

$$\varphi'_j(u) = \varphi_{1j}(u)L_1 + \dots + \varphi_{nj}(u)L_n, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

cioè: le derivate prime dei coefficienti  $\varphi_i(u)$  dovranno essere, anch'esse, combinazioni lineari degli  $L_j$  (i cui coefficienti dipenderanno, naturalmente, da  $u$ ).

E si avrà quindi

$$F''(u)(h, k) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij}(u)L_i(h)L_j(k).$$

Ragionando così, via via, si riesce a stabilire, per la derivata  $p$ -esima di  $F(u)$ , l'espressione generale seguente

$$F^{(p)}(u)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \varphi_{i_1, \dots, i_p}(u)L_{i_1}(h_1) \dots L_{i_p}(h_p).$$

Quindi, per ogni  $u_0 \in D$ , verrà, ponendo  $c_{i_1, \dots, i_p} = \varphi_{i_1, \dots, i_p}(u_0)/p!$ ,  $c_0 = F(u_0)$ :

$$F(u_0 + h) = F(u_0) + F'(u_0)h + \frac{1}{2!} F''(u_0)h^{[2]} + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(u_0)h^{(p)} + \dots =$$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^n c_i L_i(h) + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n c_{i_1, \dots, i_p} L_{i_1}(h) \dots L_{i_p}(h) + \dots,$$

per ogni  $h$  appartenente ad un intorno finitamente aperto,  $\mathfrak{B}(u_0)$ , di  $u_0$ . Si ha così, in un intorno  $W(z^0)$  di ogni punto  $z^0$  di  $A$ , un elemento di funzione analitica,

$$c_0 + \sum_{i=1}^n c_i z_i + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n c_{i_1, \dots, i_p} z_{i_1} \dots z_{i_p} + \dots,$$

ed è facile vedere che, dati due tali intorno  $W(z^1)$ ,  $W(z^2)$ , con punti (interni) comuni, i corrispondenti elementi coincidono su  $W(z^1) \cap W(z^2)$ . Per conseguenza, gli elementi considerati definiscono una funzione  $f(z_1, \dots, z_n)$ , ologomorfa in  $A$ , tale che

$$F(u) = F(L_1(u), \dots, L_n(u)), \quad \text{per ogni } u \in D.$$

*Nota.* - Da questo teorema si deduce, in modo quasi immediato, la seguente estensione di un risultato del Fantappiè (loc. cit.): *Condizione necessaria e sufficiente perché un funzionale G-analitico  $F(u)$  ammetta un teorema di addizione della forma*

$$(I) \quad F(u + v) = \Phi(F(u), F(v)),$$

essendo  $\Phi(x, y)$  una funzione complessa delle variabili complesse  $x, y$ , è che  $F(u)$  sia del tipo  $F(u) = f(L(u))$ , essendo  $L$  un funzionale lineare e  $f(z)$  una funzione complessa di  $z$ .

Basta osservare che, da (I), si deduce

$$F'(u) = \Phi_v(F(u), F(o)) \cdot F'(o).$$

3. Sarebbe ora naturale studiare il caso, più generale, delle applicazioni dello spazio vettoriale  $S$  in un'algebra topologica  $A$ . Ci limiteremo però al caso in cui  $A$  è l'anello  $\mathfrak{A}(C)$  delle funzioni  $\varphi(z)$  localmente analitiche sopra un insieme chiuso  $C$ , non vuoto, della sfera di Riemann,  $\Omega$  (con  $C \neq \Omega$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ , se  $\infty \in C$ ), considerando  $\mathfrak{A}(C)$  munito della topologia introdottavi dal Köthe, dal Silva Dias e dal Grothendieck (cfr. [5]). (In particolare,  $S$  può essere un altro spazio funzionale analitico).

Sia  $F$  un'applicazione di un insieme  $D \subset S$  in  $\mathfrak{A}(C)$ . Per ogni  $u \in D$ , il valore di  $F(u)$  sarà una determinata funzione  $\varphi \in \mathfrak{A}(C)$ . Indicheremo con  $F(u)_z$  il valore di questa funzione in un generico punto  $z$ , sicché possiamo scrivere  $\varphi(z) = F(u)_z$ . Quindi,  $F(u)_z$  sarà una funzione numerica di  $u$  e di  $z$ , che potremmo anche denotare con  $F(u; z)$  (*funzionale misto*, nella terminologia del prof. Fantappiè). Ma bisogna distinguere questa funzione dall'applicazione  $u \rightarrow F(u; z)$ , che abbiamo designato con  $F$ .

Sia ora  $L$  un'applicazione lineare di  $S$  in  $\mathfrak{A}(C)$ . Diremo che un punto  $c$  di  $C$  è uno *zero interno di  $L$  di ordine  $m$*  (essendo  $m$  un numero naturale), se, qualunque sia  $u \in S$ , la funzione  $\varphi(z) = L(u)_z$  ammette il punto  $c$  come zero di ordine  $m$ . Per esempio, nel caso in cui  $S$  coincide con  $\mathfrak{A}(C)$ , l'operatore  $L$  definito dalla formula

$$L(u)_z = \int_c^z (z-t)^{m-1} u(t) dt$$
 ha uno zero di ordine  $m$  in  $c$ , mentre l'operatore  $(z-c)^{-m} L$  è privo di zeri interni (4).

Date  $n$  applicazioni lineari  $L_1, \dots, L_n$  di  $S$  in  $\mathfrak{A}(C)$ , diremo che esse sono *linearmente indipendenti per un dato punto  $c$  di  $C$* , se  $c$  non è zero interno

(4) Naturalmente, denotiamo con  $(z-c)^{-m} L$  l'applicazione  $u \rightarrow (z-c)^{-m} L(u)$ .

di nessuna combinazione lineare di  $L_1, \dots, L_n$ , a coefficienti costanti non simultaneamente nulli.

TEOREMA 2. — Sia  $F(u)$  una funzione a valori in  $\mathfrak{A}(C)$ , definita e  $G$ -analitica in un insieme  $DCS$ , e siano  $L_1, \dots, L_n$ , applicazioni lineari di  $S$  in  $\mathfrak{A}(C)$ , linearmente indipendenti per ogni punto di  $C$ . Perché la  $F(u)$  sia del tipo

$$F(u)_z = f(z, L_1(u)_z, \dots, L_n(u)_z),$$

essendo  $f(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  una funzione complessa delle variabili complesse  $z, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ , analitica rispetto a  $z$ , è necessario e sufficiente che la derivata di  $F(u)$  sia, in ogni punto  $u$  di  $D$ , una combinazione lineare di  $L_1, \dots, L_n$  sull'anello  $\mathfrak{A}(C)$ , cioè del tipo

$$F'(u) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(u) L_i,$$

essendo  $\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)$  funzioni definite in  $D$  e a valori in  $\mathfrak{A}(C)$ . Allora la  $f(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  sarà analitica nell'insieme  $A$  dei punti  $(z, L_1(u), \dots, L_n(u))$ , per i quali  $z \in C$  e  $u \in D$ .

La prima parte della dimostrazione si può fare in modo del tutto simile a quello adottato per il teorema 1.

Quanto alla seconda parte, basta una semplice osservazione. Supponiamo che la derivata  $F'(u)$  sia del tipo indicato nell'enunciato. Allora si avrà, per ogni  $u \in D$  e ogni coppia  $(h, k)$  di elementi di  $S$

$$F''(u)(h, k) = \sum_{i=1}^n (\varphi'_i(u) h) (L_i k),$$

dove, per ogni determinazione di  $u, h, k$ , il termine  $(\varphi'_i(u) h) (L_i k)$  designa il prodotto degli elementi  $\varphi'_i(u) h$  e  $L_i k$  dell'anello  $\mathfrak{A}(C)$ . Siccome l'operatore bilineare  $F''(u)$  dev'essere simmetrico, si avrà

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (\varphi'_i(u) h) (L_i k) = \sum_{j=1}^n (\varphi'_j(u) k) (L_j h).$$

Sia ora  $c$  un punto arbitrario di  $C$ . Dato che gli  $L_i$  sono linearmente indipendenti per il punto  $c$  (per ipotesi), si potrà determinare, per ogni  $i$ , un  $k_i \in S$ , tale che  $L_i(k_i)_c = 1$  e  $L_j(k_i)_c = 0$ , per  $i \neq j$ . Questo vuol dire che il determinante

$$\Delta(z) = |L_j(k_i)_z|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

funzione analitica di  $z$ , è diverso da zero nel punto  $c$  e, dunque, in un intorno  $V_c$  di  $c$ . Si potrà quindi risolvere (2) per rapporto a  $\varphi'_i(u) h$  ( $i = 1, \dots, n$ ), nell'intorno  $V_c$ , cioè possiamo scrivere  $(\varphi_i(u) h)_z$  sotto la forma

$$(\varphi'_i(u) h)_z = \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(u; c)_z (L_j h)_z, \quad \text{per } z \in V_c.$$

Ora, secondo il lemma di Heine-Borel-Pincherle, esiste un numero finito di punti  $c_1, \dots, c_m$  di  $C$  tali che gli intorno  $V_{c_1}, \dots, V_{c_m}$  coprono  $C$ . D'altra parte, siccome, per ipotesi, i funzionali  $(L_j h)_z$  di  $h$  sono, per ogni  $z \in C$ , linearmente indipendenti, i coefficienti  $\varphi_{ij}(u; c_k)_z$ , funzioni di  $z$ , debbono coincidere nelle parti comuni di quegli intorno. Si conclude così che, per ogni  $u \in D$ , le derivate  $\varphi'_i(u)$  sono anch'esse combinazioni lineari degli  $L_j$ , a coefficienti in  $\mathfrak{A}(C)$ .

La dimostrazione può adesso proseguire, nelle sue linee essenziali, come quella del teorema I.

OSSERVAZIONI. - I. La condizione che la  $f(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  sia analitica per rapporto a  $z$  può essere soppressa nell'ipotesi del teorema.

II. Questo teorema sussiste, senza cambiamenti sostanziali, sostituendo  $\mathfrak{A}(C)$  con certi altri anelli funzionali, come, per esempio, quello delle funzioni continue sopra un compatto. Sarebbe interessante cercare il dominio di causalità di questo teorema, tra gli anelli topologici.

III. Un caso semplice al quale si applica questo teorema è quello in cui  $S$  coincide con  $\mathfrak{A}(C)$  e le applicazioni lineari date sono potenze dell'operatore di derivazione:  $D^0, D^1, \dots, D^n$ . Si tratta allora dei noti operatori funzionali della forma

$$F(u)_z = f(z, u(z), u'(z), \dots, u^{(n)}(z)).$$

IV. Il numero degli zeri interni di un operatore  $L$  non è mai infinito, purché la funzione  $L(h)_z$  di  $z$  non sia identicamente nulla sopra nessuna componente di  $C$  per ogni  $h \in S$ . Siano allora  $c_1, \dots, c_s$  gli zeri interni di  $L$  e  $\mu_1, \dots, \mu_s$  i rispettivi ordini. Allora l'operatore

$$(3) \quad \bar{L} = \frac{1}{\prod_i (z - c_i)^{\mu_i}} L$$

sarà privo di zeri interni. Ora, dati  $n$  operatori  $L_1, \dots, L_n$ , può darsi che gli operatori dedotti da essi secondo (3) siano linearmente indipendenti per ogni punto di  $C$ . Allora il teorema 2 si applica agli  $\bar{L}_i$ . Ma è da rilevare che la funzione  $f(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ , che esprime allora  $F$  partendo dagli  $L_i$ , può essere meromorfa in questo caso.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. II, « Actual. Scient. Ind. », n. 1032, Paris (1947).
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. I-II, « Actual. Scient. Ind. », n. 1189, Paris (1953).
- [3] L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*, « Mem. Acc. Lincei », 1930.
- [4] E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », New York (1948).
- [5] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*, « J. Reine Angew. Math. », vol. 191 (1953), pp. 29-49.

**Matematica.** — *Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici.* Nota I (\*) di CORNELIS GERRIT LEKKERKERKER, presentata dal Socio B. SEGRE.

1. Recentemente M. Cugiani (1) ha studiato la distribuzione, sopra l'asse reale, dei punti P di ascissa

$$r^2 - s^2 \alpha$$

dove  $\alpha$  è un fissato numero reale positivo, mentre  $r$  ed  $s$  percorrono, indipendentemente l'uno dall'altro, l'insieme dei numeri interi. Indicando con  $I(\alpha)$  l'insieme di quei punti P e con

$$(1) \quad \sqrt{\alpha} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$$

lo sviluppo di  $\sqrt{\alpha}$  in frazione continua regolare, i risultati principali di tale Autore possono venire enunciati come segue:

*L'origine è un punto di accumulazione da destra di  $I(\alpha)$  se, e soltanto se, la successione  $a_0, a_2, a_4, \dots$  non è superiormente limitata; se questa condizione è soddisfatta, l'insieme  $I(\alpha)$  è denso su tutto il semiasse a destra dell'origine. Analogamente, l'origine è un punto di accumulazione da sinistra di  $I(\alpha)$  se, e soltanto se, la successione  $a_1, a_3, a_5, \dots$  non è superiormente limitata, e l'insieme  $I(\alpha)$  è denso su tutto il semiasse a sinistra dell'origine se vale quest'ultima condizione.*

È però più difficile dare informazioni sulla densità di  $I(\alpha)$  sui rispettivi semiasse, se le sottosuccessioni dei quozienti parziali relativi alla (1) sono superiormente limitate. Il Cugiani dimostra soltanto in proposito che *ognuno degli intervalli  $(0, 2\sqrt{\alpha} + 1)$  e  $(-2\sqrt{\alpha} - 1, 0)$  contiene allora sempre almeno un punto di accumulazione di  $I(\alpha)$ .* Nel presente lavoro ci proponiamo di continuare lo studio dell'insieme  $I(\alpha)$  nel caso che la successione  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sia superiormente limitata.

Porremo  $\sqrt{\alpha} = \theta$ . Prima di enunciare i teoremi a cui giungeremo in questa Nota I ed in una successiva Nota II, vogliamo introdurre un certo insieme,  $J(\theta)$ , legato strettamente all'insieme  $I(\alpha)$ . Consideriamo un punto, di ascissa  $x$ , che sia di accumulazione per  $I(\alpha)$ . Allora esiste una successione  $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3), \dots$  di coppie di interi non nulli tale che

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n^2 - s_n^2 \alpha) = x;$$

possiamo supporre, senza limitazione sostanziale,  $r_n > 0, s_n > 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Evidentemente si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ , ed inoltre:

$$r_n^2 - s_n^2 \alpha = r_n^2 - s_n^2 \theta^2 = s_n^2 \left( \frac{r_n}{s_n} - \theta \right) \left( \frac{r_n}{s_n} + \theta \right) > r_n s_n \left( \frac{r_n}{s_n} - \theta \right).$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1956.

(1) Si veda: M. CUGIANI, *Sopra una questione di approssimazione diofantea non lineare*, « Bollettino della U.M.I. » (3), 10, 489-497 (1955).

Quindi abbiamo, in virtù della (2),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{r_n}{s_n} - \theta \right) = 0,$$

sicch  anche, per la (2),

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 \left( \frac{r_n}{s_n} - \theta \right) = \frac{x}{2\theta}.$$

Inversamente, dalla (3) segue la (2). Indicheremo d'ora in poi con  $J(\theta)$  l'insieme dei punti di ascissa

$$s^2 \left( \frac{r}{s} - \theta \right),$$

dove  $r$  e  $s$  percorrono, indipendentemente l'uno dall'altro, l'insieme dei numeri interi positivi. Indicheremo poi con  $I'(\alpha)$  l'insieme derivato di  $I(\alpha)$  (cio  l'insieme dei punti di accumulazione di  $I(\alpha)$ ), ed analogo significato avr   $J'(\theta)$ . Allora la propriet  dimostrata sopra viene espressa cos  (con notazione ovvia):

$$(4) \quad J'(\theta) = \frac{1}{2\theta} I'(\alpha) \quad (\theta = \sqrt{\alpha}).$$

Supporremo sempre che  $\theta$  sia un numero (irrazionale) positivo tale che l'insieme dei quozienti parziali nello sviluppo (1) sia superiormente limitata.

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA A. - Condizione necessaria e sufficiente perch  l'insieme  $J'(\theta)$  sia discreto   che  $\theta$  sia un numero quadratico.

Com'  noto, un numero irrazionale  $\theta$  risulta quadratico se, e soltanto se, lo sviluppo di  $\theta$  in frazione continua regolare   periodico da un certo indice in poi. Il teorema A ci fornisce una propriet  caratteristica assai diversa dei numeri quadratici; essa pu  esprimersi anche cos : in ogni intervallo finito, cade soltanto un numero finito di punti di accumulazione di  $J(\theta)$ .

In virt  della (4), il teorema A pu  anche essere formulato mediante il

TEOREMA B. - Condizione necessaria e sufficiente affinch  l'insieme  $I'(\alpha)$  sia discreto   che  $\alpha$  sia il quadrato di un numero quadratico.

Esistono numeri  $\theta$  del tipo considerato per i quali l'insieme  $J'(\theta)$    abbastanza ricco. Naturalmente, in forza dei risultati menzionati sopra, l'origine   sempre un punto isolato dell'insieme  $J(\theta)$ . Vale, perch , il

TEOREMA C. - Sia  $k$  un numero intero  $\geq 6$ . Allora esistono numeri  $\theta$  aventi le due seguenti propriet :

1  l'insieme  $J(\theta)$    denso sull'asse reale al di fuori dell'intervallo  $(-1/k, 1/k)$ ;

2  il numero  $\theta$  ammette uno sviluppo in frazione continua regolare

$$\theta = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

dove  $a_n \leq k - 1$  per  $n = 1, 2, \dots$

In modo ovvio, questo teorema potrebbe anche essere formulato con riferimento ai numeri  $\alpha$  ed agli insiemi  $I(\alpha)$ .

2. Useremo in seguito le seguenti notazioni:

$k$  denota un numero intero positivo;

$a$  e  $b$  designano numeri interi con  $a \geq 1$ ,  $b \geq 0$ ;

$L(k)$  è l'insieme dei numeri  $\theta > 0$  aventi uno sviluppo in frazione continua regolare

$$(5) \quad \theta = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots],$$

dove  $a_n \leq k$  per  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;

$p_0/q_0, p_1/q_1, p_2/q_2, \dots$  indicano le ridotte dello sviluppo (5);

$a_0^*, a_1^*, a_2^*, \dots$  denotano i quozienti completi dello sviluppo (5), definiti così:

$$a_n^* = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Dimostreremo successivamente la sufficienza e la necessarietà della condizione che appare nell'enunciato del teorema A. A tale scopo premetteremo vari lemmi, anzitutto il seguente che in un certo senso è una generalizzazione di un noto teorema sulle ridotte  $p_n/q_n$  <sup>(2)</sup>:

LEMMA 1. — Siano  $\gamma$  un numero positivo e  $\theta$  un numero di  $L(k)$ , e siano  $r$  ed  $s$  interi positivi. Supponiamo che

$$(6) \quad \left| \frac{r}{s} - \theta \right| < \frac{1}{k+2} \quad \text{e} \quad \left| \frac{r}{s} - \theta \right| < \frac{\gamma}{s^2}.$$

Allora esistono un intero positivo  $n$  e due numeri interi  $a$  e  $b$ , tali che:

$$(7) \quad r = ap_{n-1} + bp_{n-2}, \quad s = aq_{n-1} + bq_{n-2},$$

$$(8) \quad a \geq 1, 0 \leq b \leq a \leq c(k, \gamma) = 2\sqrt{\gamma(k+2)^3}.$$

(Nel caso che sia  $n = 1$ , si assuma  $p_{-1} = 1$ ,  $q_{-1} = 0$ ).

Dimostreremo poi il teorema C; la dimostrazione sarà basata essenzialmente su un risultato di M. Hall <sup>(3)</sup>, che vogliamo così enunciare:

LEMMA 2. — Ogni numero nell'intervallo  $(\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4)$  può scriversi come la somma di due numeri di  $L(4)$  compresi fra 0 e 1.

3. DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1. — Consideriamo dapprima i quozienti parziali  $a_n^*$ . Siccome  $a_n \leq k$  per  $n \geq 1$ , valgono le seguenti disuguaglianze

$$\left. \begin{aligned} a_n^* &> a_n + \frac{1}{k+1} \\ a_n^* &< a_n + \frac{1}{1 + 1/(k+1)} = a_n + 1 - \frac{1}{k+2} \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(2) Si veda ad esempio: HARDY & WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford (1945), teorema 184, p. 152.

(3) M. HALL, *On the sum and product of continued fractions*, «Annals of Math.», 48, 966-993 (1947).

Ne segue per  $n \geq 1$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n^*} > \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + 1/(k+1)} > \frac{1}{(k+1)a_n(a_n+1)} > \frac{1}{(k+2)^3},$$

$$\frac{1}{a_n^*} - \frac{1}{a_n+1} > \frac{1}{a_n+1-1/(k+2)} - \frac{1}{a_n+1} > \frac{1}{(k+2)(a_n+1)^2} > \frac{1}{(k+2)^3}.$$

Abbiamo dunque

$$(9) \quad \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{(k+2)^3} < \frac{1}{a_n^*} < \frac{1}{a_n} - \frac{1}{(k+2)^3} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Per  $n=0$  si ha  $a_0 + 1/(k+1) < \theta = a_0^* < a_0 + 1 - 1/(k+2)$ ; se ne deduce, in virtù della prima relazione (6):

$$(10) \quad a_0 < \frac{r}{s} < a_0 + 1.$$

Ciò ci dice che, negli sviluppi dei numeri  $\theta$  e  $r/s$  in frazioni continue regolari, gli zeroesimi quozienti parziali coincidono. Denotiamo con  $n$  l'indice massimo tale che in questi due sviluppi i corrispondenti quozienti parziali coincidano fino all'indice  $n-1$ , tale che cioè  $p_0/q_0, p_1/q_1, \dots, p_{n-1}/q_{n-1}$  siano ridotte anche per il numero  $r/s$ , mentre  $p_n/q_n$  non lo sia. Allora, dalla teoria delle frazioni continue, segue che si può scrivere

$$r = ap_{n-1} + bp_{n-2}, \quad s = aq_{n-1} + bq_{n-2},$$

dove  $a$  e  $b$  sono certi numeri interi con  $a \geq 1$ ,  $b \geq 0$ . Valgono inoltre le relazioni

$$\theta = \frac{a_n^* p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n^* q_{n-1} + q_{n-2}}, \quad \frac{r}{s} = \frac{a_n^{**} p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n^{**} q_{n-1} + q_{n-2}},$$

dove  $a_n^*$  e  $a_n^{**}$  sono quozienti completi degli sviluppi di  $\theta$  e  $r/s$  in frazioni continue. Sottraendo queste due equazioni a membro a membro, troviamo

$$\theta - \frac{r}{s} = \frac{(a_n^* - a_n^{**})(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})}{(a_n^* q_{n-1} + q_{n-2})(a_n^{**} q_{n-1} + q_{n-2})} =$$

$$= - \frac{(-1)^n (a_n^* - a_n^{**})}{(a_n^* q_{n-1} + q_{n-2})(a_n^{**} q_{n-1} + q_{n-2})},$$

e quindi

$$\frac{1}{a_n^{**}} - \frac{1}{a_n^*} = (-1)^n \left( \theta - \frac{r}{s} \right) \left( q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{a_n^*} \right) \left( q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{a_n^{**}} \right).$$

Infine sappiamo che  $p_n/q_n$  non è una ridotta per il numero  $r/s$ . Ne segue che  $a_n^{**}$  non è contenuto nell'intervallo  $(a_n, a_n + 1)$ . Quindi abbiamo, per la (9),

$$\left| \frac{1}{a_n^{**}} - \frac{1}{a_n^*} \right| > \frac{1}{(k+2)^3},$$

eppertanto, facendo uso della seconda relazione (6),

$$\frac{1}{(k+2)^3} < \left| \theta - \frac{r}{s} \right| \cdot \left( q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{a_n^*} \right) \left( q_{n-1} + \frac{q_{n-2}}{a_n^{**}} \right) \\ < \left| \theta - \frac{r}{s} \right| \cdot (q_{n-1} + q_{n-2})^2 < 4\gamma \left( \frac{q_{n-1}}{s} \right)^2,$$

donde

$$s < 2 q_{n-1} \sqrt{\gamma (k+2)^3}.$$

Allora è anche  $a q_{n-1} < 2 q_{n-1} \sqrt{\gamma (k+2)^3}$ , ossia  $a < 2 \sqrt{\gamma (k+2)^3}$ . Così il nostro lemma è dimostrato.

4. Ricordiamo che  $J(\theta)$  è l'insieme dei punti di ascissa  $s^2((r/s) - \theta)$  ( $r$  e  $s$  interi positivi). Introduciamo ora certi insiemi  $J_{a,b}(\theta)$ . Fissati  $a$  e  $b$ , indicheremo con  $J_{a,b}(\theta)$  l'insieme dei punti di ascissa

$$\zeta_n = \zeta_n^{(a,b)} = (a q_{n-1} + b q_{n-2})^2 \left( \frac{a p_{n-1} + b p_{n-2}}{a q_{n-1} + b q_{n-2}} - \theta \right),$$

dove  $n$  percorre l'insieme dei numeri interi  $\geq 2$ .

Sia  $\gamma$  un numero positivo, fisso. Consideriamo le frazioni  $r/s$  per le quali  $|s^2((r/s) - \theta)| < \gamma$ . Soltanto per un numero finito di tali frazioni vale la disuguaglianza  $|r/s - \theta| \geq (1/k + 2)$  o valgono le relazioni (7) e (8) con  $n = 1$ . Dal lemma 1, segue quindi il seguente

COROLLARIO. — Siano dati  $\gamma > 0$  e  $\theta \in L(k)$ . Allora l'intersezione dell'insieme  $J(\theta)$  e dell'intervallo  $(-\gamma, \gamma)$  è contenuta, salvo un numero finito di punti, nell'unione degli insiemi  $J_{a,b}(\theta)$  con  $b \leq a \leq c(k, \gamma)$ .

5. Faremo spesso uso del seguente

LEMMA 3. — Abbiamo

$$(11) \quad \zeta_n = \zeta_n^{(a,b)} = (-1)^n \frac{(a - b a_n^*)(a + b/\lambda_{n-1})}{a_n^* + 1/\lambda_{n-1}} \quad (n \geq 2, a \geq 1, b \geq 0),$$

dove  $\lambda_{n-1}$  è definito dalla relazione

$$(12) \quad \lambda_n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Infatti,

$$\zeta_n = (a q_{n-1} + b q_{n-2})^2 \cdot \left( \frac{a p_{n-1} + b p_{n-2}}{a q_{n-1} + b q_{n-2}} - \frac{a_n^* p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n^* q_{n-1} + q_{n-2}} \right) \\ = \frac{a q_{n-1} + b q_{n-2}}{a_n^* q_{n-1} + q_{n-2}} (a - b a_n^*) (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\ = (-1)^n (a - b a_n^*) \cdot \left( \frac{a_n^*}{a} + x \right)^{-1},$$

dove

$$x = \frac{a_n^* q_{n-1} + q_{n-2}}{a q_{n-1} + b q_{n-2}} - \frac{a_n^*}{a} = \frac{(a - b a_n^*) q_{n-2}}{a (a q_{n-1} + b q_{n-2})}$$

$$= \frac{a - b a_n^*}{a (b + a \lambda_{n-1})},$$

poiché

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = [a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1] = \lambda_{n-1};$$

quindi

$$\frac{1}{\zeta_n} = (-1)^n \left( \frac{a_n^*}{a (a - b a_n^*)} + \frac{1}{a (b + a \lambda_{n-1})} \right) = (-1)^n \frac{\lambda_{n-1} a_n^* + 1}{(a - b a_n^*) (b + a \lambda_{n-1})}$$

onde segue l'asserto.

6. Considereremo anche gli insiemi derivati  $J'_{a,b}(\theta)$ , per i quali è ora facile dimostrare il

LEMMA 4. - *Valgono le tre seguenti proprietà:*

$$1^a \quad J'(\theta) = \bigcup_{a,b} J'_{a,b}(\theta) = \bigcup_{\substack{a,b \\ b \leq a}} J'_{a,b}(\theta);$$

2<sup>a</sup> ogni insieme  $J_{a,b}(\theta)$ , e quindi anche ogni insieme  $J'_{a,b}(\theta)$ , è limitato;

3<sup>a</sup>  $J'(\theta)$  è discreto se, e soltanto se, ogni insieme  $J'_{a,b}(\theta)$  è finito.

Infatti, sia  $x$  un punto di accumulazione di  $J(\theta)$ ,  $x \in J'(\theta)$ , e poniamo  $\gamma = |x| + 1$ . Allora  $x$  è anche punto di accumulazione relativo all'intersezione di  $J(\theta)$  con l'intervallo  $(-\gamma, \gamma)$ . Segue dal corollario ottenuto nel n. 4 che  $x$  è punto di almeno uno degli insiemi  $J'_{a,b}(\theta)$  con  $b \leq a$ .

Poiché d'altro canto, ogni insieme  $J_{a,b}(\theta)$  è evidentemente contenuto nell'insieme  $J(\theta)$ , ne risulta la proprietà 1<sup>a</sup>.

Fissati  $a$  e  $b$ , e siccome  $\lambda_{n-1} \geq 1$  e  $a_n^* > 1$ , si ricava subito dal lemma 3 che l'insieme dei numeri  $\zeta_n = \zeta_n^{(a,b)}$  è limitato. Vale dunque la proprietà 2<sup>a</sup>.

Se  $J'(\theta)$  è discreto, allora l'intersezione di  $J'(\theta)$  con un intervallo finito è finita. È pure finito ogni insieme  $J'_{a,b}(\theta)$ , in virtù della proprietà 2<sup>a</sup> già dimostrata. Inversamente, se ogni insieme  $J'_{a,b}(\theta)$  è finito, allora  $J'(\theta)$  è discreto, in virtù del corollario del lemma 1 e della proprietà 1<sup>a</sup>. Così anche la proprietà 3<sup>a</sup> è dimostrata.

7. Otterremo la prima parte del teorema A (enunciato nel n. 1), stabilendo il

TEOREMA 1. - *Se  $\theta$  è un numero quadratico, allora l'insieme  $J'(\theta)$  è discreto.*

Infatti, la frazione continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  è periodica da un certo indice  $n_0$  in poi, e la successione dei quozienti completi  $a_n^*$  è periodica a partire dallo stesso indice. Quindi i numeri  $a_n^*$  prendono soltanto un numero

finito di valori diversi. Inoltre, ogni numero  $\lambda_{n-1}$  è sviluppabile in frazione continua, regolare, finita, la quale è puramente periodica se si fa astrazione dagli ultimi  $n_0$  quozienti parziali; al variare di  $n$ , il periodo è sempre lo stesso a meno di una permutazione ciclica. La successione dei numeri  $\lambda_{n-1}$  ha dunque soltanto un numero finito di punti di accumulazione; e possiamo aggiungere che questi punti di accumulazione corrispondono biunivocamente ai valori di  $a_n^*$  per  $n \geq n_0$ .

Dalle osservazioni fatte, e dal lemma 3, segue ora che, fissati  $a$  e  $b$ , la successione dei numeri  $\zeta_n = \zeta_n^{(a,b)}$  ha soltanto un numero finito di punti di accumulazione. In altre parole, ogni insieme  $J'_{a,b}(\theta)$  è finito. Allora il lemma 4 ci dice che l'insieme  $J'(\theta)$  è discreto. Resta così dimostrato il teorema I.

**Matematica.** — *Systèmes dynamiques intégrables qui admettent des transformations infinitésimales en involution.* Nota (\*) di R. DEBEVER e M. CAHEN, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

1. Par définition un système dynamique<sup>(1)</sup> est une variété  $V_{2n+1}$  de dimension impaire sur laquelle est définie une forme alternée  $\Omega$  de degré 2 et de rang  $2n$ . Le système est intégrable si la forme est fermée ( $d\Omega = 0$ ). Les systèmes paramétriques holonomes<sup>(2)</sup> de la mécanique sont des exemples de systèmes dynamiques.

La forme  $\Omega$  admet  $r$  transformations infinitésimales engendrées par les vecteurs  $\xi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) tangents à  $V_{2n+1}$  si:

$$(1) \quad \theta(\xi_\alpha) \Omega \equiv i(\xi_\alpha) d\Omega + d \cdot i(\xi_\alpha) \Omega = 0$$

$i(\xi)$  désignant l'opérateur du produit intérieur<sup>(3)</sup>. Dans le cas de systèmes intégrables:

$$(2) \quad d \cdot i(\xi_\alpha) \Omega = 0.$$

Les formes de Pfaff

$$(3) \quad \pi_\alpha = i(\xi_\alpha) \Omega$$

sont fermées; ce sont des intégrales premières du système caractéristique  $\Sigma$  de  $\Omega$ . Nous supposons que les  $r$  transformations  $\xi_\alpha$  linéairement indépendantes sont en involution: il en est de même pour les  $\pi_\alpha$ .

(\*) Pervenuta all'Accademia l'11 settembre 1956.

(1) G. REEB, *Variétés symplectiques, Variétés presque complexes, Systèmes dynamiques*, «C. R.», Paris, t. 253, p. 776 (1952).

(2) F. GALLISSOT, *Les formes extérieures en Mécanique*, Thèse Fac. de Paris 1954, p. 31.

(3) Cet opérateur a été considéré par Th. De Donder sous le nom de substitution intégrale et sous son aspect analytique (Cfr. *Théorie des Invariants intégraux*, Gauthier-Villars, 1927, Chap. VI). Une définition globale est due à H. CARTAN, *Colloque de Topologie*, Bruxelles 1950, pp. 15-27.

On a donc par hypothèse <sup>(4)</sup>

$$(4) \quad i(\xi_\beta) \pi_\alpha = i(\xi_\beta \wedge \xi_\alpha) \Omega = 0.$$

D'autre part  $q$  étant un entier positif:

$$(5) \quad i(\xi_\alpha \wedge \xi_\beta) \Omega^q = (-1)^q (q-1) \pi_\alpha \wedge \pi_\beta \wedge \Omega^{q-2}.$$

$\Omega$  étant de rang  $2n$

$$(6) \quad 0 = \pi_\alpha \wedge \pi_\beta \wedge \Omega^{n-1}.$$

Il en résulte que le rang de  $\Omega$  s'abaisse effectivement de  $2r$  unités modulo les  $\pi_\alpha$  <sup>(5)</sup>. On peut donc écrire

$$(7) \quad \Omega = \pi_\alpha \wedge \omega^\alpha + \Omega^*,$$

$\Omega^*$  étant une forme de rang  $(2n - 2r)$  indépendante des  $\pi_\alpha$ . Cette forme  $\Omega^*$  est en vertu de (4) fermée modulo les  $\pi_\alpha$ . Elle ne dépend pas non plus des  $\omega_\alpha$ . En effet:

$$(8) \quad \pi_\alpha = i(\xi_\alpha) \Omega = i(\xi_\alpha) \pi_\beta \wedge \omega^\beta - \pi_\beta \wedge i(\xi_\alpha) \omega^\beta + i(\xi_\alpha) \Omega^*.$$

Le premier terme du second membre étant nul, grâce à (4),  $\Omega^*$  ne dépendant pas des  $\pi_\alpha$ , le dernier terme  $(i(\xi_\alpha) \Omega^*)$  ne peut donner une forme de Pfaff appartenant à l'anneau des  $\pi_\alpha$ . Ce terme est donc nul:

$$(9) \quad i(\xi_\alpha) \Omega^* = 0 \quad \text{et} \quad i(\xi_\alpha) \omega_\beta = -\delta_\alpha^\beta.$$

Les équations (9) ont bien pour conséquence:

$$(10) \quad \frac{\partial \Omega^*}{\partial \omega^\alpha} = 0.$$

Si nous appelons  $\varphi_i$  les  $(2n - 2r)$  formes indépendantes dont est constituée  $\Omega^*$ , il est clair que les  $\pi_\alpha, \omega^\alpha$  forment modulo les  $\varphi_i$  un système complètement intégrable.

Un système de coordonnées adapté sera par définition tel que les  $\xi_\alpha$  aient pour composantes:

$$(11) \quad \xi_\alpha : 0, \dots, 1_\alpha, \dots, 0.$$

Dans ce système les  $\omega^\alpha$  (considérées modulo les  $\varphi_i$ ) peuvent se mettre dans la forme simple:

$$(12) \quad \omega^\alpha = dq^\alpha.$$

Si nous appelons  $p_\alpha$  les variétés intégrales du système des intégrales premières ( $\pi_\alpha = 0$ ) il nous est possible de définir une sous variété  $V_{2n-2r+1}$  par:

$$(13) \quad p_\alpha = C_\alpha \quad q^\alpha = C'^\alpha.$$

(4) F. GALLISSOT, loc. cit., p. 129.

(5) E. CARTAN, *Invariants intégraux*, § 67, éd. Hermann 1922.

La forme  $[\Omega^*]$  qui est définie sur cette variété jouit des propriétés suivantes:

1) elle est de rang  $2n - 2r$ ;

2)  $d[\Omega^*] = 0$ ;

3)  $\frac{\partial [\Omega^*]}{\partial dq^a} = 0$ .

On en déduit:

$$(14) \quad \frac{\partial [\Omega^*]}{\partial q^a} = 0.$$

La forme  $[\Omega^*]$  définit donc sur  $V_{2n-2r+1}$  un nouveau système dynamique intégrable. Nous pouvons énoncer le théorème: *Tout système dynamique intégrable  $(V_{2n+1}, \Omega)$  admettant  $r$  transformations infinitésimales en involution peut se ramener par une opération de « projection » (modulo) à un système dynamique intégrable  $(V_{2n-2r+1}, [\Omega^*])$ .*

Ce résultat est en liaison avec un théorème de M. Lichnerowicz<sup>(6)</sup> et avec la méthode de Routh pour l'étude des systèmes mécaniques à variables cachées. Signalons qu'il peut aussi trouver une application au cas des espaces de Finsler qui admettent  $r$  transformations infinitésimales en involution. On peut même envisager plus généralement le cas où l'espace de Finsler admet un groupe abélien d'« isométrie ». La variété de base est alors une variété feuilletée.

## 2. Applications:

1) Considérons en coordonnées locales la forme hamiltonienne  $\Omega$  associée à un système paramétrique holonome possédant une fonction de forces:

$$(15) \quad \Omega = dp_i \wedge dq^i - d\mathcal{H} \wedge dt$$

où

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t).$$

Si  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^a} = 0$  ( $a = 1, \dots, r$ ) le système considéré admet  $r$  transformations infinitésimales en involution caractérisées par les vecteurs

$$(16) \quad \xi_a : 0, \dots, 1_a, \dots, 0.$$

Les coordonnées sont adaptées au sens ci-dessus. La forme:

$$(17) \quad [\Omega^*] + dp_a \wedge dq^a - d[\mathcal{H}] \wedge dt \quad a = r+1 \dots n$$

définit un système paramétrique holonome sur les sous-variétés

$$(18) \quad V_{2n-2r+1} : \begin{cases} p_a = C_a \\ q^a = C'^a. \end{cases}$$

(6) A. LICHNEROWICZ, *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme*, p. 160, éd. Masson 1955.

Remarquons immédiatement que certains caractères du système ne se conservent pas dans le passage au système  $[\Omega^*]$ . En particulier lorsque  $\Omega$  est un système scléronome la fonction hamiltonienne, constante du mouvement, n'est rien d'autre que l'énergie totale du système. La fonction  $[\mathcal{H}]$  obtenue en remplaçant  $p_\alpha$  par  $C_\alpha$  dans  $\mathcal{H}$  est constante le long des caractéristiques de  $[\Omega^*]$ : on ne peut toutefois la considérer comme l'énergie totale du nouveau système car elle contient des termes linéaires en  $p_a$ .

2) La considération de quelques problèmes de classification topologique des trajectoires nous a conduit à souligner l'intérêt du formalisme ci-dessus. Le problème de Képler introduit la forme:

$$(19) \quad \Omega = dp_r \wedge dr + dp_\theta \wedge d\theta - d\mathcal{H} \wedge dt$$

avec:

$$(20) \quad \mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{2},$$

et la forme:

$$(21) \quad [\Omega^*] = dp_r \wedge dr - d[\mathcal{H}] \wedge dt,$$

$[\mathcal{H}]$  s'obtenant à partir de  $\mathcal{H}$  en remplaçant  $p_\theta$  par une constante  $l$  (nous posons en fait  $l^2/2m = \hbar$ ). Les équations caractéristiques de  $[\Omega^*]$  sont:

$$dr - \frac{p_r}{m} dt = 0$$

$$dp_r + \left( \frac{k}{r^2} - \frac{2\hbar}{r^3} \right) dt = 0$$

et on trouve immédiatement dans le plan des phases

$$(22) \quad \frac{dp_r}{dr} = \frac{-\frac{k}{r^2} + \frac{2\hbar}{r^3}}{\frac{p_r}{m}} \rightarrow \frac{1}{2m} \frac{dp_r^2}{dr} = -\frac{k}{r^2} + \frac{2\hbar}{r^3}.$$

L'étude de la courbe  $p_r^2 = p_r^2(r)$  qui donne la classification n'est rien d'autre que celle du potentiel fictif.

Nous avons montré en détail ailleurs comment la classification topologique des géodésiques de Schwarzschild pouvait s'effectuer par une méthode analogue à celle indiquée ci-dessus et qui a le mérite d'introduire de manière naturelle le plan des phases. La réduction qui a été faite sur la forme  $\Omega$  peut se faire directement sur le lagrangien  $\mathcal{L}$  comme l'a montré M. Lichnerowicz. Pour les trajectoires Schwarzschildiennes le formalisme lagrangien paraît plus direct.

**Geometria.** — *Invarianti topologici d'un insieme di elementi differenziali curvilinei.* Nota (\*) II (\*\*) di DAVID KIRBY, presentata dal Socio B. SEGRE.

5. Per elementi di curve giacenti su di una superficie che non sia singolare nel centro di quelli, gli elementi stessi possono venire introdotti algebricamente come ideali dell'anello  $K[x, y]$  di polinomi in due variabili (cfr. Zariski [13]). Così un elemento  $E_{h-1}$  di ordine  $h-1$  appare quale l' $h$ -esimo ideale irriducibile di una successione di ideali polinomiali. Non v'è però un'analoga definizione astratta nel caso di elementi giacenti su di una varietà ad  $n \geq 3$  dimensioni. In questa Nota II studieremo quindi soltanto il caso in cui la varietà  $V$ , considerata nella Nota I, abbia dimensione  $n = 2$ .

Riferiamoci anzitutto ad un ideale  $q$  dell'anello  $K[x, y]$ , tale che  $q$  sia  $p = (x, y)$ -primario. Denotiamo con  $m$  un intero qualsiasi (certo esistente) per il quale risulti

$$(6) \quad q \supset p^{m+1}.$$

Sia  $V^{(m)}$  la superficie di Veronese dello spazio  $S_{1/2 m(m+3)}$  le cui sezioni iperpiane rappresentino le curve d'ordine  $m$  di un piano. Scegliamo una rappresentazione affine di  $V^{(m)}$  tale che le sue equazioni parametriche si scrivano nella forma

$$X_{ij} = x^i y^j \quad (i, j \geq 0, 0 < i + j \leq m),$$

dove le  $X$  siano coordinate non omogenee in  $S_{1/2 m(m+3)}$ . Consideriamo poi l'anello  $K[x, y]/p^{m+1}$ : ogni elemento di questo può venir rappresentato con un polinomio nelle  $x, y$ , di grado  $\leq m$ . Pertanto un tale elemento ammette come immagine l'intersezione di  $V^{(m)}$  con un iperpiano ben determinato del suo spazio ambiente. Inoltre le immagini degli elementi di  $q/p^{m+1}$  [esistenti in virtù della (6)] risultano gli iperpiani contenenti un certo spazio  $S(q)^{(1)}$ .

Si dimostrano facilmente le seguenti proprietà relative a questo spazio  $S(q)$ :

1°  $S(q)$  contiene l'origine  $P$  delle coordinate  $X$ ; più generalmente,  $S(q)$  contiene lo spazio  $l$ -osculatore a  $V^{(m)}$  nel punto  $P$  se, e soltanto se,  $p^{l+1} \supseteq q$  ( $m > l \geq 0$ ).

2°  $S(q)$  giace nello spazio  $n$ -osculatore a  $V^{(m)}$  nel punto  $P$  se, e soltanto se,  $q \supseteq p^{n+1}$  ( $0 \leq n \leq m$ ).

3° Detta  $\ell(q)$  la lunghezza di  $q$ , la dimensione di  $S(q)$  risulta  $\ell(q) - 1$ .

4° Se il procedimento precedente vien fatto in relazione ad un intero  $m' > m$  in luogo di  $m$ , la configurazione suddetta si ottiene dalla nuova me-

(\*) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1956.

(\*\*) Continuazione della Nota I, apparsa alle pp. 66-71 di questo volume dei « Rendiconti ».

(1) Notiamo che, affinché  $(a_{10}, a_{01}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{0m})$  sia un punto di  $S(q)$ , occorre e basta che  $\sum a_{ij} x^{-i} y^{-j}$  risulti un elemento del sistema « inverso » dell'ideale  $q$  (cfr., per esempio, ZARISKI [13], n. 10).

dianter proiezione da uno spazio all'infinito a  $m' - m - 1$  dimensioni, il quale risulta indipendente da  $q$ .

6. Ciò premesso, ritorniamo allo studio degli elementi di curva. Sia  $\Gamma$  un ramo algebroide d'una superficie  $V$  rappresentato parametricamente dalle

$$(7) \quad x = P_1(t), \quad y = P_2(t),$$

ove  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  siano serie formali di potenze, e le coordinate  $x, y$  siano coordinate locali sulla superficie nell'intorno del suo punto semplice  $O_1$ , origine del ramo  $\Gamma$ . Con le notazioni di Zariski [13], si vede che le (7) definiscono una valutazione del corpo  $K(x, y)$  sul gruppo dei numeri interi. Consideriamo l'intersezione degli ideali nell'anello di valutazione di  $K[x, y]$  (l'anello dei polinomi nelle  $x, y$ ); otteniamo così una successione di ideali di valutazione

$$\mathfrak{p} = q_1 \supset q_2 \supset q_3 \supset \dots,$$

ove ciascuno degli ideali risulta  $\mathfrak{p} = (x, y)$ -primario, e  $\mathcal{L}(q_i) = i$ . Denotato con  $\mathfrak{P}_i$  l' $i$ -esimo ideale semplice (cioè, irriducibile) della successione  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , abbiamo  $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{p} = q_1$ ,  $\mathfrak{P}_2 = q_2$ . Gli ideali semplici  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \dots$  della successione corrispondono ai punti  $O_1, O_2, O_3, \dots$  del ramo  $\Gamma$ ; da questo punto di vista, si può sviluppare una teoria di molteplicità e prossimità equivalente alla teoria classica (cfr. Hoskin [12] n. 3).

Supponiamo che  $\Gamma$  risulti primitivo nel punto  $O_h$ , e che  $\mathfrak{P}_h = q_s$ ; ne segue che  $\mathfrak{P}_{h+i} = q_{s+i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), e che tutti i punti  $O_{h+1}, O_{h+2}, \dots$  risultano liberi (ved. [12]).

Denotato con  $m$  un intero qualsiasi soddisfacente alla  $q_{s+1} = \mathfrak{P}_{h+1} \supset \mathfrak{P}_1^{m+1} = \mathfrak{p}^{m+1}$ , possiamo applicare il procedimento precedente e costruire così in  $S_{1/2 m(m+3)}$  un insieme di spazi  $S(q_1), S(q_2), \dots, S(q_{s+1})$ , tali che  $S(q_i)$  abbia dimensioni  $i - 1$  (in virtù della proprietà 4° del n. 5), e che risulti:

$$P = S(q_1) \subset S(q_2) \subset \dots \subset S(q_{s+1}).$$

Se  $\Gamma'$  è un altro ramo primitivo nel punto  $O_h$ , allora i primi  $s$  ideali della nuova successione risultano manifestamente ancora  $q_1, q_2, \dots, q_s$ ; però l' $(s+1)$ -esimo ideale  $q'_{s+1}$  della nuova successione è generalmente diverso da  $q_{s+1}$ . Si può tuttavia dimostrare che  $q'_{s+1}$  contiene sempre un certo ideale  $\mathfrak{p}$ -primario (eventualmente non di valutazione), avente lunghezza  $s+2$ . Pertanto:

*Se l'intero  $m$  viene scelto abbastanza grande, ogni ideale di valutazione che corrisponda ad un punto libero seguente  $O_h$  ha per immagine in  $S_{1/2 m(m+3)}$  uno spazio di dimensione  $s$  che contiene  $S(q_s)$ , e che giace in uno spazio fisso  $\bar{S}$  di dimensione  $s+1$ .*

Non è detto che ogni spazio di dimensione  $s$  del fascio  $L$  di base  $S(q_s)$  e giacente in  $\bar{S}$  corrisponda ad un punto libero  $O_{h+1}$ . Ciò di fatti non è mai vero, come si vede analizzando i due casi seguenti:

- a)  $O_h$  risulta prossimo ai punti  $O_{h-1}, O_h$  ( $k < h-1$ );
- b)  $O_h$  risulta prossimo al punto  $O_{h-1}$  soltanto.

Si vede che, nel caso *a*), esistono precisamente due spazi del fascio  $L$  che non corrispondono a nessun punto libero prossimo ad  $O_h$ ; mentre, nel caso *b*), esiste precisamente uno spazio siffatto.

Quest'osservazione corrisponde nella teoria classica (cfr. Enriques-Chisini [10]) al fatto che la posizione d'un punto libero seguente  $O_h$  appare determinata da un certo coefficiente in uno sviluppo di Puiseux. Più precisamente nel caso *a*) questo coefficiente è quello d'un *termine caratteristico*, e può assumere tutti i valori del corpo  $K$  salvo lo zero e l'infinito; mentre nel caso *b*) esso può assumere tutti i valori salvo l'infinito.

Invece gli spazi del fascio  $L$  che non corrispondono a nessun punto libero, corrispondono probabilmente agli  $(s+1)$ -esimi ideali delle valutazioni definite dai rami contenenti  $O_h$  e tali che i loro  $(h+1)$ -esimi punti risultino satelliti. Nel caso *a*) l' $(h+1)$ -esimo punto di un tale ramo è prossimo sia ad  $O_h$  e  $O_{h-1}$ , sia ad  $O_h$  e  $O_k$ . Nell'altro caso la seconda possibilità viene a mancare.

7. Consideriamo da ultimo l'effetto d'una trasformazione  $T$ , biregolare nel punto  $O_1$ , sugli spazi  $S(q)$ . Assumiamo le equazioni di  $T$  nella forma

$$(8) \quad \begin{cases} x' = ax + by + \dots \equiv A(x, y) \\ y' = cx + dy + \dots \equiv B(x, y), \end{cases}$$

dove i punti stiano in luogo di termini di grado maggiore di 1 nelle  $x, y$ , ed  $ad \neq bc$ . Un ramo  $\Gamma$  dato dalle (7) vien trasformato da  $T$  nel ramo  $T(\Gamma)$  di equazioni:

$$(9) \quad \begin{cases} x' = a P_1(t) + b P_2(t) + \dots \equiv Q_1(t) \\ y' = c P_1(t) + d P_2(t) + \dots \equiv Q_2(t), \end{cases}$$

le quali definiscono una valutazione del corpo  $K(x', y')$ .

Denotati con  $q'_1, q'_2, q'_3, \dots$  i nuovi ideali di valutazione, si vede che risulta  $q_{s+1} \supset p^{m+1}$  se, e soltanto se,  $q'_{s+1} \supset p'^{m+1} = (x', y')^{m+1}$ . Perciò possiamo rappresentare  $q'_1, q'_2, q'_3, \dots, q'_{s+1}$  mediante spazi  $S(q'_1), S(q'_2), S(q'_3), \dots, S(q'_{s+1})$  in un  $S_{1/2m(m+3)}$  con coordinate correnti  $X'_{ij}$ . Si deduce facilmente che, se due ideali di valutazione  $q_i, q'_i$  si corrispondono nella trasformazione  $T$  nel modo testè indicato, allora i relativi spazi associati  $S(q_i), S(q'_i)$  si corrispondono nell'omografia  $\Theta$  rappresentata dalle equazioni

$$X'_{ij} = \{A(x, y)\}^i \{B(x, y)\}^j \quad (i, j \geq 0, 0 < i+j \leq m),$$

dove nei secondi membri la moltiplicazione delle serie formali sia condotta formalmente, e poi in luogo di  $x^k y^l$  sia posto lo zero oppure  $X_{kl}$  secondoché  $k+l > m$  o  $k+l \leq m$ . Rileviamo che questa  $\Theta$  viene a dipendere soltanto dall'intero  $m$  e dalla trasformazione  $T$ .

Con le notazioni del n. 6, consideriamo separatamente i due casi *a*), *b*).

*a*) Siano  $S(q_{s+1}), S(q'_{s+1})$  due spazi del fascio  $L$  che corrispondano a due punti liberi seguenti  $O_h$ ; e siano  $S_1, S_2$  i due spazi di  $L$  che corrispondono a punti liberi seguenti  $O_h$ . Il *birapporto* dei quattro spazi  $S(q_{s+1}), S(q'_{s+1}),$

$S_1, S_2$  del fascio  $L$  risulta un invariante topologico dei due elementi di curva d'ordine  $h$  associati agli ideali  $q_{s+1}, q'_{s+1}$ .

b) Parimente, siano  $S(q_{s+1}), S(q'_{s+1}), S(q''_{s+1})$  tre spazi di  $L$  che corrispondano a tre punti liberi seguenti  $O_h$ ; e sia  $S$  lo spazio di  $L$  che corrisponde a nessun punto siffatto. Il birapporto dei quattro spazi  $S(q_{s+1}), S(q'_{s+1}), S(q''_{s+1}), S$  del fascio  $L$  risulta un invariante topologico dei tre elementi di curva d'ordine  $h$  associati alle  $q_{s+1}, q'_{s+1}, q''_{s+1}$ .

Rileviamo che l'invariante definito nel caso a) risulta la  $v$ -esima potenza di quello fornito dalla Nota I, dove  $v$  denoti la molteplicità nel punto  $O_h$  d'un ramo primitivo nel punto  $O_h$ .

Si potrebbe estendere il procedimento dei nn. 5-7 al caso di rami giacenti sopra una varietà a più di due dimensioni. In questo caso, però, gli ideali di valutazione non definiscono i punti d'un ramo; e quindi gli invarianti così ottenibili non risulterebbero relativi ad elementi di curva, sebbene invarianti dei rami usati nelle diverse valutazioni.

8. Concludiamo coll'esempio di due terne di elementi d'ordine sei nel piano, tali che:

tutti e sei gli elementi contengono lo stesso elemento d'ordine cinque; gli invarianti associati siano gli stessi per le due terne;

non esista però una trasformazione biregolare di una terna nell'altra.

Consideriamo all'uopo il ramo rappresentato dalle

$$x = t^3, \quad y = t^7 + at^8.$$

Gli ideali di valutazione in  $K[x, y]$  sono dati dalle

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= q_1 = (x, y) & , & \quad \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2^2 = q_9 = (x^5, x^3 y, xy^2, y^3), \\ \mathfrak{P}_2 &= q_2 = (x^2, y) & , & \quad \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 = q_{10} = (x^6, x^3 y, xy^2, y^3), \\ \mathfrak{P}_3 &= q_3 = (x^3, y) & , & \quad \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_4 = q_{11} = (x^6, x^4 y, xy^2, y^3), \\ \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 &= q_4 = (x^3, xy, y^2) & , & \quad \mathfrak{P}_2^3 = q_{12} = (x^6, x^4 y, x^2 y^2, y^3), \\ \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_3 &= q_5 = (x^4, xy, y^2) & , & \quad \mathfrak{P}_2^2 \mathfrak{P}_3 = q_{13} = (x^7, x^4 y, x^2 y^2, y^3), \\ \mathfrak{P}_2^2 &= q_6 = (x^4, x^2 y, y^2) & , & \quad \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_4 = q_{14} = (x^7, x^5 y, x^2 y^2, y^3), \\ \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 &= q_7 = (x^5, x^2 y, y^2) & , & \quad \mathfrak{P}_5 = q_{15} = (x^7, x^5 y, x^3 y^2, y^3), \\ \mathfrak{P}_4 &= q_8 = (x^5, x^3 y, y^2) & , & \quad \mathfrak{P}_6 = q_{16} = (x^8, x^5 y, x^3 y^2, x^7 - y^3), \\ & & & \quad \mathfrak{P}_7 = q_{17} = (x^8, x^6 y, x^3 y^2, x^7 - y^3 + 3ax^5 y). \end{aligned}$$

Le equazioni dello spazio  $S(q_{16})$  nello spazio  $S_{35}$  di coordinate  $X_{ij}$  ( $i, j \geq 0$ ,  $0 < i + j \leq 7$ ) sono le

$$X_{ij} = 0 \quad (i + 2j \geq 8) \quad , \quad X_{51} = X_{32} = X_{13} = X_{70} - X_{03} = 0.$$

Parimente, le equazioni di  $S(q_{17})$  risultano

$$X_{ij} = 0 \quad (i + 2j \geq 8) \quad , \quad X_{32} = X_{13} = X_{70} - X_{03} - 3aX_{51} = 0.$$

Pertanto, per ogni valore di  $a$ ,  $S(q_{17})$  giace nello spazio  $\bar{S}$  di equazioni

$$X_{ij} = 0 \quad (i + 2j \geq 8) \quad , \quad X_{32} = X_{13} = 0.$$

Si vede quindi senz'altro che i due gruppi di tre elementi dati dai valori  $a = -1, 0, +1$  e  $a = 0, 1, 2$  posseggono lo stesso invariante. Che queste due terne non risultino però trasformabili l'una nell'altra mediante una trasformazione biregolare, deriva dal fatto che non esiste una trasformazione siffatta che muti la serie di potenze

$$x^7 - y^3 + 3x^5y + \alpha x^3y^2 + \beta xy^3 + \dots$$

nella

$$x^7 - y^3 + \alpha' x^3y^2 + \beta' xy^3 + \dots,$$

dove  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  siano arbitrariamente scelti ed i puntini stiano in luogo di termini in  $x^i y^j$ , con  $i + 2j \geq 8$ , aventi coefficienti qualsiasi. Questo fatto è implicito nel lavoro di Kasner-De Cicco (ved. [11], Teor. 13).

#### BIBLIOGRAFIA.

- [10] F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni, ecc.*, vol. II (Bologna, 1916).
- [11] E. KASNER-J. DE CICCO, *The general analytic theory of irregular analytic arcs or elements*, «Trans. Amer. Math. Soc.», 51, 233-254 (1942).
- [12] M. A. HOSKIN, *Zero-dimensional valuation ideals associated with plane curve branches*, «Proc. London Math. Soc.», (3), 4, 70-99 (1956).
- [13] O. ZARISKI, *Polynomial ideals defined by infinitely-near base points*, «Amer. Journ. Math.», 60, 151-204 (1938).

**Geologia.** — *Scogliere dolomitiche nel Malm superiore e nel Cretaceo inferiore delle Prealpi venete* (\*). Nota (\*\*) di FRANCESCO FERASIN, presentata dal Socio G. B. DAL PIAZ.

La facies tipica del Cretaceo inferiore nelle Prealpi venete è quella ben conosciuta del «biancone» le cui caratteristiche, troppo note per essere qui descritte, erano state riconosciute, assieme alla sua posizione stratigrafica, dai De Zigno fin dal 1846 e 1849 [9, 10]. A tale tipica facies si accompagnano, non abbondanti, ma purtuttavia con una certa frequenza, delle masse dolomitiche variamente interpretate in passato e che ad un attento esame possono rivelarsi della massima importanza per spiegare le condizioni d'ambiente che presiedettero alla formazione del biancone su una così vasta area. Il problema dell'ambiente di sedimentazione del biancone fu del resto ampiamente dibattuto in passato da diversi Autori (vedi ad esempio [27]).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro di studio per la petrografia e la geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1956.

Le masse dolomitiche suddette, di cui vedremo in seguito alcune caratteristiche, furono citate fin dai primordi delle conoscenze geologiche, a cominciare dal Maraschini nel 1824 [22] e successivamente da Bittner (1877) [2] che fa notare come a volte si abbia un passaggio da tali dolomie al biancone, ma che le interpreta come dovute ad un metamorfismo di rocce preesistenti. Ne parlano Omboni nel 1879 [25] e nel 1882 il Taramelli [32] che dice di averle ritrovate a sud di Arten, nei dintorni di Bassano, sul gruppo del Monte Grappa ecc. Il Secco nel 1883 [30] avanza l'ipotesi che non di rocce metamorfiche si tratti, bensì di scogliere (del Trias superiore?) attorno alle quali si sarebbero depositati i sedimenti giuresi e cretacei. Un anno più tardi, nel 1884, il Rossi [28], avendo osservato che la dolomia riposa sul Titoniano, pensa possa trattarsi di banchi coralligeni che in seguito all'approfondimento del mare durante il Cretaceo inferiore, non trovarono più le condizioni adatte al loro sviluppo. Il Balestra (1897) [1] accenna allo stesso fenomeno e dà l'elenco di molte località in cui esso può osservarsi, e, pur propendendo per una origine dovuta a metamorfismo, non esclude si tratti di banchi di coralli, ciò che, egli dice, confermerebbe allora le condizioni batimetriche poco profonde del mare cretaceo. Del problema delle dolomie cretacee se ne occupa abbastanza diffusamente anche il Dal Lago nel 1899 [7], essendo esse presenti in diverse località della Val dell'Agno, dove formerebbero una quinta parte delle formazioni del Cretaceo, rappresentando addirittura in qualche caso tutto il sistema. Sulla presenza di dolomie nel Cretaceo si trova un breve accenno anche nel Parona [26], mentre G. Dal Piaz nel 1912 [8] le segnala in vari punti delle Prealpi venete, come ad esempio a Pove, sul Monte Grappa sui monti a Nord di Follina, ecc. Allo stesso problema accenna infine anche il Rodighiero nel 1919 [27].

Il problema delle masse dolomitiche facenti parte del sistema cretaceo come si vede dalle citazioni su riportate, ricorre con una certa frequenza nella letteratura, ma, a quanto mi risulta, non è mai stato oggetto dello studio particolare che meriterebbe data la relativa abbondanza e il significato paleoceanografico che quelle masse possono assumere.

Io ho potuto compiere le mie osservazioni in numerose località e su parecchie di tali masse, e precisamente nelle zone di Alano di Piave, di Follina, del Monte Grappa, della Val Cismon e della Val dell'Agno. Rimandando per una descrizione particolareggiata ad un più ampio studio in corso da parte di M. Rebora, voglio qui esporre alcune considerazioni preliminari.

Le caratteristiche presentate da quelle che ho fin qui chiamate genericamente « masse dolomitiche » sono all'incirca simili ovunque queste affiorino. Si tratta cioè di blocchi dolomitici immersi nel biancone, le cui dimensioni sono variabili, potendo avere una larghezza da pochi metri fino a qualche centinaio e uno spessore da 4 o 5 fino a 100 o poco più metri. La forma è generalmente a lente piano-convessa più o meno schiacciata o anche a tronco di cono; manca di solito ogni accenno di stratificazione, ciò che contrasta nettamente con la fitta stratificazione del biancone che li circonda; solo in qualche caso (ad esempio nella Val Bicadora a Sud-Ovest di Alano di Piave)

si nota una certa qual stratificazione sempre però piuttosto irregolare. Il termine « dolomitico » è giustificato dalla presenza in queste masse di una notevole quantità di Carbonato di Magnesio. Le analisi eseguite mi hanno infatti dato i seguenti risultati:

|   |   |
|---|---|
| Massa non stratificata in località Pian di Lou<br>nell'alta Val Bicadora a SW di Alano<br>di Piave. | $\left\{ \begin{array}{ll} \text{CaCO}_3 & 61,72 \% \\ \text{MgCO}_3 & 37,43 \% \\ \text{Fe}_2\text{O}_3 & 0,12 \% \\ \text{residuo} & 0,73 \% \end{array} \right.$ |
| Id. rinvenuta salendo dalla Val dell'Agno al<br>Passo del Zovo.                                     | $\left\{ \begin{array}{ll} \text{CaCO}_3 & 57,25 \% \\ \text{MgCO}_3 & 36,70 \% \\ \text{Fe}_2\text{O}_3 & 0,64 \% \\ \text{residuo} & 5,41 \% \end{array} \right.$ |
| Id. sulla sponda sinistra del lago artificiale<br>della Rocca nella bassa Val Cismon.               | $\left\{ \begin{array}{ll} \text{CaCO}_3 & 56,82 \% \\ \text{MgCO}_3 & 37,35 \% \\ \text{Fe}_2\text{O}_3 & 0,23 \% \\ \text{residuo} & 5,60 \% \end{array} \right.$ |

Come appare da questi dati si tratta di calcari largamente dolomitici aventi una percentuale di dolomite calcolata rispetto alle proporzioni teoriche tra i carbonati di Calcio e Magnesio nelle dolomie pure, oscillante tra l'80 e l'82 %. All'interno delle masse non stratificate la roccia si presenta completamente cristallina, a grana anche abbastanza grossa; talvolta si sfarina con facilità e molto spesso è assai carinata. A volte è ricca di inclusioni di selce, per lo più sotto forma di noduli; il suo colore va da grigio a giallastro con sfumature sul rosso. In sezione sottile appare del tutto cristallina, con veli di ossidi di ferro tra cristallo e cristallo. Tutte le ricerche di resti fossili sono rimaste infruttuose, come del resto era logico aspettarsi data la cristallinità della roccia.

Il contatto con il biancone, dove è possibile osservarlo, è assai netto. Da un lato sta la roccia visibilmente cristallina non stratificata e carinata, dall'altra il tipico biancone, cripto-cristallino in sezione sottile, compatto, con noduli o lenti di selce generalmente scura, in strati spessi al massimo poche decine di centimetri, che si interrompono bruscamente a contatto con la dolomia. Una analisi di un campione di questa roccia raccolto a poca distanza dalla sommità della massa dolomitica di Val Cismon di cui ho dato sopra i risultati dell'analisi, ha fornito una percentuale di  $\text{CaCO}_3$  di circa il 94 %. Sia la base che la sommità delle masse non stratificate è data dal solito biancone, che tutt'al più alla base può essere leggermente noduloso e in strati più grossi (Val Bicadora), mentre verso l'alto si può presentare in strati sottili e di colore tendente al grigio (Val Cismon), fatti questi del tutto normali nella serie stratigrafica di queste zone, indipendentemente dalla presenza o meno delle dolomie.

Un altro fatto merita di essere notato. In una sezione sottile eseguita proprio sul contatto tra il biancone e la dolomia, si osserva come esista un

passaggio graduale, sia pure su scala microscopica, dall'una all'altra roccia mediante la comparsa di grossi cristalli, forse di dolomite, dapprima rari e sparsi nella pasta fondamentale del biancone e via via sempre più frequenti finché divengono predominanti e si passa alla dolomia vera e propria. Dove è ancora presente la pasta criptocristallina si vedono tra i vari cristalli più grossi i microfossili caratteristici del biancone. Ciò dimostra evidentemente che la dolomitizzazione è avvenuta o si è completata quando gli strati di biancone erano già depositi e che si è trattato di una dolomitizzazione selettiva favorita dalla natura della roccia non stratificata e che ha risparmiato invece il più compatto biancone. In Val Bicadora e a Nord-Est di Follina ho notato su un lato della massa dolomitica delle brecce con elementi sia di dolomia che di biancone con o senza selce. Gli intensi disturbi tettonici presenti in entrambi i casi, non permettono di accertare se l'origine di tali brecce sia sedimentaria o tettonica.

Per quanto riguarda l'età delle rocce dolomitiche non stratificate abbiamo alcuni dati sicuri. Si può notare in alcuni casi dove è possibile l'osservazione diretta, che la base della massa dolomitica si trova qualche metro sopra il passaggio dal «rosso ammonitico» al biancone (ad esempio in Val Bicadora a SW di Alano di Piave, sopra Castrazzano nella Val dell'Agno, ecc.). Noi sappiamo che il rosso ammonitico è riferibile nel Veneto Centrale [8] al Kimmeridgiano e alla parte inferiore del Titoniano, mentre la parte superiore di questo piano è già in biancone, il cosiddetto «Titoniano bianco». Anche da questi dati si ricava quindi che la base della dolomia si può riferire ad una età compresa tra la parte più alta del Malm ed il Cretaceo più basso. Tali osservazioni sono confermate dalla presenza di microfossili caratteristici. In uno strato circa due metri sotto la base della già citata massa dolomitica di Pian di Lou, sono presenti nel biancone criptocristallino, oltre a vari radiolari calcitizzati, *Calpionella alpina* Lor. e *Globochaete alpina* Lomb., associazione tipica del Malm superiore. Sempre nel biancone, ma lateralmente alla massa suddetta, ho rinvenuto *Calpionella alpina* e *Tintinnopsella cadischiana* Colom, corrispondenti ad un livello leggermente superiore al precedente. A contatto con la dolomia di un'altra massa sempre nella stessa zona ho trovato *Calpionella alpina* (esemplari molti piccoli e rari), *Tintinnopsella carpathica*, *Stenosemellopsis hispanica* Colom, che indicano un livello riferibile o al Malm più alto (per la presenza della *C. alpina*) o più probabilmente al Cretaceo inferiore. Nella Val Cismon nel biancone a contatto con la dolomia ed immediatamente sopra ad essa non ho ritrovato che radiolari calcitizzati di nessun valore stratigrafico. Potrebbe tuttavia trattarsi di quel livello a soli radiolari che ho altrove riscontrato [13] e riferibile forse all'Aptiano. Ciò sarebbe confermato dal colore grigio più o meno intenso e a macchie più scure presentato dal cosiddetto biancone senza però intercalazioni argillose.

In ogni caso, come appare evidente da quanto detto sopra, è certa l'appartenenza delle masse dolomitiche ad un periodo compreso tra il Malm superiore e il Cretaceo inferiore. Rossi [28] e Balestra [1] e Secco [30] parlano di una massa dolomitica nei pressi di Pove che avrebbe, diciamo così, le sue ra-

dici nel Giurese medio se non più in basso. Dal Lago [7] parla invece di dolomie che salirebbero fino al Cretaceo superiore. Io non ho mai osservato casi come questi ora citati, che d'altra parte meritano senz'altro un attento esame ed eventualmente una conferma.

Che le nostre masse non stratificate e dolomitiche siano delle costruzioni dovute ad organismi, siano cioè delle vere bioherme, sembra fuor di dubbio. In verità ogni altra spiegazione mi pare insostenibile. Ammessa quindi una origine organica, può presentare notevole interesse vedere se esista qualche analogia fra tali formazioni e le costruzioni coralligene attuali. Appare subito evidente però che le differenze con i principali tipi di scogliere attuali (*fringing reefs*, *barrier reefs*, atolli) sono così nette sotto tutti i punti di vista che nessun confronto è possibile [18, 21, 12]. Notevoli analogie si possono invece riscontrare con quelle particolari forme di colonie coralline indicate con il nome di *patch-reefs* o *reef-knolls* [18, 11, 24]. Si tratta per lo più di piccole colonie di coralli, in cui abbondano però anche molti altri organismi, indipendenti dal resto della scogliera maggiore, poste generalmente nelle lagune di barriere o atolli. Le dimensioni sono assai variabili, potendo esse avere un diametro da pochi metri ad oltre un chilometro; la forma è piuttosto semplice derivando da un accrescimento degli organismi costruttori in tutte le direzioni e non asimmetrico, a lente, a duomo, a pilastro, con i margini anche notevolmente ripidi [19]. Nella laguna dell'atollo di Eniwetok sono stati contati ben duemila knolls. Raramente essi arrivano al livello della più bassa marea e per la loro posizione sono protetti dall'azione delle correnti, delle onde, dei venti, di quei fattori cioè che determinano una zonatura e dissimetria negli altri tipi di scogliere [11, 18].

Sono stati descritti anche numerosi esempi di « *patch-reefs* » fossili. Hadding [15] descrive delle scogliere di questo tipo nel Siluriano di Gotland, Newell e altri [24] illustrano, come facenti parte del complesso Permiano di scogliera del Texas e Nuovo Messico, delle piccole scogliere la cui descrizione potrebbe in certi casi adattarsi anche alle nostre formazioni. Carozzi [4, 5] ha studiato, nel Giurese superiore del Grand-Salève, delle formazioni coralligene, di piccole dimensioni, pure paragonate ai *patch-reefs* attuali. Piccole scogliere sono state anche descritte da Rutten e Jansonius [29] nel bacino di Parigi e da Lecompte [20] nel Siluriano e Devoniano dell'America del Nord.

Come si è visto vi sono molte somiglianze tra i suddetti *patch-reefs* e le masse dolomitiche presenti tra il Giurese superiore e il Cretaceo inferiore delle Prealpi Venete. Si può pensare quindi che queste siano delle scogliere dello stesso tipo, caratterizzate dalle piccole dimensioni, dalla loro forma simmetrica, ecc. A causa della intensa dolomitizzazione manca però in esse, come ho già fatto notare, qualsiasi traccia di resti fossili che ci indichi da quali organismi furono costruite. Inoltre, come si è detto, una delle loro caratteristiche più salienti è la posizione entro il biancone, senza che questo ne risenta minimamente, né dal punto di vista della stratificazione né da quello litolo-

gico. Ciò può apparire tanto più sorprendente se si pensa che una notevole o preponderante parte delle formazioni di scogliera attuali [11] o fossili [17] ed in particolare anche dei patch-reefs [5, 15] è data dai prodotti clastici derivanti dalla degradazione delle scogliere stesse. Qui invece il biancone che limita da tutte le parti le piccole scogliere, si presenta al solito come un calcare a grana finissima che è assai improbabile, se non impossibile, derivi dalla ricristallizzazione di un calcare clastico a grana più grossa. Caratteristica notevole nelle scogliere da me osservate è quindi la mancanza di un talus detritico, dato da elementi più o meno grossolani, attorno ad esse (sempre che non siano tali quelle breccie di cui, come ho fatto più su notare, è difficile stabilire la natura). Anche nel Permiano del Texas non mancano però esempi del genere [24]. L'apparente anomalia può essere spiegata abbastanza facilmente pensando che le scogliere non raggiungessero il livello di base delle onde sopra il quale l'erosione è assai intensa e che la loro crescita avvenisse in ambiente riparato e tranquillo. Faccio però presente a questo punto che in diverse zone sempre delle Prealpi venete, come ad esempio tra Marziai e Lentiai in Val del Piave, nei monti a Nord di Valdobbiadene, nei pressi di Vittorio Veneto, nel Vallone di Fadalto, ecc., ho rinvenuto dei banconi costituiti da una pasta fondamentale di calcare criptocristallino identica a quella che costituisce il biancone, in cui sono immersi numerosi frammenti, che a volte anche prevalgono, di dimensioni variabili da frazioni di millimetro a parecchi centimetri. In tali frammenti si notano spesso delle tracce di organismi purtroppo non identificabili, tranne forse qualche alga; nella massa più fine invece sono comuni radiolari e tintinnidi come *Calpionella alpina* e *C. elliptica* del Titoniano. A Nord di Valdobbiadene si rinvencono, separati l'uno dall'altro da pochi metri di biancone, due di tali livelli dall'aspetto conglomeratico. L'inferiore, contenente i microfossili su ricordati, del Titoniano; il superiore, con *Calpionellites darderi* Colom e *Tintinnopsella carphatica* Murg. & Fil., del Cretaceo inferiore. Si tratta quindi degli stessi livelli in cui altrove sono presenti le masse dolomitiche, per cui penso non sia azzardato il supporre che i frammenti suddetti rappresentino i resti di altre scogliere in tutto o in parte distrutte dall'erosione già durante o subito appresso la loro formazione e sedimentatisi entro il biancone normale.

Da quanto sopra esposto è facile rendersi conto di come le piccole scogliere - il cui studio è peraltro ben lungi dall'essere esaurito - sviluppatesi tra il Malm superiore ed il Cretaceo inferiore in certe zone delle Prealpi venete, possano riuscire utili nell'interpretare l'ambiente di sedimentazione del biancone.

L'opinione più diffusa ed accreditata circa la profondità del mare che dette origine al biancone, era che tale profondità fosse piuttosto rilevante. L'Haug [16] ad esempio parla del biancone come di un deposito di geosinclinale; Stenmann [31] sostiene trattarsi di una sedimentazione di mare molto profondo, sui 3 o 4000 metri. Anche Colom [6] pensa che il biancone rappresenti una facies di zona profonda, batiale. Tali vedute e quelle analoghe di altri Autori ancora [vedi ad esempio 27], sono fondate soprattutto sul fatto

che i rari macrofossili che si rinvenivano qua e là nel biancone (per la maggior parte ammoniti e belemniti) e i microfossili in esso contenuti (radiolari, tintinnidi) sono tutti organismi pelagici, mentre mancano i resti di organismi di fondo e costieri. È noto che anche da un punto di vista teorico la presenza di soli organismi pelagici non comporta necessariamente una sedimentazione profonda [14]; in proposito non mancano infatti degli esempi, basti citare i casi di sedimenti a radiolari (organismi ritenuti un tempo sicuro indizio di mare profondo in base ai depositi a radiolari attuali) che si sono rivelati, al contrario di quanto in precedenza ritenuto, come depositatisi sotto un esiguo spessore d'acqua [3].

A tutto ciò si aggiunge ora la presenza delle scogliere dolomitiche presenti entro il biancone, scogliere che già avevano fatto dubitare sulla notevole profondità del mare eocretaceo nella zona che ci interessa [1, 8, 28]. È infatti opinione corrente, finora mai smentita, che le scogliere di ogni tipo, siano esse dovute a madreporari, ad altri celenterati, a rudiste, ecc., si formino solo a debole profondità ed in particolari condizioni soprattutto nei riguardi della temperatura. Bisogna quindi pensare che il mare in cui crescevano le scogliere di cui abbiamo parlato e attorno alle quali, forse con la stessa velocità di formazione, veniva sedimentandosi il biancone, dovesse offrire condizioni analoghe su aree, per quanto riguarda la profondità, più o meno estese. Dobbiamo allora supporre un bacino di sedimentazione del tutto particolare: di poca profondità, molto esteso, tranquillo, senza grande agitazione delle acque dovuta a onde, correnti, ecc., nel quale poteva forse avvenire la precipitazione diretta del  $\text{CaCO}_3$  e in cui potevano vivere, oltre a quelli delle scogliere, praticamente solo organismi pelagici, come quei radiolari e tintinnidi che abbiamo visto essere presenti nel biancone addirittura a contatto con le masse dolomitiche. Per spiegare la mancanza di organismi bentonici si potrebbe anche pensare ad un bacino di tipo euxinico; ciò potrebbe sembrare in netto contrasto con la presenza delle scogliere, i cui organismi costruttori richiedono, secondo le osservazioni fatte su scogliere attuali, acque mosse e ben ossigenate. Anche in questo caso però sono stati segnalati esempi analoghi: Newell e altri [24] e Myers, Stafford e Burnside [23] hanno infatti riscontrato la presenza di scogliere in sedimenti di tipo euxinico, presenza peraltro non facilmente spiegabile.

Le scogliere da noi osservate terminano bruscamente verso l'alto senza che si noti alcun accenno di emersione. È probabile quindi che ad un certo momento gli organismi che venivano costruendole si siano trovati in condizioni sfavorevoli o addirittura proibitive (abbassamento del fondo, inquinamento delle acque. . . ?), che determinarono la scomparsa di queste formazioni.

Un bacino di sedimentazione del tipo che abbiamo più su tratteggiato non trova attualmente riscontro se non, in parte, nelle lagune di barriere e atolli corallini. Se si esclude però, oltre a tutto anche per la sua vastità, che si possa parlare in senso stretto di lagune di questo tipo per il bacino di deposizione del biancone, ci troviamo indubbiamente di fronte ad un ambiente e a condizioni assai particolari che non hanno alcun corrispondente attuale,

ciò che era già stato osservato da Rutten e Jansonius [29] per le piccole scogliere del Malm del Bacino di Parigi.

Ciò porta, sia pure tra notevoli difficoltà di interpretazione, ad un significato paleoceanografico dei sedimenti sul tipo del biancone diverso da quello sin qui addottato e, se ulteriori ricerche dovessero confermare queste ipotesi, ad una nuova visione paleogeografica della nostra regione durante il Malm superiore ed il Cretaceo inferiore.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BALESTRA A., *Contribuzione geologica al periodo Cretaceo del Bassanese*, « Boll. ann. Club Alpino Bassanese », vol. III, Bassano 1897.
- [2] BITTNER A., *Il territorio montuoso fra Vicenza e Verona*, « Boll. R. Com. Geol. d'It. », vol. 8, Roma 1877.
- [3] CADISCH J., *Geologie der Schweizer Alpen*, Basel 1953.
- [4] CAROZZI A., *Sédimentation rythmique en milieu corallien. Le Jurassique supérieur du Grand-Salève*, « Arch. des Sciences », vol. 7, Genève 1954.
- [5] CAROZZI A., *Le Jurassique supérieur récifal du Grand-Salève, essai de comparaison avec les récif coralliens actuels*, « Ecl. Geol. Helv. », vol. 47; Bâle 1955.
- [6] COLOM G., *Los Tintinnidos fósiles. - Infusorios Loricados del Orden de los Oligotricos*, « Estudios Geológicos », n. 11, Madrid 1950.
- [7] DAL LAGO D., *Note geologiche sulla Val d'Agno*, Valdagno 1899.
- [8] DAL PIAZ G., *Studi geotettonici sulle Alpi orientali*, « Mem. Ist. Geol. Univ. Padova », vol. 1, Padova 1912.
- [9] DE ZIGNO A., *Sul terreno cretaceo dell'Italia settentrionale*, Padova 1846.
- [10] DE ZIGNO A., *Nouvelles observations sur les terrains crétacées de l'Italie septentrionale*, « Bull. Soc. Geol. de France », 2<sup>a</sup> sér., t. VII, Paris 1849.
- [11] EMERY K. O., TRACEY J. I., LADD H. S., *Geology of Bikini and nearby atolls*; part I « Geol. Surv. P. P. », 260-A. Wash. 1954.
- [12] FAIRBRIDGE R. W., *Recent and Pleistocene coral reefs of Australia*, « Jour. Geol. », vol. 58, Chicago 1950.
- [13] FERASIN F., *Studio di una serie cretacea nella bassa Valle del Piave*, « Boll. Serv. Geol. d'It. », vol. 78, Roma 1956.
- [14] GIGNOUX M., *Géologie stratigraphique*, Paris 1950.
- [15] HADDING A., *Silurian reefs of Gotland*, « Jour. Geol. », vol. 58, Chicago 1950.
- [16] HAUG E., *Traité de Géologie*, Paris 1907.
- [17] HENSON F. R. S., *Cretaceous and Tertiary reef formations and associated sediments in Middle East*, « Bull. Am. Ass. Petr. Geol. », vol. 34, 1950.
- [18] KUENEN PH. H., *Marine geology*, New York 1950.
- [19] LADD H. S., TRACEY J. I., WELLS J. W., EMERY K. O., *Organic growth and sedimentation on an atoll*, « Jour. Geol. », vol. 58, Chicago 1950.
- [20] LECOMPTE M., *Quelques types de récifs siluriens et dévoniens de l'Amérique du Nord. - Essai de comparaison avec les récifs coralliens actuels*, « Bull. Musée Hist. Nat. Belgique », vol. 14, n. 39, Bruxelles 1938.
- [21] MAC NEIL F. S., *Organic reefs and banks and associated detrital sediments*, « Am. Jour. of Science », vol. 252, n. 7, 1954.
- [22] MARASCHINI P., *Sulle formazioni delle rocce del vicentino*, Padova 1824.
- [23] MYERS D. A., STAFFORD P. T., BURNSIDE R. J., *Geology of the Late Paleozoic Horseshoe Atoll in West Texas*, Univ. of Texas, Publ. n. 5607, Austin 1956.
- [24] NEWELL N. D., RIGBY J. K., FISCHER A. G., WHITEMAN A. J., HICKOX J. E., BRADLEY J. S., *The Permian Reef Complex of the Guadalupe Mountains Region, Texas and New Mexico*, San Francisco 1953.

- [25] OMBONI G., *Le nostre Alpi e la pianura del Po*, Milano 1879.
- [26] PARONA C. F., *Trattato di Geologia*, Milano 1924.
- [27] RODIGHIERO A., *Il sistema cretaceo del Veneto occidentale compreso fra l'Adige e il Piave, con speciale riguardo al Neocomiano dei Sette Comuni*, « Palaeontographia Italica », vol. XXV, Pisa 1919.
- [28] ROSSI A., *Note illustrative alla carta geologica della Provincia di Treviso*, « Boll. Soc. Geol. It. », vol. III, Roma 1884.
- [29] RUTTEN M. G. & JANSONIUS J., *The Jurassic reefs on the Yonne (Southeastern Paris Basin)*, « Am. Jour. of Science », vol. 254, 1956.
- [30] SECCO A., *Note geologiche sul Bassanese*, Bassano 1883.
- [31] STEINMANN G., *Gibt es fossile Tiefseablagerungen von erdgeschichtlicher Bedeutung?*, « Geol. Rund. », vol. XVI, Berlin 1925.
- [32] TARAMELLI T., *Geologia delle Provincie Venete*, « R. Acc. Lincei », Roma 1882.

**Mineralogia.** — *Il minerale a strati misti saponite-talco di Monte Chiaro (Val di Taro, Appennino Emiliano) (\*)*. Nota (\*\*) di ANDREA ALIETTI, presentata dal Corrisp. P. GALLITELLI.

Il Monte Chiaro situato sulla destra del fiume Taro, due chilometri a monte di Borgo Val di Taro sulla strada per il passo di Cento Croci, è caratterizzato da affioramenti di masse serpentinosi in parte ricoperte da argille.

Sul costone del monte, a quota 800 in località « la Nuvola » — due chilometri in linea d'aria a SE di Gotra e 600 m. da « Casa la Mia » — si apre una cava di talco, tuttora in coltivazione.

La cava si apre entro rocce serpentinosi ricoperte da argille caotiche giallastre. La serpentina, molto fratturata, è attraversata da vene di talco verde, associato talvolta a calcite e a solfuri, da filoncelli di materiale biancastro e da lenti di color verde scuro untuose al tatto con liscioni caratteristici. Il materiale verde scuro delle predette lenti è l'oggetto del presente lavoro.

Uno spettro ai raggi X sul materiale grezzo ha messo in evidenza che esso, oltre che da antigorite, clorite e talco, è costituito anche da un minerale con una interferenza caratteristica a circa  $24 \text{ \AA}$  (tabella I, colonna (a)).

Per lo studio di questo minerale furono eseguiti spettri di aggregato (Nagelschmidt, 1941), usando una camera Debye di 114,6 mm. di diametro e le radiazioni  $\text{Fe}_{\text{K}\alpha}$  e  $\text{Cu}_{\text{K}\alpha}$ , nonché diagrammi ottenuti con un diffrattometro Hilger e la radiazione  $\text{Cu}_{\text{K}\alpha}$ .

Per isolare il minerale, ho creduto opportuno eseguire la separazione granulometrica mediante staccature successive e mediante sedimentazione frazionata per i granuli inferiori ai  $30 \mu$  di diametro, usando per questo scopo un cilindro di vetro con una altezza di caduta di cm. 30 e ammoniacca come mezzo disperdente.

(\*) Il presente lavoro fa parte del gruppo di ricerche mineralogico-petrografiche sull'alloctono appenninico svolto nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Modena, sotto la direzione del prof. Paolo Gallitelli e con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1956.

TABELLA I.

| <i>a</i>  |  | <i>b</i>  |  |         | <i>c</i> |  |            |
|-----------|--|-----------|--|---------|----------|--|------------|
| I         | <i>d</i> (Å)                               | I         | <i>d</i> (Å)                               | ordine  | I        | <i>d</i> (Å)                             | indici     |
| <i>f</i>  | $\begin{cases} 24,8 \\ 24,5 \end{cases}$   | <i>ff</i> | $\begin{cases} 24,8 \\ 24,5 \end{cases}$   | 001     |          | 24                                       |            |
| <i>d</i>  | 14,2                                       |           |  |         |          |  |            |
| <i>f</i>  | $\begin{cases} 12,3 \\ 11,7 \end{cases}$   | <i>ff</i> | $\begin{cases} 12,3 \\ 11,7 \end{cases}$   | 002     | 10 +     | $\begin{cases} 12,4 \\ 11,2 \end{cases}$ | 001        |
| <i>d</i>  | 9,26                                       | <i>d</i>  | 9,35                                       |         |          |  |            |
| <i>d</i>  | 8,11                                       | <i>d</i>  | 8,11                                       | 003     |          |  |            |
| <i>m</i>  | 7,17                                       | <i>d</i>  | 7,17                                       |         |          |  |            |
| <i>m</i>  | 4,80                                       | <i>dd</i> | 4,80                                       | 005     | 2        | $\begin{cases} 4,96 \\ 4,89 \end{cases}$ | 002        |
| <i>m</i>  | 4,56                                       | <i>f</i>  | 4,56                                       |         | 10       | 4,54                                     | 02, 11     |
| <i>m</i>  | 3,63                                       | <i>dd</i> | 3,63                                       | 007 (?) |          |  |            |
| <i>ff</i> | $\begin{cases} 3,09 \\ 3,01 \end{cases}$   | <i>ff</i> | $\begin{cases} 3,12 \\ 3,07 \end{cases}$   | 008     | 5        | $\begin{cases} 3,5 \\ 3,0 \end{cases}$   | 003        |
|           |  | <i>d</i>  | 2,88                                       | 009 (?) |          |  |            |
| <i>d</i>  | 2,604                                      | <i>m</i>  | 2,604                                      |         | 9        | 2,618                                    | 13, 20     |
| <i>d</i>  | $\begin{cases} 2,477 \\ 2,432 \end{cases}$ | <i>m</i>  | $\begin{cases} 2,492 \\ 2,443 \end{cases}$ | 0010    |          |  |            |
|           |  |           |  |         | 2        | 2,279                                    | 04, 22     |
|           |  | <i>d</i>  | 2,199                                      |         |          |  |            |
|           |  | <i>d</i>  | 2,090                                      |         |          |  |            |
|           |  | <i>d</i>  | 1,875                                      |         |          |  |            |
|           |  | <i>d</i>  | 1,726                                      |         | 4        | 1,725                                    | 15, 24, 31 |
| <i>m</i>  | 1,525                                      | <i>f</i>  | 1,525                                      |         | 9        | 1,520                                    | 06, 33     |
| <i>d</i>  | 1,318                                      | <i>m</i>  | 1,318                                      |         | 7        | 1,314                                    | 26, 40     |
|           |  | <i>d</i>  | 1,268                                      |         | 2        | 1,265                                    | 17, 35, 42 |
|           |  |           |  |         | 1        | 1,047                                    | 28, 37, 51 |
|           |  | <i>d</i>  | 0,996                                      |         | 3        | 0,994                                    | 19, 46, 53 |
|           |  |           |  |         | 3        | 0,879                                    | 39, 60     |

a) Minerale a 24 Å associato ad antigorite e talco.

b) Minerale a 24 Å.

c) Stevensite di Springfield (New Jersey) (G. W. Brindley 1955).

Si è osservato che le frazioni con granuli inferiori ad  $1\ \mu$  contengono il minerale in questione associato a sola antigorite; non è però possibile, per sedimentazione, ottenere il minerale allo stato puro come è dimostrato dalla curva (a) della fig. 1 ottenuta al diffrattometro e che rivela ancora la presenza dell'antigorite.

Per ottenere il minerale allo stato di maggior purezza, si è ricorso ad una lunga e paziente separazione al microscopio binoculare delle varie specie di minerali presenti nelle frazioni più grossolane ottenute da stacci con 900 maglie per  $\text{cm}^2$  e sulle singole specie così ottenute si sono eseguiti spettri di polveri.

È stato così possibile riconoscere e separare il minerale a  $24\ \text{\AA}$ . Al microscopio, il minerale si presenta in aggregati tondeggianti o fascicolari translucidi, incolori o debolmente colorati in giallo o verde. L'indice di rifrazione medio determinato con il metodo dei liquidi ad  $n$  noto è compreso fra 1,558 e 1,567, il segno dell'allungamento per gli aggregati fascicolari è positivo. Al microscopio, il minerale è facilmente distinguibile dall'antigorite, molto abbondante, che si presenta in aggregati opachi di color verde pallido, dalla clorite in scagliette verde brillante e dal talco, molto raro, che si presenta in granuli tondeggianti bianchi translucidi. È presente pure calcite e pirite.

Si sono eseguiti spettri ai raggi X su aggregati in scagliette orientate e diagrammi col diffrattometro sul minerale puro naturale, trattato con glicerina e sottoposto al riscaldamento.

Nella tabella I colonna (b) sono riportati i risultati dello spettro eseguito sul minerale naturale, mentre nella colonna (c) sono riportati, per confronto i dati ottenuti da Brindley sulla stevensite di Springfield (New Jersey) (G. W. Brindley 1955).

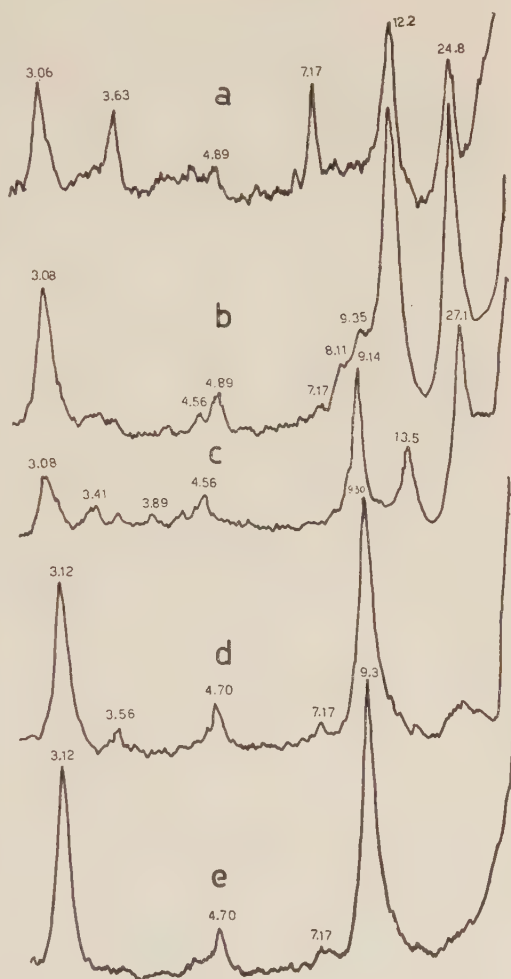


Fig. 1. - Diagrammi ottenuti al diffrattometro.

- (a) Minerale a  $24\ \text{\AA}$  associato ad antigorite.
- (b) Minerale a  $24\ \text{\AA}$  purificato.
- (c) Minerale a  $24\ \text{\AA}$  trattato con glicerina.
- (d) Minerale a  $24\ \text{\AA}$  riscaldato a  $430^\circ$ .
- (e) Minerale a  $24\ \text{\AA}$  riscaldato a  $530^\circ$ .

Dall'esame della colonna (*b*) si nota:

1° che il minerale in esame, oltre all'interferenza basale di 1° ordine a 24 Å, presenta il 2°, 3°, 5°, 8° e 10° ordine basale, mentre rimangono incerti il 7° ed il 9° ordine perché non hanno distanze reticolari che siano sottomultipli rigorosi della riflessione (001) a 24 Å.

2° che sono ancora presenti, ma assai deboli, le interferenze più caratteristiche dell'antigorite a 7,17 Å e del talco a 9,35 Å; questo indica che il minerale non è assolutamente puro, ma contiene una sia pur trascurabile quantità di detti minerali.

Dal confronto con i risultati ottenuti da G. W. Brindley per la stevensite (colonna (*c*)) si osserva che, pur avendo caratteristiche molto vicine, non vi è perfetta identità fra i due minerali.

Il trattamento con glicerina ha fornito la prova che il minerale ha un reticolo espandibile: infatti le interferenze di 1°, 2° e 3° ordine basale, molto nitide, si sono spostate nettamente a 27,16, 13,54, 9,14 Å, il settimo a 3,89 Å e l'ottavo ordine a 3,41 Å.

Riporto nella fig. 1 i diagrammi ottenuti al diffrattometro: per il minerale naturale (*b*) e per il minerale trattato con glicerina (*c*).

Il riscaldamento del minerale a 105° per un'ora provoca un sensibile spostamento dell'interferenza di 1° ordine da 24,8 a 25,15 Å. Il riscaldamento a 430° per sei ore indebolisce notevolmente le interferenze basali di 1° e 2° ordine che tendono a sfumarsi, mentre le altre sono appena percettibili o sono scomparse (fig. 1, (*d*)) e compaiono le interferenze del talco. Il riscaldamento a 530° trasforma completamente il minerale in talco (fig. 1, (*e*)).

#### ANALISI TERMODIFFERENZIALE.

Riporto nella figura 2 le curve di D. T. A. eseguite:

*a*) su gr. 0,6 della frazione con granuli inferiori a 1 μ e cioè del minerale associato ad antigorite;

*b*) su gr. 0,077 del minerale puro a 24 Å.

Sempre nella figura 2 la curva (*c*), riportata per confronto, è quella della stevensite di Springfield secondo Faust e Murata (G. T. Faust e K. J. Murata 1953).

La curva (*a*) è chiaramente la sovrapposizione della curva dell'antigorite - con un minimo endotermico sui 700° ed un massimo a 840° - con la curva (*b*) del minerale in esame. Quest'ultima, oltre al minimo endotermico a 150° comunissimo a molti minerali, presenta un flesso a 250° ed un minimo endotermico a 900° circa. Il minimo a 900° è nella curva (*b*) molto meno accentuato di quello che compare corrispondentemente nella curva (*a*), data la piccola quantità di minerale utilizzata per l'esperienza.

Un confronto fra le curve del minerale in esame (*b*) e della stevensite di Faust e Murata (*c*), ci permette di constatarne l'analogo andamento.

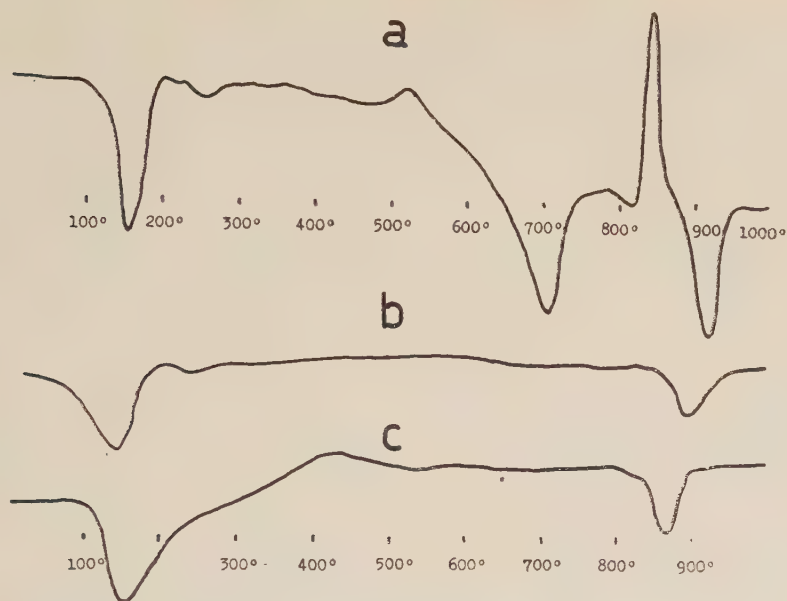


Fig. 2. - Curve di analisi termica differenziale.

- (a) Minerale a 24 Å associato ad antigorite (gr. 0,6 di sostanza).  
 (b) Minerale a 24 Å (gr. 0,077 di sostanza).  
 (c) Stevensite di Springfield (G. T. Faust e K. J. Murata).

#### ANALISI CHIMICA.

L'analisi chimica, sempre per la difficoltà di isolare anche piccole quantità di minerale, è stata eseguita su circa 0,2 gr. di sostanza e quindi attribuisco ai risultati un significato puramente indicativo. Riporto nella tabella II, oltre ai risultati da me ottenuti, per confronto i dati ottenuti da K. J. Murata per una delle stevensiti da lui analizzate (stevensite di Springfield).

La tabella II mette in chiaro che la differenza di composizione fra la stevensite analizzata da Murata e il minerale di cui è l'oggetto la presente Nota è principalmente data dalla sensibile percentuale di  $\text{Al}_2\text{O}_3$  e  $\text{FeO}$  di quest'ultimo.

Il calcolo della formula mediante il metodo proposto da Ross e Hendricks (1951) per i minerali del gruppo della montmorillonite, ha dato i seguenti risultati:



mentre Faust e Murata, usando lo stesso metodo di calcolo, per il minerale di Springfield hanno ottenuto la seguente formula:

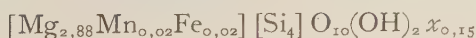


TABELLA II.

|  | I      | 2      |
|--|--------|--------|
| SiO <sub>2</sub> . . . . .               | 5,31   | 57,30  |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . . | 1,90   | —      |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . . | —      | 0,32   |
| FeO . . . . .                            | 2,95   | —      |
| MnO . . . . .                            | n. d.  | 0,21   |
| MgO . . . . .                            | 27,44  | 27,47  |
| CaO . . . . .                            | 1,01   | 0,97   |
| Na <sub>2</sub> O . . . . .              | 0,32   | 0,03   |
| K <sub>2</sub> O . . . . .               | 0,86   | 0,03   |
| H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> . . . . .  | 9,48   | 7,17   |
| H <sub>2</sub> O <sup>-</sup> . . . . .  | 2,59   | 6,69   |
|  | 100,86 | 100,19 |

(1) Minerale a 24 Å; M. Chiaro (Anal. Alietti).

(2) Stevensite; Springfield (N. J.) (Anal. K. J. Murata).

## STAINING TESTS.

L'uso degli « Staining Tests » (R. C. Mielenz et al. 1950) ha permesso di rivelare che mediante benzidina in soluzione acquosa il minerale si colora in azzurro come i montmorillonoidi e la stevensite di Faust e Murata; mentre l'azione della malachite verde e della safranina  $\gamma$  in soluzione di nitrobenzene, sul minerale trattato con acido, non hanno dato le reazioni caratteristiche dei montmorillonoidi stessi.

## CONCLUSIONI.

Il minerale a 24–25 Å rinvenuto entro lenti nel complesso di rocce serpentinosi affioranti sul costone del Monte Chiaro presso Borgo Val di Taro, è un minerale a strati misti e a struttura ordinata fra un montmorillonoido triottaedrico tipo saponite e il talco.

Dagli spettri e dai diagrammi di diffrazione ai raggi X si nota che:

il reticolo a 24 Å è dato dalla regolare sovrapposizione del reticolo a 9,5 del talco con quello a 14,8–15 Å della saponite.

per la presenza, oltre che della interferenza basale di 1° ordine a  $24 \text{ \AA}$ , di una serie quasi completa degli ordini successivi fino al decimo; e per il fatto che con il trattamento con glicerina il reticolo si espande e si origina una nuova serie di interferenze nitidissime e senza lacune, almeno per i primi ordini basali, si deduce che l'interlaminazione fra i due minerali è ordinata e regolare.

per effetto del riscaldamento a  $400^\circ$  il reticolo del minerale interlaminato si distrugge e si trasforma in talco anche lo strato montmorillonitico.

Il minerale in questione diversifica dalla stevensite di Springfield di Faust e Murata e poi ridefinita da G. W. Brindley per i seguenti caratteri:

|                               | Stevensite di Springfield  | Minerale $24 \text{ \AA}$ Monte Chiaro  |
|-------------------------------|--|---|
| Giacitura                     | entro basalti  | entro serpentina  |
| Interferenza $24 \text{ \AA}$ | debole   | fortissima  |
| Ordini superiori (00L)        | incompleti   | presenti quasi tutti fino al 10° ordine   |
| Espandibilità del reticolo    | comparsa della $17 \text{ \AA}$ e $8,5-9,5 \text{ \AA}$  | fortissima la $27,1 \text{ \AA}$ e comparsa di alcuni ordini superiori molto intensi                                |
| Riscaldamento a $400^\circ$   | reticolo talco   | reticolo talco  |
| D.T.A.                        | profondo apice a $865^\circ$   | profondo apice a $900^\circ$  |
| Formula                       | $[\text{Mg}_{2,88} \text{Mn}_{0,02} \text{Fe}_{0,02}] \cdot [\text{Si}_4] \text{O}_{10}(\text{OH})_2 x_{0,15}$ | $[\text{Mg}_{2,82} \text{Fe}_{0,17}] [\text{Al}_{0,55} \text{Si}_{3,45}] \cdot \text{O}_{10}(\text{OH})_2 x_{0,26}$ |

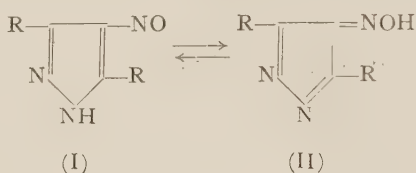
Dal complesso delle osservazioni si può quindi concludere che il minerale di Monte Chiaro e la stevensite di Springfield sono minerali dovuti a interlaminazione fra un montmorillonite (saponite) e il talco, ma mentre quello del Monte Chiaro ha una struttura ordinata, la stevensite di Springfield sembra possedere una struttura meno regolare.

#### BIBLIOGRAFIA.

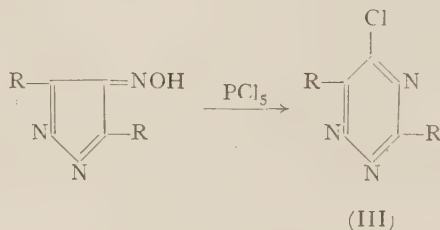
- G. W. BRINDLEY (1951). *X-ray identification and crystal structures of clay minerals*, London.
- G. W. BRINDLEY (1955). *Stevensite, a montmorillonite type mineral showing mixed-layer characteristics*, « Amer. Min. », 40, 239-247.
- G. T. FAUST e K. J. MURATA (1953). *Stevensite, redefined as a member of the montmorillonite group*, « Amer. Min. », 38, 973-987.
- R. C. MIELENZ (1950). *Stainig Tests*, Rept. 7, American Petroleum Inst. Project 49, Columbia University, New York.
- G. NAGELSCHMIDT (1941). *Aggregate technique*, « Jour. Sc. Instr. », 18.
- C. S. ROSS e B. HENDRICKS (1945). *Minerals of the montmorillonite group*, « U. S. Department of the Interior, Professional Paper », 205 B, 23-79.

**Chimica organica.** — *Sopra una nuova reazione di apertura dell'anello pirazolico. Nuova sintesi delle triazine asimmetriche*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di RAFFAELLO FUSCO e SILVANO ROSSI, presentata dal Socio L. CAMBI.

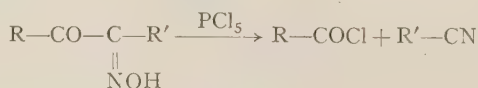
Per i 4-nitroso pirazoli con la posizione 1 libera è comunemente ammessa la tautomeria fra la forma di nitrosoderivato (I) e quella ossimica (II):



Indagando il comportamento al  $\text{PCl}_5$  di alcuni rappresentanti di questa classe di sostanze, abbiamo voluto verificare se potesse aver luogo in esse una normale trasposizione di Beckmann con formazione di una 5-cloro (1, 2, 4) triazina (III):



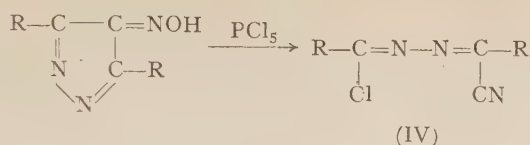
Si è invece constatato che la reazione segue un decorso diverso, dando luogo a sostanze isomere della prevista clorotriazina III, secondo un meccanismo che ricorda il comportamento allo stesso reattivo degli  $\alpha$ -isonitroso-chetoni. È ben noto infatti che tali sostanze si scindono, per azione del  $\text{PCl}_5$ , in una molecola di nitrile ed una di cloruro acido secondo lo schema:



In modo analogo nei 4-nitroso-pirazoli si verifica la rottura di un legame C—C e l'apertura dell'anello pirazolico; il gruppo isonitroso si trasforma in —CN ed un atomo di cloro resta legato all'altro atomo di carbonio:

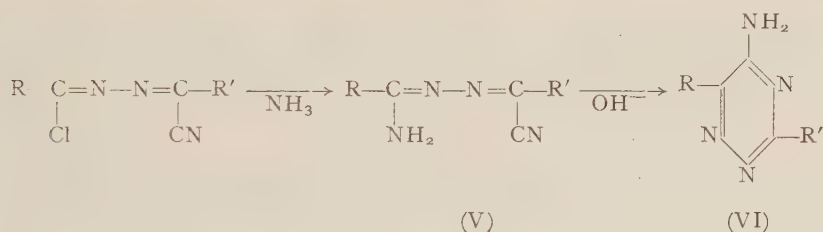
(\*) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Chimica Industriale Organica dell'Istituto per la laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1956.



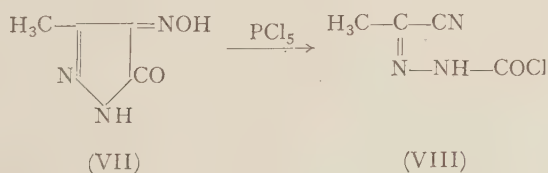
I nuovi prodotti (IV) che prendono origine dalla reazione appartengono ad una classe completamente nuova di composti: gli 1-cloro, 4-cian, 2-3-diaza, butadieni (1, 3). Conformemente alla teoria tali sostanze sono costituite da un prodotto unitario qualora i due sostituenti R del nitroso pirazolo di partenza siano uguali tra loro e da una miscela dei due isomeri possibili quando i due sostituenti siano diversi. In taluni casi ci è stato possibile separare i due isomeri e determinarne la struttura.

La mobilità dell'alogeno in questi composti ne consente la facile trasformazione nei corrispondenti aminoderivati (V) che sotto l'azione degli alcali ciclizzano per dare derivati 5-amino (1, 2, 4) triazinici (VI):



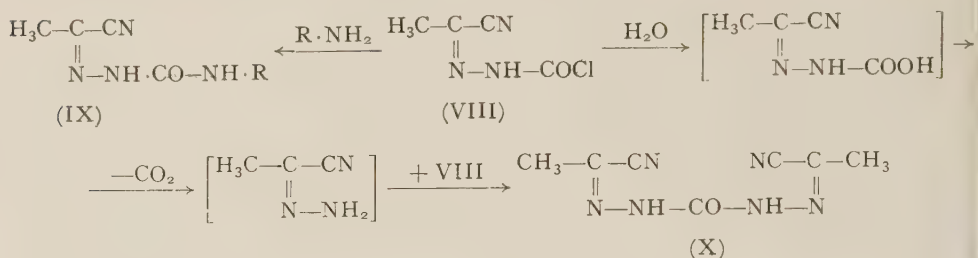
Poiché nelle aminotriazine VI è possibile successivamente sostituire l'aminogruppo con l'—OH, il —Cl, l'NH—NH<sub>2</sub> e infine l'H, la sequenza di reazioni costituisce un nuovo procedimento di sintesi dell'anello (1, 2, 4) triazinico suscettibile di numerose applicazioni particolarmente per la preparazione di derivati di questo eterociclo difficilmente accessibili per altra via.

È stata inoltre indagata l'estensione di questa reazione ai 4-isonitroso, 5-pirazoloni studiando il comportamento del 3-metil-4-isonitroso, 5-pirazolone (VII) al PCl<sub>5</sub>. La reazione decorre anche in questo caso con apertura dell'anello e rottura del legame fra le posizioni 4 e 5: prende origine il cloroformilidrazone del nitrile piruvico (VIII), sostanza recante l'aggruppamento =N—NH—COCl che presenta una notevole somiglianza con la funzione di cloruro carbammico.



In armonia con tale somiglianza è il suo comportamento con vari reattivi: in particolare la sua trasformazione in derivati della semicarbazide

(IX) con ammoniaca ed ammine e in un derivato della carbodiidrazide (X) per semplice azione dell'acqua:



Tra breve ed in altra sede saranno resi noti i dettagli sperimentali di queste ricerche.

**Chimica biologica.** — *Su alcune proprietà del protide contrattile del tessuto muscolare del piede di « Solen siliqua » L.<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di NORA BARGONI e MARIA A. ATZORI, presentata dal Socio G. LEVI.*

Essendosene offerta la possibilità, abbiamo condotto indagini sul protide contrattile del tessuto muscolare, costituito esclusivamente di fibre lisce, del piede del lamellibranco *Solen siliqua* L., che non ci consta essere stato, prima d'ora, oggetto di studi.

Gli esemplari di *Solen siliqua* L. provenivano dalle acque di Olbia ed erano conservati vivi in acqua di mare fino al momento dell'esperimento. Il muscolo del piede, appena prelevato, era triturato in mortaio raffreddato a 0°C, con un egual peso di sabbia di quarzo ed estratto per 10 minuti con 5 volumi di una soluzione contenente KCl 0,5 M e NaHCO<sub>3</sub> 0,05 M, pure raffreddata a 0°C. Dopo centrifugazione il supernatante era addizionato a 20 volumi di acqua distillata fredda e il precipitato formato, raccolto per centrifugazione, era ridisciolto in 5 volumi della soluzione salina. Si centrifugava e si ripeteva ancora due volte la precipitazione mediante acqua distillata. Il precipitato separato da ultimo, sciolto in 5 volumi della soluzione di KCl—NaHCO<sub>3</sub>, era adoperato per le indagini.

Il preparato ottenuto ha i caratteri di un protide contrattile, insolubile in acqua distillata, del tipo della globulina miosina. Iniettando lentamente mediante una siringa munita di un ago sottile in un volume piuttosto grande di acqua distillata una piccola quantità di una soluzione del preparato in KCl 0,5 M e NaHCO<sub>3</sub> 0,05 M, il protide solubile si trasforma in insolubile con la conseguente formazione di un filamento chiaramente visibile, capace di contrarsi per addizione di adenosintrifosfato. La soluzione salina del

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Sassari.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1956.

protide risulta fortemente viscosa; l'attrito interno, misurato alla temperatura di 18° C con un viscosimetro di Ostwald (tempo di svuotamento con acqua distillata: 1' 30''), è diminuito notevolmente.

TABELLA I.

*Effetto dell'adenosintrifosfato sulla viscosità della soluzione salina del preparato.*

Composizione delle prove: preparato in soluzione salina ml 5;  
adenosintrifosfato 0,2 M o H<sub>2</sub>O ml 0,1.

| Effettore                    | $\eta$ |
|------------------------------|--------|
| —                            | 1,83   |
| Adenosintrifosfato . . . . . | 1,35   |

L'eventualità di una attività adenosin-5-fosfatodesaminasica del protide contrattile era ricercata determinando secondo Braganca e coll. <sup>(1)</sup> l'ammoniaca liberata durante l'esperimento. Componevano le prove ml 0,5 della soluzione salina della preparazione, ml 0,25 di adenosin-5-fosfato 0,023 M e ml 0,5 di soluzione regolatrice della reazione di veronal sodico-acetato sodico secondo Michaelis a pH 7,2. L'esperimento era condotto a 27° C e durava un'ora. Bloccata la reazione mediante addizione di acido solforico N, si procedeva alla determinazione dell'ammoniaca. In nessun caso la preparazione ha dimostrato un'attività adenosin-5-fosfatodesaminasica.

La determinazione dell'attività adenosintrifosfatasica era eseguita misurando il fosforo inorganico liberato durante l'idrolisi, mediante il metodo di Youngburg e Youngburg <sup>(2)</sup>. Come substrato veniva adoperato adenosintrifosfato sodico della Sigma Chemical Co. Componevano generalmente le prove ml 0,25 della soluzione salina del preparato; ml 0,5 di soluzione regolatrice della reazione di veronal sodico-acetato sodico secondo Michaelis a pH 7,2; ml 0,25 di adenosintrifosfato 0,005 M e ml 0,25 di H<sub>2</sub>O. Gli esperimenti erano condotti per lo più a 27° C e duravano 30 minuti. Si arrestava la reazione mediante addizione di ml 0,5 di acido tricloroacetico 1,2 M e sul liquido limpido si determinava l'ortofosfato.

Il preparato dimostra una chiara attività adenosintrifosfatasica (Tabella II) con una specificità di substrato apparentemente assoluta: infatti inosintrifosfato 0,001 M, adenosindifosfato 0,001 M, adenosinmonofosfato 0,001 M e pirofosfato 0,002 M non sono idrolizzati.

(1) B. M. BRAGANCA, J. H. QUASTEL e R. SCHUCHER, « Arch. Biochem. », 52, 19 (1954).

(2) G. E. YOUNGBURG e M. V. YOUNGBURG, « J. Lab. Clin. Med. », 66, 158 (1930).

TABELLA II.

*Attività adenosintrifosfatase del preparato.*

| Substrato              | $\mu\text{g P}$ determinato |    |       | $\mu\text{g P}$ liberato |
|------------------------|-----------------------------|----|-------|--------------------------|
|                        | I                           | II | media |                          |
| —                      | 9                           | 9  | 9     | —                        |
| Adenosintrifosfato . . | 36                          | 34 | 35    | 26                       |

L'idrolisi dell'adenosintrifosfato, assai intensa nei primi minuti della reazione, procede più lentamente nella seconda mezz'ora per arrestarsi del tutto dopo un'ora (fig. 1).

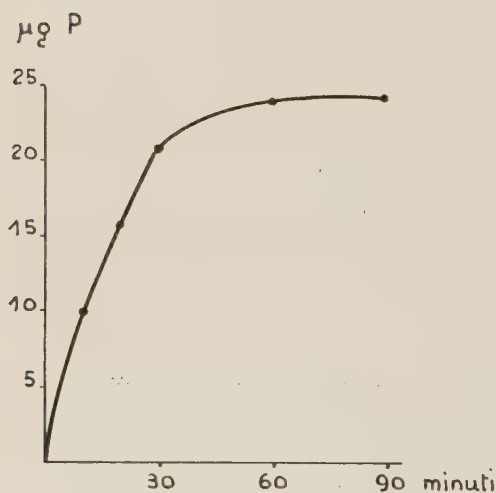


Fig. 1. - Decorso dell'idrolisi enzimatica dell'adenosintrifosfato.

Sull'asse delle ascisse è rappresentato il tempo in minuti; sull'asse delle ordinate i  $\mu\text{g}$  di P liberato.

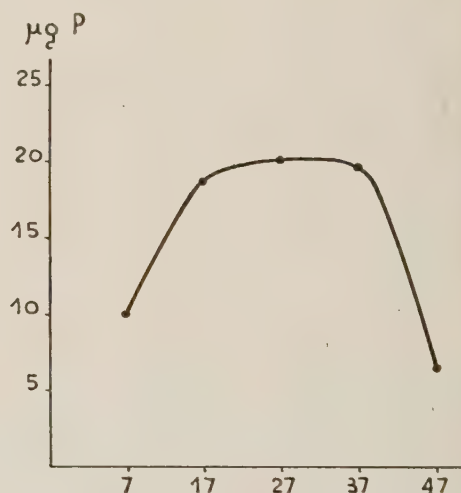


Fig. 2. - Dipendenza dell'attività adenosintrifosfatase del preparato dalla temperatura.

Sull'asse delle ascisse è rappresentata la temperatura in  $^{\circ}\text{C}$ ; sull'asse delle ordinate i  $\mu\text{g}$  di P liberato.

La velocità della reazione rimane pressoché costante tra  $17^{\circ}$  e  $37^{\circ}\text{C}$ ; a temperature superiori cade rapidamente (fig. 2).

In soluzione regolatrice della reazione di veronal sodico-acetato sodico, secondo Michaelis, l'attività adenosintrifosfatase della preparazione risulta ottimale a due differenti concentrazioni di idrogenioni, precisamente a pH 6,1 e 8,5 (fig. 3).

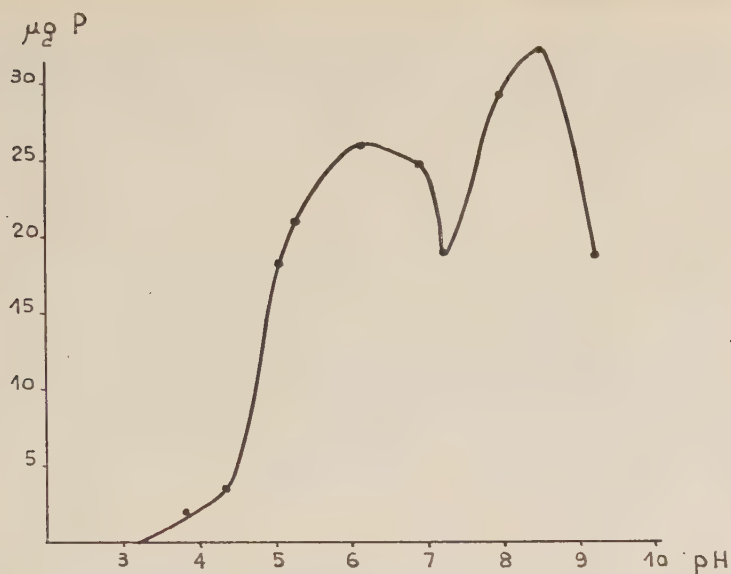


Fig. 3. - Dipendenza dell'attività adenosintrifosfatase del preparato dalla concentrazione degli idrogenioni.

Sull'asse delle ascisse sono rappresentati i valori di pH; sull'asse delle ordinate i  $\mu\text{g}$  di P liberato.

Mantenendo costanti gli altri fattori, la velocità della reazione è direttamente proporzionale alla concentrazione della preparazione (fig. 4).

La velocità della reazione è direttamente proporzionale a concentrazioni di adenosintrifosfato tra  $0,7 \mu\text{M}$  e  $2,1 \mu\text{M}$ . A maggiori concentrazioni del nucleotide cade rapidamente (fig. 5).

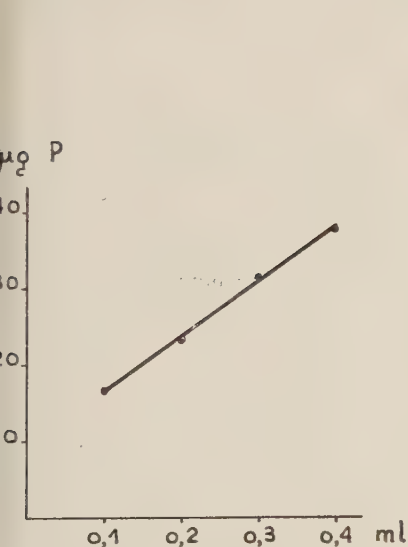


Fig. 4. - Effetto della concentrazione del preparato sull'attività adenosintrifosfatase.

Sull'asse delle ascisse sono riportate in ml le quantità di preparato; sull'asse delle ordinate i  $\mu\text{g}$  di P liberato.

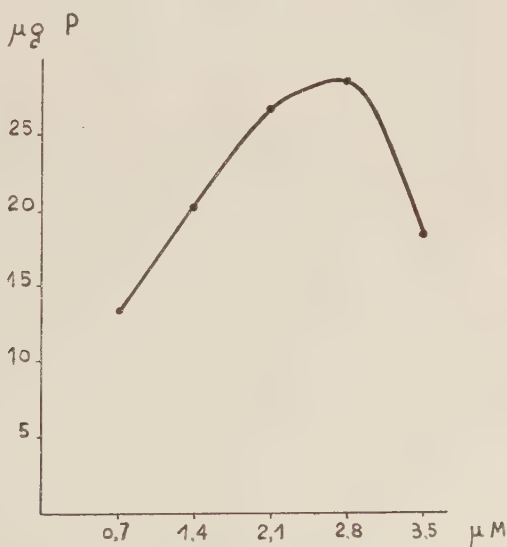


Fig. 5. - Effetto della concentrazione del substrato sull'attività adenosintrifosfatase del preparato.

Sull'asse delle ascisse sono riportate le quantità di substrato espresse in  $\mu\text{M}$  di adenosintrifosfato; sull'asse delle ordinate i  $\mu\text{g}$  di P liberato.

$\text{Ca}^{++}$  attivano sensibilmente la reazione, anche se il preparato enzimatico è stato conservato al freddo per più giorni.  $\text{Mg}^{++}$  inibiscono già alla concentrazione di 0,003 M e così pure etilendiaminotetracetato 0,005 M in modo pressoché totale (Tabella III).

TABELLA III.

*Effetto di  $\text{Ca}^{++}$ ,  $\text{Mg}^{++}$  e etilendiaminotetracetato sull'attività adenosintrifosfatasica del preparato.*

Composizione delle prove: preparato enzimatico ml 0,25; soluzione regolatrice della reazione di veronal sodico-acetato sodico a pH 7,2 ml 0,5; adenosintrifosfato 0,014 M ml 0,10;  $\text{CaCl}_2$  0,02 M o  $\text{MgCl}_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$  0,02 M o etilendiaminotetracetato 0,035 M o  $\text{H}_2\text{O}$  ml 0,15.

| Effettori                    | $\mu\text{g}$ P liberato | variazione % |
|------------------------------|--------------------------|--------------|
| —                            | 29                       |              |
| $\text{CaCl}_2$ . . . . .    | 39                       | + 34         |
| $\text{MgCl}_2$ . . . . .    | 18                       | — 38         |
| Etilendiaminotetracetato . . | 2                        | — 93         |

p-Cloromercuribenzoato 0,0002 M inibisce l'idrolisi dell'adenosintrifosfato del 90%. L'attività del preparato è completamente ripristinata dalla addizione di cisteina 0,006 M al sistema sperimentale (Tabella IV). Iodoacetato 0,02 M risulta senza effetto.

TABELLA IV.

*Effetto di p-cloromercuribenzoato e cisteina sull'attività adenosintrifosfatasica del preparato.*

Composizione delle prove: preparato enzimatico ml 0,25; soluzione regolatrice della reazione di veronal sodico-acetato sodico a pH 7,2 ml 0,5; adenosintrifosfato 0,014 M ml 0,10; p-cloromercuribenzoato 0,002 M o  $\text{H}_2\text{O}$  ml 0,1; cisteina 0,12 M o  $\text{H}_2\text{O}$  ml 0,05.

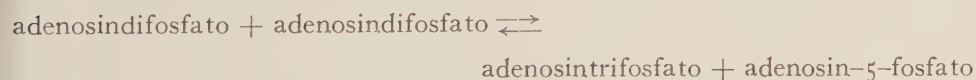
| Effettore                                   | $\mu\text{g}$ P liberato |
|---|--------------------------|
| —   | 22                       |
| p-cloromercuribenzoato . . . . .            | 2                        |
| cisteina. . . . .                           | 23                       |
| p-cloromercuribenzoato + cisteina . . . . . | 24                       |

Concludendo, mentre è agevole notare nel protide contrattile ottenuto dal muscolo del piede del lamellibranco *Solen siliqua* una somiglianza con l'analogo del tessuto muscolare striato di vertebrati relativamente a certe proprietà, quali la insolubilità in acqua distillata, la capacità di contrarsi per addizione di adenosintrifosfato, l'attività adenosintrifosfatasica, per altre invece se ne differenzia nettamente. A questo proposito ha particolare interesse la mancanza di una attività adenosin-5-fosfodesaminasica, che si trova invece nella miosina di vertebrati. Pure taluni caratteri peculiari dimostra l'attività adenosintrifosfatasica, che s'accompagna al protide contrattile, e precisamente una specificità di substrato apparentemente assoluta, una inibizione da etilendiaminotetracetato, che per la miosina di coniglio è invece agente attivante <sup>(3)</sup>, e un perdurare dell'attivazione con  $\text{Ca}^{++}$  dopo conservazione, contrariamente a quanto è noto per la miosina di coniglio <sup>(4)</sup>.

**Chimica** (Chimica biologica). — *Effetto dell'alta montagna sull'adenilicocinasi del tessuto muscolare scheletrico e del cuore*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di CAMILLO LENTI e MARIA ANGELICA GRILLO, presentata dal Socio G. LEVI.

Come è noto generalmente, in anossia la concentrazione del glicogeno nel tessuto muscolare scheletrico e nel cuore [1, 2] diminuisce. Verosimilmente l'abbassamento nella concentrazione del polisaccaride è espressione di modificazioni di qualche reazione della glicolisi ossi- od anossibiontica. Per quanto si riferisce alla seconda, la velocità di una reazione essenziale per il suo svolgimento, quella fosforolitica, risulta diminuita rispetto al piano in ricerche condotte in alta montagna all'Istituto Angelo Mosso sul Col d'Olen [3]. Nella anossia ancora è conosciuta una modificazione nella concentrazione dell'adenosintrifosfato, fra l'altro nel tessuto muscolare striato e nel cuore, nel senso di una sua diminuzione.

Reazione interessante, alla quale, così come al processo glicolitico, seppure di differente entità, è attribuito il significato biologico di una resintesi del deposito di adenosintrifosfato, è la seguente:



catalizzata dalla adenilicocinasi, fosfotransferasi diffusa verosimilmente in ogni tessuto.

(3) E. T. FRIESS, « Arch. Biochem. Biophys. », 51, 17 (1954).

(4) W. H. F. M. MOMMAERTS e I. GREEN, « J. Biol. Chem. », 208, 833 (1954).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto « Angelo Mosso » sul Col d'Olen e nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Torino.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1956.

Per porre in luce nel muscolo striato e nel cuore un eventuale rapporto del processo di trasferimento con la diminuzione della concentrazione dell'adenosintrifosfato, abbiamo condotto indagini, confrontando la velocità della reazione in tessuti di ratti tenuti dieci-quindici giorni in alta montagna (Istituto «Angelo Mosso» sul Col d'Olen, a 2961 m sul livello del mare) con quelli di altri tenuti al piano (Torino, a 239 m sul livello del mare).

Per gli esperimenti vennero adoperati giovani ratti maschi del peso di 100-150 grammi, nutriti con pane, formaggio, lattuga e carote. Dagli animali, a digiuno da 24 ore, uccisi per dissanguamento, si prelevavano rapidamente il cuore e il tessuto muscolare striato di un arto posteriore, che, raffreddati in ghiaccio, erano triturati in mortaio a 0°C con egual peso di sabbia di quarzo e quindi estratti con 5 volumi di acqua distillata. Dopo 10 minuti si centrifugava per 4 minuti a  $600 \times g$ . 3 ml del sopranatante, addizionati di 0,15 ml di HCl 0,1 N, erano tenuti per 3 minuti in bagno d'acqua a 90°C; poi, portati a pH 6,5 con 0,15 ml di NaOH 0,1 N, erano centrifugati rapidamente. Il liquido limpido separato era usato per le indagini.

L'attività adenilicocinasi era seguita determinando con la miosina l'adenosintrifosfato formato dall'adenosindifosfato [4]. Componevano le prove: ml 0,4 della preparazione dell'enzima; ml 0,4 di miosina (preparata secondo Steyn Parvé e Gerritsen [5] dal muscolo scheletrico di ratto, in cui l'assenza di adenilicocinasi veniva saggiata), ml 0,2 di soluzione regolatrice della reazione di istidina 0,025 M a pH 7,2 contenente adenosindifosfato 0,006 M e  $MgCl_2$  0,015 M. Dopo 30 minuti a 37°C si arrestava la reazione con ml 0,5 di acido tricloracetico 1,2 M. Trascorsi 10 minuti, si centrifugava per 5 minuti. Su una parte del sopranatante si determinava il fosforo inorganico secondo Youngburg e Youngburg [6].

I risultati sono riportati nella tabella.

Dalla comparazione dei valori medi della velocità della dismutazione dell'adenosindifosfato ad adenosintrifosfato nel muscolo e nel cuore osservati a Torino con quelli misurati al Col d'Olen, dopo un soggiorno di 10-15 giorni, appaiono variazioni ben nette, in ambedue i tessuti nel senso di una diminuzione. Rispetto ai valori del piano la diminuzione maggiore interessa il tessuto muscolare scheletrico ( $-83,4\%$ ). Tale differenza - calcolando la  $t$  di Student - è statisticamente significativa per  $P < 0,27$ . La variazione è meno ampia nel cuore: la differenza percentuale ammonta a  $-38,9\%$  e dal calcolo della  $t$  di Student risulta pure statisticamente significativa per  $P < 0,27$ .

L'osservazione, che la resintesi dell'adenosintrifosfato, promossa dalla adenilicocinasi, nella muscolatura striata e nel cuore è diminuita in alta montagna nelle condizioni sperimentali adottate, può quindi spiegare, almeno in parte, la nota modificazione della concentrazione dell'adenosintrifosfato nei due tessuti in anossia. Altro interessante meccanismo, accanto a quello glicolitico anossibiontico, per la resintesi dell'adenosintrifosfato è rappre-

sentato dalla fosforilazione ossidativa. Abbiamo in corso indagini circa la eventualità di un effetto dell'alta montagna sull'importante processo, su cui speriamo di poter riferire tra breve.

TABELLA.

*Attività adenilicocinasica del muscolo e del cuore di ratti al Col d'Olen e a Torino.*

| Al Col d'Olen    |                               |       | a Torino         |                               |       |
|------------------|-------------------------------|-------|------------------|-------------------------------|-------|
| N. degli animali | µg adenosintrifosfato formato |       | N. degli animali | µg adenosintrifosfato formato |       |
|                  | muscolo                       | cuore |                  | muscolo                       | cuore |
| 1                | 343                           | 278   | 1                | 3090                          | 540   |
| 2                | 638                           | 441   | 2                | 2024                          | 654   |
| 3                | 736                           | 458   | 3                | 2550                          | 557   |
| 4                | 540                           | 493   | 4                | 2270                          | 458   |
| 5                | 360                           | 507   | 5                | 3130                          | 654   |
| 6                | 392                           | 425   | 6                | 3680                          | 572   |
| 7                | 409                           | 262   | 7                | 3020                          | 540   |
| 8                | 213                           | 589   | 8                | 2040                          | 768   |
| 9                | 425                           | 213   | 9                | 2530                          | 850   |
| 10               |                               | 376   | 10               |                               | 654   |
| 11               |                               | 327   | 11               |                               | 819   |
| 12               |                               | 294   | 12               |                               | 557   |
| Media            | 450                           | 388   | Media            | 2704                          | 635   |
| σ                | ± 161                         | ± 115 | σ                | ± 560                         | ± 122 |

BIBLIOGRAFIA.

[1] CORDIER D. a. DESSAUX G., « J. Physiol. », 43, 701 (1951).  
[2] MERRICK A. W. a. MEYER D. K., « Am. J. Physiol. », 177, 441 (1954).  
[3] LENTI C. e GRILLO M. A., in corso di stampa.  
[4] GILMOUR D. a. CALABY J. H., « Enzymologia », 16, 34 (1953).  
[5] STEYN PARVÉ E. P. a. GERRITSEN Th., « Biochim. Biophysic. Acta », 8, 104 (1952).  
[6] YOUNGBURG G. E. a. YOUNGBURG M. V., « J. Lab. Clin. Med. », 16, 158 (1930).

**Biochimica.** — *Contenuto di Coenzima A nella blatta (« Periplaneta americana » L.) e nella mosca domestica (« Musca domestica » L.)*<sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di MARIO BOCCACCI e SERGIO BETTINI, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

Data l'importanza che in questi ultimi anni ha assunto il Coenzima A, [1], abbiamo voluto dosarlo negli insetti, anche in relazione a nostre precedenti ricerche [2, 3, 4, 5] sull'azione insetticida degli acidi iodo bromo-, e cloroacetico (sostanze alchilanti alogenate) che esplicano la loro azione tossica alchilando i gruppi tiolici (il CoA contiene infatti un gruppo tiolico cui è strettamente legata la sua attività).

Come materiale biologico sono stati usati adulti maschi di blatta (*Periplaneta americana*) e adulti femmine di mosca domestica (*Musca domestica*).

Per i dosaggi di CoA ci siamo serviti del seguente metodo: 1 grammo di materiale posto nel fondo di una provetta viene tenuto a b. m. bollente per 10 minuti, quindi trasferito in un mortaio di vetro raffreddato a zero gradi e triturato con sabbia di quarzo dopo aggiunta di 5 cm<sup>3</sup> di acqua ghiacciata. L'estratto, lasciato per 15 minuti a zero gradi, viene poi centrifugato in centrifuga refrigerata.

Su 0,5 cm<sup>3</sup> dell'estratto così preparato si dosa il CoA con il metodo basato sulla acetilazione della solfanilammide, come è riportato da Novelli [6].

Poiché, come già da noi dimostrato [3], in *P. americana* alcuni muscoli delle coxe (muscoli rossi), contengono quantità notevolmente maggiori di succinodeidrogenasi, rispetto ad altri muscoli delle stesse coxe (muscoli bianchi), e dato che il CoA è legato, come la succinodeidrogenasi, al metabolismo ossidativo dei carboidrati, ci è sembrato opportuno mettere in evidenza anche le eventuali differenze nel contenuto di CoA tra i due tipi di muscolo. La nomenclatura dei muscoli prelevati è riportata in un precedente lavoro [3].

TABELLA I.

*Contenuto di CoA espresso in Unità/g di materiale fresco (« P. americana »).*

| Coxe in toto | Muscoli bianchi della coxa | Muscoli rossi della coxa |
|--------------|----------------------------|--------------------------|
| 11,4         | 6,1                        | 28,0                     |

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto superiore di Sanità, laboratorio di parassitologia.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1956.

Dalla Tabella I si nota che il contenuto di CoA nei muscoli bianchi della coxa è circa  $1/5$  di quello dei muscoli rossi. Questo dato, correlato con il fatto che, rispetto al muscolo bianco, il muscolo rosso contiene quantità notevolmente maggiori di succinodeidrogenasi e di citocromo [7], sta ad indicare che in esso, in relazione alla sua funzione, si ha un marcato metabolismo ossidativo.

In *M. domestica* abbiamo dosato il CoA oltre che sull'insetto in toto, anche sul solo torace, ottenendo valori pressoché uguali. Nelle mosche in toto abbiamo seguito l'andamento del contenuto di CoA con l'età.

TABELLA II.

*Contenuto di CoA espresso in Unità/g di materiale fresco*  
(« *M. domestica* »).

| Età in giorni . . . . .    | 1   | 3   | 6   | 9   | 12  |
|----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Contenuto di CoA . . . . . | 2.3 | 5.1 | 5.5 | 7.7 | 6.5 |

Dalla Tabella II si nota che in *M. domestica* il contenuto di CoA aumenta con l'età sino al 9° giorno. Watanabe e Williams [8] avevano già riscontrato che nei primi giorni d'età il diametro medio dei sarcosomi dei muscoli del torace di *Drosophila funebris* aumentava con un andamento analogo. Poiché Higgins ed al. [9] hanno dimostrato che nel fegato di ratto il CoA è soprattutto contenuto nei mitocondri, i dati da noi ottenuti, correlati con quelli di Watanabe e Williams possono indicare indirettamente che anche negli insetti il CoA sia prevalentemente localizzato nei sarcosomi.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] FORNAINI G. e MARINELLO E., « *Giornale di Biochimica* », 3, 97 (1954).
- [2] BETTINI S. e BOCCACCI M., « *Riv. Parass.* », 13, 165 (1952).
- [3] BETTINI S. e BOCCACCI M., « *Rend. Ist. Sup. San.* », 17, 188 (1954).
- [4] BETTINI S. e BOCCACCI M., « *Riv. Parass.* », 16, 13 (1955).
- [5] BETTINI S., BOCCACCI M. e ROSSI C., « *Riv. Parass.* », 16, 103 (1955).
- [6] NOVELLI D., in *Methods of Biochemical Analysis*, Vol. II, p. 201, 1955.
- [7] WIGGLESWORTH V. B., *The Principles of Insect Physiology*, p. 410-411, Mathuen 1950.
- [8] WATANABE M. I. e WILLIAMS C. M., « *J. Gen. Physiol.* », 37, 71 (1953).
- [9] HIGGINS H., MILLER G. A., PRICE G. M., e STRONG F. M., « *Proc. Roy. Soc. Exp. Biol. Med.* », 75, 462 (1950).

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XIX. *Variazioni sperimentalmente indotte del rapporto AA/DHA e corrispondenti variazioni della crescita e dell'attività respiratoria di segmenti di fusto di Pisello* (\*). Nota I (\*\*) di FEDERICA TREZZI, presentata dal Socio S. TONZIG.

Queste ricerche costituiscono, al tempo stesso, lo sviluppo e la convalida di altre precedentemente svolte in questo Istituto ed appartenenti, per la maggior parte, alla serie di contributi alla conoscenza della fisiologia dell'acido ascorbico. Tali contributi avevano dimostrato, per l'acido ascorbico, un'azione nettamente antagonistica a quella dell'auxina rispetto a una quantità di fenomeni quali, per esempio, la capacità da parte della cellula di assumere e di ritenere acqua, l'accrescimento cellulare per distensione, ecc. [1, 2, 3]; ma, più in particolare, queste mie nuove ricerche si ricollegano a quelle che avevano indicato come una, almeno, delle modalità con cui l'acido ascorbico esercita la sua azione consista nella capacità di impedire la formazione dei composti auxin-proteici, o di romperli se già formati, determinando in tal maniera l'inattivazione dell'auxina [4]; a quelle che avevano indicato come l'effetto antiauxinico, sia in vivo che in vitro, più che dell'acido ascorbico in forma ridotta (AA) sia proprio dell'acido deidroascorbico (DHA) [5, 6, 7, 8] e come l'auxina (AIA) sia capace di influire sull'equilibrio dinamico tra AA e DHA inibendo l'attività ascorbico ossidasica; ed a quelle, infine, che avevano mostrato come lo spostamento del rapporto endocellulare AA/DHA a favore della forma ossidata determini, fra l'altro, un minor consumo di ossigeno nel tessuto vivente [9]. Sia pure in forma schematica e tuttora provvisoria, il complesso delle ricerche che ho ora citato ci dà un quadro abbastanza concreto del modo col quale il sistema AIA-AA-DHA potrebbe funzionare da regolatore dell'attività cellulare: l'AIA, controllando l'attività ascorbico ossidasica, tenderebbe a mantenere elevato il rapporto AA/DHA, ed in ciò — almeno in parte — consisterebbe la sua azione stimolante l'attività della cellula; assai più complessa sarebbe l'azione del DHA, il quale, da una parte, agirebbe direttamente sull'AIA determinandone una inattivazione competitiva, dall'altra inibirebbe l'attività di sistemi deidrogenasici determinando, con ciò, una situazione di carenza di idrogeno e, di conseguenza, una depressione dell'attività metabolica implicante il mantenimento di gruppi sulfidrilici nello stato ridotto, la sintesi di legami energetici, la possibilità di sintesi riduttive, ecc. [8]. Così efficace è quest'azione depressiva del DHA che già diminuzioni molto modeste del rapporto AA/DHA appaiono avere risultati assai vistosi; si ha anzi l'impressione, che per altro esprimo qui in forma puramente ipotetica non disponendo di nessun dato concreto, che la cellula si sforzi di opporsi ad un eccessivo abbassarsi del

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1956.

rapporto AA/DHA favorendo il ripristinarsi della forma ridotta col convogliare sul DHA quanto più idrogeno è possibile. La carenza di idrogeno per i processi metabolici potrebbe essere, di conseguenza, anche più grave di quanto possa apparire dall'effettivo spostamento del rapporto AA/DHA; ma, in ogni caso, l'effetto negativo di tale spostamento potrebbe essere ulteriormente ingrandito dall'instaurarsi nella cellula d'uno stato, se così si può dire, ossidato e, in altri termini, dal progressivo abbassarsi del rapporto fra la forma ridotta e quella ossidata di composti inseriti nella stessa catena ossido-riduttiva che fa capo all'acido ascorbico [8]. È assai verosimile che a fenomeni di questo tipo siano dovuti i mutamenti nello stato chimico-fisico delle proteine plasmatiche che si rendono manifesti con le variazioni di vischiosità che l'arricchimento con acido ascorbico induce nel plasma cellulare in senso opposto a quelle determinate dall'arricchimento con auxina [1, 2, 3, 10, 11]; variazioni che si accompagnano ad altre riguardanti la superficie chimica liberamente reattiva delle molecole proteiche e, in definitiva, l'attività metabolica della cellula. Effetti grandiosi in senso antiauxinico possono quindi essere determinati (l'interesse della cosa giustifica la mia ripetizione) da abbassamenti anche molto esigui del rapporto AA/DHA.

Voglio anche ricordare come precedenti ricerche [12] abbiano dimostrato come il rapporto AA/DHA endocellulare, assai più che dallo stato ridotto od ossidato dell'ascorbico nel mezzo esterno, dipenda dall'attività dei sistemi enzimatici che, nella cellula, ne regolano l'ossidazione o la riduzione. Fino ad un certo punto, pertanto, si può provocare un aumento endocellulare di AA e di DHA sia con la somministrazione dall'esterno di AA che di DHA; ne deriva che, in condizioni fisiologiche così favorevoli da assicurare alla cellula una elevata disponibilità di idrogeno, una diminuzione del rapporto AA/DHA endocellulare – e quindi un effetto antiauxinico della somministrazione di acido ascorbico dall'esterno – potrà essere osservato soltanto dopo un aumento relativamente cospicuo dell'acido ascorbico totale (AA + DHA) nella cellula.

L'interesse del quadro derivante dai dati or ora esposti è, obiettivamente, assai notevole; così da rendere tanto più imperiosa la necessità che i risultati ed i reperti su cui essi poggiano ne vengano non solo confermati, ma ulteriormente estesi e minuziosamente analizzati. È appunto a questa esigenza che intendono rispondere le ricerche qui esposte; ricerche che, in modo particolare, si propongono di chiarire i rapporti tra variazioni endocellulari del rapporto AA/DHA, respirazione (valutata come consumo di ossigeno) ed accrescimento (valutato come incremento in peso).

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

Era già ampiamente noto, per le ricerche di numerosi autori, che il trattamento con auxina, mentre stimola l'incremento in peso per assunzione d'acqua del tessuto, provoca anche un maggior consumo di ossigeno [13 a 33]; esperienze precedenti [34] avevano dimostrato, d'altra parte, come il con-

tenuto in AA in segmenti di coleottili di avena o di fusticino di pisello immersi in soluzione di AIA, in un primo tempo aumenti in senso assoluto sopra il livello iniziale e, successivamente, si abbassi molto più lentamente in confronto di segmenti controllo immersi in acqua; altre esperienze [5, 6, 35], infine, avevano messo in evidenza una inibizione dell'attività ascorbico ossidasica di preparati enzimatici di pisello per effetto dell'AIA e di altre auxine. Tali reperti erano stati ottenuti separatamente su materiali ed in condizioni sperimentali diverse; in una prima esperienza, che doveva servire di punto fermo per quelle successive, io li ho ripresi e coordinati in modo che se ne potesse trarre una ben determinata conclusione: la conoscenza delle variazioni (contemporaneamente determinate) dell'intensità di respirazione (consumo di ossigeno) e del contenuto in AA ed in DHA (pertanto anche del rapporto AA/DHA) quali sono registrabili in organi il cui accrescimento è stimolato per effetto del trattamento con auxina.

La relativa esperienza è stata eseguita su segmenti distali lunghi 5 mm del 3° internodio del fusto di plantule eziolate di pisello (*Pisum sativum* var. Alaska) coltivate per 8 giorni in camera buia condizionata a 25°C. I segmenti, appena prelevati, venivano lavati in acqua corrente per circa 1 ora, poi pesati a gruppi di 15 e trasferiti in vaschette d'un respirometro di Warburg contenenti 3 cc di soluzione tampone ai fosfati 0,02 M, pH 5,5, con aggiunta - oppure no - di AIA a concentrazione finale  $10^{-5}$ . Le vaschette contenenti i gruppi di segmenti ed altre con le sole soluzioni quali termobarometri, erano portate in bagno termostatico a 25°C, agitate al ritmo di 90 oscillazioni al minuto pr., e lasciate ambientare per 10 min. pr.; quindi, chiusi i manometri, venivano iniziate le letture del consumo di ossigeno. Parallelamente alla determinazione del consumo di ossigeno venivano fatte quelle dell'incremento in peso e del contenuto in AA ed in DHA. A tale scopo, a determinati intervalli di tempo (1, 3, 4 e 1/2 e 6 ore), i gruppi di segmenti di alcune vaschette venivano prelevati, rapidamente asciugati su carta da filtro, pesati, estratti con acido metafosforico 3% addizionato di qualche goccia di tiourea e, nell'estratto, veniva determinato il contenuto in AA ed in DHA + DKG secondo il metodo di Roe e Kuether [36] (è da precisare, nei confronti di quanto sinora ho detto, che i dati relativi al DHA indicano, in realtà, la somma dell'acido deidroascorbico più il dichetugulonico).

I risultati dell'esperienza, compendati nella tabella I, possono essere riassunti dalla constatazione che l'incremento di crescita provocato, nei saggi, dal trattamento con AIA, è accompagnato da un maggior consumo di ossigeno e da un aumento del rapporto AA/DHA; le variazioni di quest'ultimo appaiono dovute ad una meno intensa ossidazione dell'AA mentre rimane sostanzialmente immutato il totale delle varie forme d'ascorbico.

Taluni particolari di questa esperienza meritano, peraltro, d'essere più minuziosamente analizzati. Quelli, anzitutto, che riguardano il ritmo del consumo d'ossigeno. Devo avvertire, a tale riguardo, che i valori riportati in tabella indicano il consumo orario; in realtà, peraltro, io ho fatto le letture di 15 in 15 min. pr. ed è servendomi di questi dati ch'io ho costruito le curve riportate nella fig. 1 A. Si rileva da esse come il consumo d'ossigeno, sia nei saggi che nei controlli, parta da valori assai elevati; e come, durante la prima parte dell'esperienza, i valori cadano molto rapidamente fino ad un livello che tende a rimanere poi stabilizzato per buona parte dell'esperienza, pure con lieve diminuzione soprattutto verso la fine.

TABELLA I.

*Comportamento di segmenti del 3° internodio di piantine eziolate di pisello trattati per tempi diversi con AIA alla stessa concentrazione.*

Changes in water uptake, O<sub>2</sub> consumption and in the ascorbic (AA), dehydroascorbic (DHA) and diketogulonic (DKG) acid contents in pea internode segments kept for 1, 3, 4, 30, 6 hours in an AIA 10<sup>-5</sup> solution. Basic medium potassium phosphate 0,02 M.

|                                | Tempo di esper. | Incr. % peso | O <sub>2</sub> consum. mm <sup>3</sup> /gr | AA + DHA + DKG γ/gr | AA γ/gr | DHA + DKG γ/gr | AA/DHA + DKG |
|--------------------------------|-----------------|--------------|--|---------------------|---------|----------------|--------------|
| Controllo . . . . .            | 1 ora           | 4,1          | I ora<br>344                               | 398                 | 392     | 96             | 3,1          |
| AIA 10 <sup>-5</sup> . . . . . |                 | 12,2         |  |                     |         |                |              |
| Controllo . . . . .            | 3 ore           | 10,2         | II ora<br>256                              | 392                 | 310     | 82             | 3,7          |
| AIA 10 <sup>-5</sup> . . . . . |                 | 30,4         |  |                     |         |                |              |
|                                |                 |              | III ora<br>362                             | 383                 | 328     | 65             | 5            |
| Controllo . . . . .            | 4,30 ore        | 16,7         | IV ora<br>250                              | 387                 | 320     | 67             | 4,7          |
| AIA 10 <sup>-5</sup> . . . . . |                 | 42,1         |  |                     |         |                |              |
|                                |                 |              | 360  | 381                 | 342     | 39             | 8,7          |
| Controllo . . . . .            | 6 ore           | 22,3         | V ora<br>246                               | 405                 | 334     | 71             | 3            |
| AIA 10 <sup>-5</sup> . . . . . |                 | 52           | 342  | 392                 | 346     | 46             | 7,5          |

L'andamento delle due curve (quella dei saggi e quella dei controlli) è praticamente parallelo, solo che l'una (segmenti in soluzione d'AIA) è nettamente più alta dell'altra (controlli). Il punto da chiarire è quello che si riferisce alla clamorosa caduta iniziale la quale attesta che, all'inizio dell'esperienza, la respirazione si svolgeva ad un ritmo elevatissimo e che decadeva poi con estrema rapidità. Il rilievo che tale fenomeno è comune ai saggi come ai controlli è sufficiente ad escludere una partecipazione ad esso dell'AIA; io credo di poter parimenti escludere che il fatto sia imputabile al consumo di materiali respiratori di più immediata utilizzazione e ritengo si tratti d'un fenomeno del tutto marginale dovuto alla particolare situazione nella quale, a causa delle condizioni sperimentali, si trovava il materiale respirante. La violenta respirazione iniziale sembra presentare un carattere anomalo e quasi patologico e potrebbe essere attribuita semplicemente ad una crisi d'ambientazione del materiale, per esempio per effetto delle ferite apportate al tessuto col prelievo del segmento d'internodio. La prima parte delle due curve potrebbe dunque essere anche cancellata perché relativa ad un periodo di tempo durante il quale i segmenti di fusto non avevano ancora ristabilita la normalizzazione; e, se io le mantengo, è unicamente perché esse dimostrano come, anche in queste condizioni, il trattamento auxinico eleva il consumo di ossigeno assai sopra ai controlli. La mia interpretazione, comunque, è avvalorata da un'esperienza, i cui risultati sono espressi in forma grafica nella stessa fig. I B, durante la quale ho seguito le variazioni di consumo d'ossigeno in segmenti messi nelle vaschette del Warburg non appena prelevati dalle piantine, e ai quali l'AIA è stato somministrato solo dopo che l'intensità respiratoria si era normalizzata. Un altro punto della esperienza di cui alla tabella I va posto in evidenza. Una certa sorpresa potrebbe essere determinata dal comportamento dei controlli che, salvo per i valori assoluti che sono sempre più bassi, è peraltro in tutto analogo a quello dei saggi. Ciò vale, come già prima ho notato, per l'intensità respiratoria, ma vale anche per la velocità d'accrescimento il cui ritmo tende addirittura ad accentuarsi, almeno sino alla terza determinazione, e solo accenna ad una lieve flessione verso la fine dell'esperienza, e vale ancora per il rapporto AA/DHA che, appunto fino alla terza determinazione, aumenta con ritmo progressivamente più veloce e solo alla fine subisce un tracollo. Ad un esame sommario, tutto questo potrebbe persino porre in dubbio la validità della tesi che ha per noi carattere fondamentale e che identifica un rapporto di causa ed effetto tra azione auxinica da una parte ed incremento della crescita, del consumo di ossigeno e, soprattutto, aumento del rapporto AA/DHA dall'altra.

Vale la pena di osservare, intanto, che, in ogni modo, l'inaspettato comportamento dei controlli trova pienamente rispettata la solidarietà tra i tre tipi di fenomeni; cosicché la presunta « anomalia » si riduce, in realtà, a questo: che i « controlli », piuttosto che come tali, si comportano come « saggi » trattati con dose inferiore di auxina.

TABELLA II.

*Comportamento di segmenti del 3° internodio di piantine esiolate di pisello trattati per tempi diversi con AIA alla stessa concentrazione e agitati o tenuti a riposo.*

The effects of auxin and of agitation on water uptake, and on the ascorbic (AA), dehydroascorbic (DHA) and diketogulonic (DKG) acid contents in pea internode segments kept for 1, 3, 4, 30, 6 hours. Basic medium potassium phosphate 0,02 M.

|                                | AGITATI           |              |                        |            |                   |            | NON AGITATI  |                        |            |                   |            |  |
|--------------------------------|-------------------|--------------|------------------------|------------|-------------------|------------|--------------|------------------------|------------|-------------------|------------|--|
|                                | Tempo di esper.   | Incr. % peso | AA + DHA + DKG<br>γ/gr | AA<br>γ/gr | DHA + DKG<br>γ/gr | AA/DHA+DKG | Incr. % peso | AA + DHA + DKG<br>γ/gr | AA<br>γ/gr | DHA + DKG<br>γ/gr | AA/DHA+DKG |  |
| Controllo . . . . .            | 1 ora             | 4,3          | 392                    | 328        | 74                | 4,4        | 2,1          | 389                    | 83         | 306               | 3,6        |  |
| AIA 10 <sup>-5</sup> . . . . . |                   | 13           | 438                    | 370        | 68                | 5,4        | 6,2          | 396                    | 76         | 320               | 4,2        |  |
| Controllo . . . . .            | 3 ore             | 11,3         | 405                    | 336        | 69                | 4,8        | 7            | 388                    | 78         | 310               | 3,9        |  |
| AIA 10 <sup>-5</sup> . . . . . |                   | 34,7         | 428                    | 370        | 58                | 6,3        | 21           | 402                    | 67         | 335               | 5          |  |
| Controllo . . . . .            | 4 ore<br>30 primi | 18,3         | 420                    | 354        | 66                | 5,3        | 13,8         | 413                    | 80         | 333               | 4,1        |  |
| AIA 10 <sup>-5</sup> . . . . . |                   | 46,9         | 436                    | 396        | 40                | 9,9        | 32,7         | 422                    | 62         | 360               | 5,8        |  |
| Controllo . . . . .            | 6 ore             | 27,3         | 427                    | 353        | 74                | 4,7        | 18,6         | 421                    | 83         | 338               | 4          |  |
| AIA 10 <sup>-5</sup> . . . . . |                   | 60,2         | 399                    | 361        | 38                | 9,5        | 42           | 394                    | 60         | 334               | 5,5        |  |

L'attento esame delle condizioni sperimentali che potevano essere considerate responsabili d'un tale risultato mi ha, ovviamente, indotta ad esaminare l'effetto della continua agitazione che viene impressa alle vaschette del Warburg e che, mentre è indispensabile per la determinazione mano-

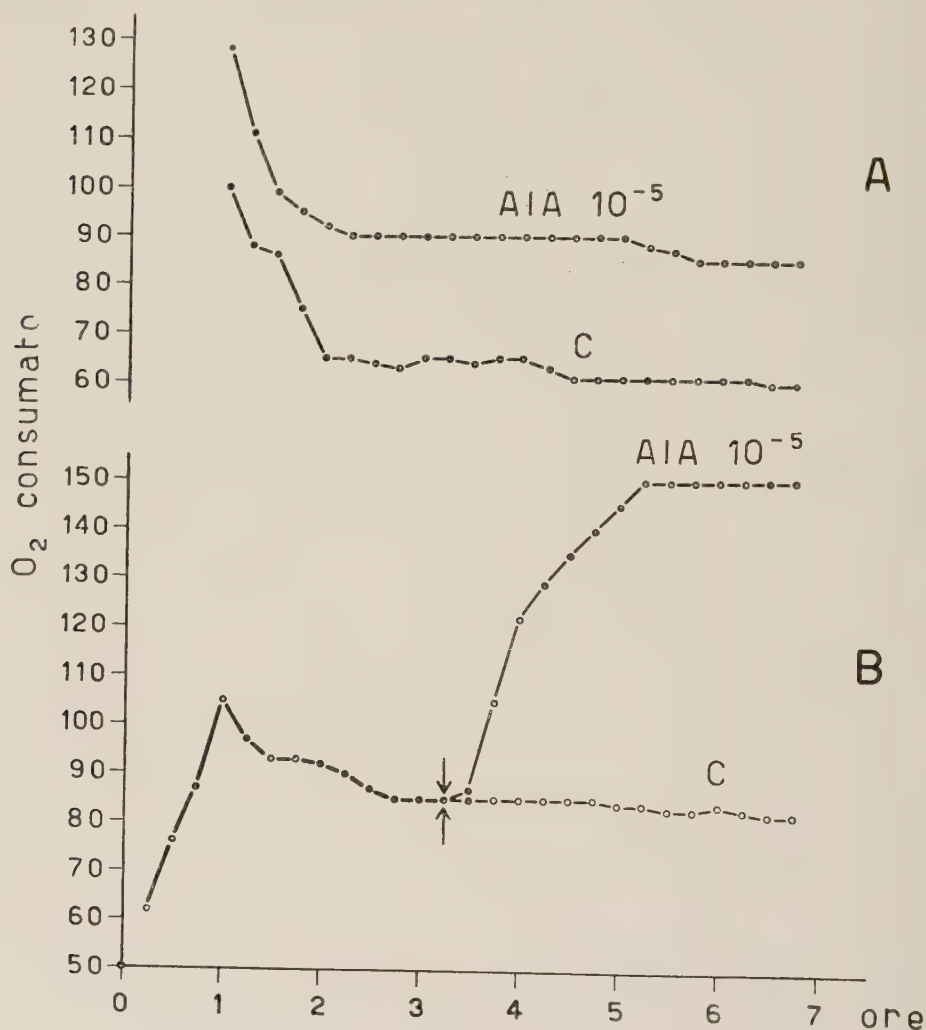


Fig. 1. - O<sub>2</sub> consumato in intervalli di 15 min. primi da segmenti di pisello in soluz. d'acido indolacetico (AIA) o di controllo (C).

A) lavati per 1 ora, trasferiti in vaschette del respirometro contenenti soluzione tampone o soluzione di AIA 10<sup>-5</sup> in tampone e infine ambientati per 15 min. primi prima di iniziare le letture.

B) tagliati ed immediatamente posti nelle vaschette del respirometro in soluzione tampone e ambientati 15 min. primi prima di iniziare le letture. Aggiunta di AIA a concentrazione finale 10<sup>-5</sup> al punto indicato dalle frecce.

metrica delle variazioni di volume del gas, assicura anche un continuo ed insolito (« insolito », naturalmente, in confronto delle condizioni che si verificano nelle consuete esperienze « a fermo ») arricchimento d'aria nella soluzione in cui è immerso il materiale respirante. Mi è sembrato che l'ipotesi meritasse d'essere verificata non soltanto perché in sé assai interessante

ma anche perché, se confermata, avrebbe potuto offrire una nuova riprova della connessione tra le variazioni del rapporto AA/DHA e ritmo di accrescimento; non sarebbe stato invece possibile prendere in considerazione anche le variazioni del consumo d'ossigeno il cui valore non può essere misurato se non agitando il liquido (a meno di non far ricorso a particolari accorgimenti cui ho tuttavia rinunciato giudicando sufficiente, ai fini di questo lavoro, rilevare l'andamento degli altri fenomeni).

La relativa esperienza è stata eseguita in duplice serie: i segmenti di internodio di pisello, immersi in eguali quantità di soluzioni tamponate e contenenti, oppure no, AIA, sono stati distribuiti in bicchieri che sono stati poi sottoposti, per tutto il tempo dell'esperienza, ad agitazione (circa 90 oscillazioni al minuto primo) oppure in scatole petri tenute immobili. I risultati di questa esperienza sono riassunti nella tabella II. L'effetto delle diverse condizioni sperimentali è quanto mai evidente e particolarmente caratteristiche sono le variazioni a carico dell'ascorbico il cui contenuto totale, come viene elevato nei saggi trattati con AIA in confronto dei controlli senza auxina, viene parimente elevato per effetto della semplice agitazione, cosicché il suo valore nei controlli agitati (privi di AIA) è praticamente pari a quello dei saggi non agitati (ma trattati con AIA). I valori massimi, sebbene non molto più alti, sono quelli dei saggi agitati in soluzione con AIA. In ogni caso l'aumento dell'ascorbico totale è tutto a carico dell'AA (forma ridotta); quanto al DHA esso è costantemente in diminuzione nei saggi con AIA rispetto ai rispettivi controlli senza AIA; e nei campioni agitati in confronto dei corrispettivi campioni non agitati. Il valore del rapporto AA/DHA varia in conseguenza: è più alto nei saggi con AIA in confronto dei rispettivi controlli senza AIA; ed è più alto nei campioni agitati in confronto dei corrispettivi campioni non agitati. I valori più alti sono quelli dei saggi trattati con AIA ed agitati: ma già i valori dei controlli agitati senza AIA si avvicinano a quelli dei saggi con AIA non agitati. L'accrescimento è in tutto aderente alle variazioni dell'ascorbico e, sebbene l'andamento delle quattro curve sia in tutto comparabile, esso è minimo nei controlli non agitati e senza AIA, massimo nei saggi agitati con AIA. L'esame dei risultati meriterebbe certo un'analisi più attenta ed uno studio assai più approfondito è indispensabile per poter capire il meccanismo del fenomeno. Ai fini della presente ricerca è peraltro sufficiente l'aver segnalato il fatto e l'aver constatato che, comunque indotte, le variazioni del rapporto AA/DHA inducono variazioni anche più forti a carico dell'accrescimento.

La continuazione e la conclusione di queste ricerche verranno esposte in una Nota successiva.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] TONZIG S. e TREZZI F., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 16, p. 434 (1954).
- [2] TONZIG S. e TREZZI F., « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 535 (1950).
- [3] TONZIG S. e TREZZI F., « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 549 (1950).

- [4] TONZIG S. e TREZZI F., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 17, p. 324 (1954).
- [5] MARRÈ E. e ARRIGONI O., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 18, p. 539 (1955).
- [6] MARRÈ E. e ARRIGONI O., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 19, p. 320 (1955).
- [7] MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 19, p. 460 (1955).
- [8] MARRÈ E. e LAUDI G., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 20, p. 77 (1955).
- [9] TONZIG S., TREZZI F., LAUDI G., e MARRÈ E., « Atti Acc. Naz. Lincei », Memorie Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 4, p. 109 (1955).
- [10] TONZIG S. e TREZZI F., « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 515 (1950).
- [11] TONZIG S., TREZZI F., e NAVA E., « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 59, p. 171 (1952).
- [12] LAUDI G., « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 62, p. 368 (1955).
- [13] REINDERS D. E., « Proc. Sect. Sc. Royal Ac. Amsterdam », vol. 41, p. 820 (1938).
- [14] REINDERS D. E., « Rec. Trav. Bot. Néerl. », vol. 30, p. 1 (1942).
- [15] COMMONER B. e MAZIA D., « Plant Physiol. », vol. 17, p. 682 (1942).
- [16] COMMONER B. e MAZIA D., « Am. J. Bt. », vol. 31, p. 8 (1944).
- [17] COMMONER B., FOGEL S. e MULLER W. H., « Am. J. Bt. », vol. 30, p. 23 (1943).
- [18] BONNER J., « J. Gen. Physiol. », vol. 17, p. 63 (1933).
- [19] BONNER J., « J. Gen. Physiol. », vol. 20, p. 1 (1936).
- [20] BRAUNER L., BRAUNER M. e HASMAN M., « Rev. Fac. Sc. Instambul », ser. B, vol. 5, p. 266 (1940).
- [21] BRAUNER L. e BRAUNER M., « Rev. Fac. Sc. Instambul », ser. B, vol. 8, p. 30 (1943).
- [22] COMMONER B. e THIMANN K. V., « J. Gen. Physiol. », vol. 24, p. 279 (1941).
- [23] ALBAUM H. G. e COMMONER B., « Biol. Bull. Woods Hole », vol. 80, p. 314 (1941).
- [24] ALBAUM H. G., KAISER S., GUTTENTAG C. e EICHEL B., « Am. J. Bt. », vol. 28, p. 10 sg. (1941).
- [25] BERGER J., SMITH P. e AVERY G. S. jr., « Am. J. Bt. », vol. 33, p. 601 (1946).
- [26] KELLY S., « Am. J. Bt. », vol. 34, p. 521 (1947).
- [27] HACKETT D. P. e THIMANN K. V., « Plant Physiol. », vol. 25, p. 648 (1950).
- [28] HACKETT D. P. e THIMANN K. V., « Am. J. Bt. », vol. 39, p. 533 (1952).
- [29] HACKETT D. P. e THIMANN K. V., « Am. J. Bt. », vol. 40, p. 183 (1953).
- [30] THIMANN K. V., « Growth Suppl. », vol. 15, p. 5 (1951).
- [31] HACKETT D. P., « Plant Physiol. », vol. 27, p. 279 (1952).
- [32] BONNER J., BANDURSKI R. S. e MILLER A., « Physiol. Plantarum », vol. 6, p. 511 (1953).
- [33] BONNER J. e BANDURSKI R. S., « Ann. Rev. Plant. Physiol. », vol. 3, p. 59 (1952).
- [34] MARRÈ E., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 16, p. 758 (1954).
- [35] ARRIGONI O. e MARRÈ E., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 17, p. 390 (1954).
- [36] ROE J. H. e KUETHER C., « J. Biol. Chem. », vol. 39, p. 1 (1945).

**Patologia.** — *Sulla inibizione della biosintesi indotta della  $\beta$ -galattosidasi nelle pettenkoferie di E. coli* <sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di GIUSEPPE PONTIERI e FELICE D'ONOFRIO, presentata dal Corrisp. L. CALIFANO.

La classificazione degli enzimi delle cellule batteriche in adattativi e costitutivi a seconda che la presenza di essi nella cellula sia o non dipendente dalla presenza di un induttore nel terreno di coltura (Karström <sup>(1)</sup>) ha perduto oggi molto del suo schematismo, anche se comunemente questi termini permangono in uso. Sono stati, infatti, isolati dei mutanti batterici in cui un enzima, tipicamente di adattamento nel ceppo di origine, presenta i caratteri di enzima costitutivo (Cohen Bazire e Jolit <sup>(2)</sup>) ed è stato dimostrato che gli enzimi francamente induttibili debbono essere ritenuti in parte costitutivi dato che essi sono presenti sia pure in tracce difficilmente svelabili nelle cellule sviluppate in un mezzo non contenente l'induttore (Judkin <sup>(3)</sup>; Spiegelman <sup>(4)</sup>; Monod <sup>(5)</sup>).

Talora, invero, l'attacco dello stesso substrato ha luogo nella cellula batterica ad opera di due enzimi diversi di cui uno costitutivo ed uno di adattamento: tale è il caso del maltosio il cui metabolismo nelle cellule di *E. coli* K 12 viene assicurato da una maltasi nei germi cresciuti in assenza di induttore e da una amilomaltasi nei germi adattati (Pontieri <sup>(6)</sup>).

Si può, quindi, senz'altro dire che la biosintesi indotta degli enzimi è in dipendenza di due fattori: uno interno, genico, che determina la attitudine all'adattamento ed uno esterno, rappresentato dall'induttore che è responsabile del verificarsi della sintesi dell'enzima.

La formazione di un enzima di adattamento è inibita dalla presenza, insieme con l'induttore, di un altro substrato nel mezzo di coltura, così ad esempio, la biosintesi della  $\beta$ -galattosidasi è inibita dal glucosio (Karström <sup>(1)</sup>).

Oltre questo tipo di inibizione, che si può chiamare competitivo, ne esiste un altro di tipo specifico quale è quello esercitato dall'1-4-dinitrofenolo nella sintesi della  $\beta$ -galattosidasi (Monod <sup>(7)</sup>) e quello che è stato ottenuto per mezzo delle acridine nella biosintesi indotta della citocromossidasi in *Saccharomyces cerevisiae* (Slonimski <sup>(8)</sup>). Interessanti risultati sono stati inoltre presentati da Cohn e Monod <sup>(9)</sup> che hanno messo in evidenza un effetto

(\*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1956.

(\*\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della Università di Napoli.

(1) H. KARSTRÖM, *Über die Enzyymbildung in Bakterien. Akademische Abhandlung* (Helsingfors 1930).

(2) G. COHEN-BAZIRE et M. JOLIT, « Ann. Inst. Past. », 84, 69 (1953).

(3) J. JUDKIN, « Biol. Rev. », 13, 93 (1938).

(4) S. SPIEGELMAN, « Cold. Spring. Harb. Symp. Quant. Biol. », 11, 256 (1946).

(5) J. MONOD, « Growth. », 11, 223 (1947).

(6) G. PONTIERI, « Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Series C. », 58, 51 (1955).

(7) J. MONOD, « Ann. Inst. Past. », 70, 381 (1944).

(8) P. P. SLONIMSKI, *Adaptation in Microorganisms*, « 3<sup>th</sup> Symp. Soc. Gen. Micr. », Cambridge Univ. Press. 1953, pp. 76-97.

(9) M. COHN and J. MONOD, *Ibid.*, pp. 132-149.

paradossale esercitato dal tiofenil- $\beta$ -galattoside che è capace di inibire la sintesi di molecole di  $\beta$ -galattosidasi nei mutanti in cui l'enzima è costitutivo, mentre non esercita alcun effetto inibitorio sulla sintesi indotta dello stesso enzima nelle cellule del ceppo di origine in cui la  $\beta$ -galattosidasi è enzima di adattamento.

Come si vede, il problema è complesso e manca ancora una spiegazione del fenomeno della inibizione dell'adattamento enzimatico, basata su dati sperimentali; tuttavia bisogna ricordare che recentemente ipotesi assai suggestive sono state prospettate (Cohn e Monod <sup>(9)</sup>; Pollock <sup>(10)</sup>).

Poichè il pleiomorfismo cellulare batterico si presenta come la conseguenza di una alterazione nella sintesi di importanti costituenti cellulari e poichè modificazioni nel corredo enzimatico costitutivo di cellule batteriche polimorfe sono già state riscontrate (Pontieri <sup>(11)</sup>; Falcone e Pontieri <sup>(12)</sup>; Cavallo e d'Onofrio <sup>(13)</sup>; Caracò <sup>(14)</sup>) sorge la questione della capacità delle cellule a morfologia e metabolismo diversi da quelli normali a formare enzimi da adattamento.

Con lo scopo di studiare tale questione è stata condotta la presente ricerca che riguarda lo studio della formazione di un tipico enzima di adattamento, la  $\beta$ -galattosidasi, in cellule pleiomorfe di *E. coli* ottenute per mezzo dell'etiluretano.

#### MATERIALE E METODO.

È stato adoperato il ceppo di *E. coli* 806 I.S.I. Le cellule sono state coltivate in brodo di cavallo, addizionato del 0,5 % di glucosio o del 0,5 % di lattosio a seconda che si volessero rispettivamente studiare le attività metaboliche di cellule non adattate o adattate. Per ottenere cellule pleiomorfe, al terreno di coltura veniva aggiunta una determinata quantità di una soluzione 2 M di uretano, previamente sterilizzata per mezzo filtrazione con filtro Seitz, in modo da ottenere concentrazioni finali di uretano tra M/0,25 e M/0,35 che in precedenti ricerche si erano dimostrate le ottimali per il pleiomorfismo. Si sono quindi adoperate cellule provenienti da quattro mezzi di coltura differenti e cioè:

- a) brodo + 0,5 % di glucosio
- b) brodo + 0,5 % di glucosio + uretano
- c) brodo + 0,5 % di lattosio
- d) brodo + 0,5 % di lattosio + uretano.

Dopo 24 h di sviluppo a 37° C. la brodocoltura veniva distribuita in tubi da centrifuga e centrifugata a 3000 giri per 10'; le cellule sedimentate

(10) R. S. POLLOCK, *Adaption in Microorganism*, « 3<sup>th</sup> Symp. Soc. Gen. Micr. », Cambridge Univ. Press 1953, pp. 150-183.

(11) G. PONTIERI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 14, 304 (1953).

(12) G. FALCONE e G. PONTIERI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 29, 703 (1953).

(13) G. CAVALLO e F. D'ONOFRIO, « Giorn. Microbiol. », 1, 115 (1955).

(14) A. CARACÒ, « Boll. Ist. Sier. It. », in corso di pubblicazione.

venivano quindi sospese in puffer di fosfati M/250 a pH 7,2 e lavate ancora tre volte con lo stesso liquido. Le cellule di cui si misurava l'attività enzimatica erano sospese in puffer della stessa composizione.

La capacità di attaccare il lattosio è stata misurata con la tecnica manometrica di Warburg. Ogni esperimento veniva condotto con tre coppie di manometri: nella prima si misurava la respirazione endogena, nella seconda il consumo di ossigeno in presenza di glucosio, nella terza il consumo di ossigeno in presenza di lattosio. Pertanto, ogni vaschetta conteneva ml 1,7 di sospensione batterica, mentre nell'appendice laterale erano contenuti a seconda dei casi ml 0,20 di puffer, ml 0,20 di una soluzione al 0,5 % di glucosio, ml 0,20 di una soluzione al 0,5 % di lattosio. L'assorbimento della  $\text{CO}_2$  prodotta era fatto per mezzo di ml 0,10 di una soluzione di NaOH al 20 %, collocati nel pozzetto centrale della vaschetta; l'ambiente gassoso era costituito da aria, la temperatura del bagno era mantenuta a 37°C. I valori sono stati riferiti ad 1 mgr di peso secco di cellule batteriche.

### RISULTATI.

1° Le cellule di *E. coli*, sviluppate in brodo + 0,5 % di glucosio non sono capaci di metabolizzare il lattosio.

2° Esse acquistano tale proprietà dopo essere cresciute in brodo contenente l'induttore. In queste cellule il consumo di  $\text{O}_2$  in presenza di lattosio corrisponde per intensità a quello che si ha nella ossidazione del glucosio.

3° Le cellule pleiomorfe, sviluppate sia in terreno lattosato che glucosato, contenente uretano, dimostrano una capacità di attacco del glucosio diminuita di circa il 50 % in confronto a quella posseduta dalle cellule normali.

4° La presenza di lattosio nei terreni contenenti uretano non induce la sintesi di una  $\beta$ -galattosidasi e quindi tali cellule restano nella impossibilità di idrolizzare il lattosio.

Le tabelle I e II schematizzano i risultati degli esperimenti.

TABELLA I.

*Esperimenti con cellule cresciute in terreno senza lattosio.*

| Esp. N. | Cellule normali $\text{QO}_2$ |          |          | Pettenkoferie $\text{QO}_2$ |          |          |
|---------|-------------------------------|----------|----------|-----------------------------|----------|----------|
|         | Senza substrato               | Glucosio | Lattosio | Senza substrato             | Glucosio | Lattosio |
| 1       | 7                             | 60       | 10       | 5                           | 35       | 6        |
| 2       | 5                             | 65       | 8        | 4                           | 30       | 4        |
| 3       | 7                             | 62       | 10       | 3                           | 32       | 4        |
| 4       | 6                             | 68       | 8        | 3                           | 34       | 5        |
| 5       | 5                             | 64       | 7        | 4                           | 30       | 4        |

TABELLA II.

*Esperimenti con cellule cresciute in terreno contenente lattosio.*

| Esp. N. | Cellule normali QO <sub>2</sub> |          |          | Pettenkoferie QO <sub>2</sub> |          |          |
|---------|---------------------------------|----------|----------|-------------------------------|----------|----------|
|         | Senza substrato                 | Glucosio | Lattosio | Senza substrato               | Glucosio | Lattosio |
| 1       | 7                               | 64       | 65       | 3                             | 30       | 4        |
| 2       | 8                               | 66       | 64       | 4                             | 35       | 5        |
| 3       | 8                               | 62       | 64       | 3                             | 32       | 3        |
| 4       | 10                              | 70       | 65       | 4                             | 35       | 5        |
| 5       | 7                               | 68       | 64       | 5                             | 40       | 7        |

## DISCUSSIONE.

La incapacità delle cellule pleiomorfe da uretano a sintetizzare molecole di un enzima induttibile è una ulteriore prova del fatto che la malformazione cellulare rappresenta l'esito di alterati processi metabolici che impediscono la sintesi di vari costituenti cellulari. Infatti, come giustamente fanno osservare Cohn e Monod <sup>(9)</sup> la sintesi delle molecole di un enzima costitutivo non è dissimile da quella di un enzima inducibile, la sola differenza consistendo nel fatto che nel primo caso l'induttore è un normale prodotto del metabolismo cellulare ed è « mascherato », mentre nel secondo caso esso è noto perché deliberatamente aggiunto al terreno di coltura.

L'impossibilità di ottenere sviluppo di forme pleiomorfe da uretano in terreno sintetico (Pontieri <sup>(15)</sup>) ha impedito l'effettuazione di una prova di sviluppo in un terreno sintetico la cui unica sorgente di carbonio fosse rappresentata dal glucosio negli esperimenti di controllo e da lattosio in quelli di induzione. Tuttavia bisogna notare che la presenza del lattosio nel brodo, che già di per sé è sufficiente allo sviluppo batterico induce la formazione della  $\beta$ -galattosidasi nelle cellule così come con l'aggiunta di maltosio nell'acqua peptonata si riesce a provocare la biosintesi della amilomaltasi in *E. coli* (Pontieri <sup>(6)</sup>).

I risultati riportati sopra, offrono lo spunto a considerazioni riguardanti non solo la sintesi delle molecole dell'enzima di adattamento quanto anche quella delle molecole di enzimi costitutivi. È stato già osservato che pettenkoferie e forme filamentose batteriche ottenute per mezzo di vari agenti pleiomorfizzanti presentano forte diminuzione della attività catalasica (Pontieri <sup>(11)</sup>; Falcone e Pontieri <sup>(12)</sup>; Cavallo e D'Onofrio <sup>(13)</sup>) e tale

(15) G. PONTIERI, « Boll. Ist. Sier. Mil. », 32, 168 (1953).

difetto enzimatico è stato messo in rapporto con il meccanismo di formazione delle forme aberranti: a causa dell'accumulo di perossidi nel mezzo si avrebbe la inibizione dei gruppi SH che, come è noto, hanno essenziale importanza nei processi di divisione delle cellule batteriche. Secondo Nickerson<sup>(16)</sup>, infatti, la filamentizzazione sarebbe dovuta alla prevalenza di molecole proteiche rigide su quelle elastiche fatto riportabile al blocco dei gruppi SH, che sarebbero i principali responsabili della elasticità e di conseguenza della scissione cellulare.

Un'altra deficienza metabolica delle cellule pleiomorfe, riguarda la demolizione del glucosio; recenti osservazioni di Califano, Cavallo e Falcone<sup>(17)</sup> hanno infatti dimostrato che nelle forme filamentose da solfuro di sodio la glicolisi anaerobia è assai ridotta mentre la ossidazione dell'esoso è di poco diminuita.

La diminuzione della capacità di attacco ossidativo del glucosio da parte delle pettenkoferie da uretano appare, dalle presenti ricerche, notevole in confronto a quella osservata nelle forme da  $\text{Na}_2\text{S}$  dato che si hanno valori del 50% inferiori a quelli delle cellule normali. Non si può dire per il momento, fino a che punto questa deficienza sia da riportare a difetto di sintesi degli enzimi responsabili della demolizione del glucosio o se essa rappresenti solo la conseguenza del fatto che molte delle cellule pleiomorfe sono morte. Infatti, una volta che le cellule pleiomorfe siano trapiantate in terreno di normale composizione, vale a dire non contenente sostanza pleiomorfizzante, solo una piccola quota di esse (8-12%) si riproduce e dà luogo a colonie di batteri normali o apparentemente tali (Pontieri<sup>(15)</sup>).

Certamente la incapacità alla riproduzione, non va identificata con la morte cellulare, ma è da ritenere, tuttavia, che in realtà un certo numero di forme aberranti siano realmente morte dato che l'osservazione microscopica fa rilevare che molti nuclei di essi sono in picnosi (Califano e Pontieri<sup>(18)</sup>; Pontieri<sup>(19)</sup>) e che molte forme pleiomorfe sono in lisi di grado più o meno avanzato. Ciò premesso, si può concludere che le deficienze a carico degli enzimi costitutivi delle pettenkoferie dipendono da due fattori di cui uno corrisponde alla morte di una certa aliquota della popolazione batterica e l'altro a reale diminuzione dei processi che portano alla sintesi delle molecole enzimatiche. Questa ultima osservazione trova appunto appoggio sulla constatazione che nelle pettenkoferie riesce impossibile la formazione delle molecole di un enzima di adattamento quale la  $\beta$ -galattosidasi.

Bisogna ora considerare in quale modo possibilmente si verifichi nelle cellule pleiomorfe da uretano l'inibizione della biosintesi enzimatica indotta. A tale scopo è opportuno prendere in esame lo schema proposto da Cohn e Monod<sup>(9)</sup> che segna le tappe della formazione di un enzima di adattamento

(16) W. Y. NICKERSON, «Nature», 162, 241 (1948).

(17) L. CALIFANO, G. CAVALLO e G. FALCONE, «Atti IX Congresso Nazionale Microbiologia» (in corso di stampa).

(18) L. CALIFANO e G. PONTIERI, «Boll. Ist. Sier. Mil.», 30, 557 (1951).

(19) G. PONTIERI, «Zbl. Bakt. I<sup>o</sup> Orig.», 165, 524 (1956).

nelle cellule batteriche. Secondo questi autori, come è stato detto, non esisterebbe differenza nel meccanismo di formazione degli enzimi di adattamento in confronto con quello dei costitutivi, tranne per il fatto che nel primo caso l'induttore è esterno alla cellula, nel secondo interno. Una volta penetrato nell'interno della cellula, l'induttore esterno non si comporterebbe in maniera diversa da quello interno e la formazione delle molecole enzimatiche si avvererebbe attraverso varie tappe rappresentate dall'unione dell'induttore con un'«apoorganizzatore» e con un «coorganizzatore» per costituire un'«organizzatore» il quale, infine, in presenza di determinati aminoacidi darebbe luogo alle nuove molecole dell'enzima. Questo schema, anche se discutibile ed ipotetico, è servito a spiegare molti esempi di inibizione di biosintesi enzimatica indotta e, nel caso presente, può essere seguito nel tentativo di stabilire in quale delle tappe si verifichi il blocco nell'induzione della formazione di  $\beta$ -galattosidasi nelle pettenkoferie da uretano.

La prima possibilità è che sia impedito il passaggio dell'induttore nell'interno delle cellule verificandosi così un effetto inibitorio del tipo di quello esercitato dal glucosio, la seconda è che l'induttore riesca a penetrare nel corpo cellulare nel quale però sarebbero bloccate le varie reazioni che portano alla formazione dell'organizzatore, la terza possibilità, infine, è che non si avveri la sintesi di qualcuno degli aminoacidi necessari alla sintesi delle molecole dell'enzima.

Un'indagine condotta con la tecnica degli isotopi radioattivi potrebbe chiarire il primo punto con la dimostrazione dell'eventuale passaggio del lattosio nell'interno delle cellule; le altre possibilità di inibizione delle varie reazioni, vanno in ogni caso, inquadrare nel blocco di vari sistemi, di cui l'esempio più appariscente è l'inibizione della divisione cellulare, con conseguente formazione di forme filamentose o di pettenkoferie.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

---

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 10 novembre 1956*

*Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI*

---

## NOTE DI SOCI

**Astronomia.** — *Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due.* Nota (\*) II del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

Come ho già premesso nella Nota I sull'argomento della presente ed anche in altri scritti anteriori, l'unica maniera di concepire, nell'intento di giungere a conclusive ed utili misure, i moti stellari è quella che li rappresenta come differenze fra i vettori delle velocità che le singole stelle e il Sole hanno rispetto ad un riferimento inerziale qualsiasi. Questo riferimento può rimanere non definito e del tutto ignoto perché le differenze predette non ne dipendono; esse hanno, come si è visto, un significato ben chiaro ed individuano in modo completo lo stato cinetico relativo nell'ammasso. Per giungere ad una conoscenza precisa del detto sistema di vettori non vi è altra via, come ho pure indicato nella Nota I, che quella di procedere ad una determinazione della rotazione assoluta del triedro intermediario  $T_i$ , determinazione che sia del tutto *autonoma*, ossia che possa ottenersi in base a dati di osservazione concernenti soltanto posizioni e movimenti delle stelle *rispetto al triedro mobile* predetto, con esclusione di ogni altro elemento con cui si presuppongano conoscenze *a priori* sui « moti proprî » di particolari stelle oppure si introducano leggi statistiche generali inevitabilmente arbitrarie ed empiriche sulla distribuzione dei moti stessi (intesi come innanzi è detto). Ogni procedimento di ricerca che non si conformasse a tali diret-

(\*) Presentata nella seduta del 10 novembre 1956.

tive sarebbe da ritenersi logicamente *errato* e non potrebbe in alcun caso condurre ad una soluzione del problema del riferimento che non sia illusoria, in quanto viziata, non diversamente da quella ancora adottata dagli astronomi, da confusioni teoricamente gravi fra dati e risultati.

Passo, dopo questo cenno di collegamento con la Nota precedente, ad esporre nei suoi particolari la soluzione da me data al problema della rotazione del triedro  $T_t$  (intermediario), soluzione che risponde pienamente ai requisiti innanzi accennati e permette quindi di porre su basi rigorose il problema generale del riferimento.

1. Si indichi con  $\ddot{\Sigma}_a$  l'accelerazione assoluta (nel senso innanzi dichiarato) della stella generica  $\Sigma$ , con  $\ddot{S}_a$  quella analoga del Sole, con  $\rho \mathbf{s}$  il vettore  $\Sigma - S$  ( $\mathbf{s}$  unitario) e resti inteso che tutte le altre derivate temporali che saranno in seguito introdotte nel calcolo e che figureranno nella espressione finale di  $\ddot{\Sigma}_a - \ddot{S}_a$  siano prese in rapporto al triedro mobile  $T_t$  ossia si riferiscano a spostamenti relativi a questo. Dette allora  $\ddot{\Sigma}_r$ ,  $\ddot{\Sigma}_t$  e  $\ddot{\Sigma}_c$  rispettivamente le accelerazioni relativa, di trascinamento e complementare di  $\Sigma$ , sarà

$$\ddot{\Sigma}_r = \ddot{\rho} \mathbf{s} + 2 \dot{\rho} \dot{\mathbf{s}} + \rho \ddot{\mathbf{s}} \quad , \quad \ddot{\Sigma}_t = \ddot{S}_a + \rho \beta \mathbf{s} \quad , \quad \ddot{\Sigma}_c = 2 \boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{\rho} \mathbf{s} + \rho \dot{\mathbf{s}}),$$

avendo indicato col simbolo  $\beta \mathbf{s}$  il vettore ottenuto coll'applicare a  $\mathbf{s}$  l'operatore lineare  $\beta$  (omografia) definito da

$$(1) \quad \beta \mathbf{s} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{s} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{s}.$$

Si avrà allora da notissime relazioni di cinematica una relazione che conviene scrivere

$$(2) \quad \ddot{\Sigma}_a - \ddot{S}_a = \rho (\beta \mathbf{s} + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{s}} + \ddot{\mathbf{s}}) + 2 \dot{\rho} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s} + \dot{\mathbf{s}}) + \ddot{\rho} \mathbf{s}.$$

Questa non sembra presentare un immediato interesse, sia per essere le grandezze vettoriali a primo membro inaccessibili a procedimenti diretti di misura, sia per la presenza di altri elementi incogniti, oltre la  $\boldsymbol{\omega}$  cercata, e cioè  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$  e  $\ddot{\rho}$ . Ma è evidente che ammessa l'esistenza di un campo gravitazionale nella Galassia, il primo membro può essere trasformato in modo da dipendere soltanto dal posto di  $\Sigma$  e  $S$  e inoltre da un numero limitato di costanti dipendenti dalle caratteristiche di quel campo. Riguardo alla intensità di questo occorre tener presente che gli astronomi del passato tendevano a ritenerla del tutto inapprezzabile, ciò per considerazioni *a priori* sulle distanze e masse in presenza, e anche per l'impossibilità in cui essi si erano trovati di porre in luce, nel corso delle ricerche sui moti stellari, qualche caso in cui potessero riconoscersi effetti sicuri di accelerazione. Tale risultato negativo deve sicuramente attribuirsi *ad errori* sia pure piccoli, perché - come ho già rilevato nella Nota I - l'effettiva esistenza di accelerazioni assolute non potrebbe essere esclusa senza escludere anche quella dell'am-

masso galattico. Ma occorre ben notare che gli errori i quali hanno impedito di porre in evidenza con chiarezza le accelerazioni sono esclusivamente quelli verificatisi *nelle misure* (quindi a carattere accidentale), mentre gli altri — quelli di concetto, introdotti con le ipotesi e assunzioni arbitrarie innanzi accennate — danno luogo, nei risultati, ad effetti di tipo nettamente diverso. Essi derivano, in maniera immediata, da errori contenuti nelle formule di trasformazione delle coordinate: operano quindi in modo analogo a quello dei cosiddetti errori sistematici, e non hanno alcuna influenza sugli errori accidentali, dai quali rimangono del tutto distinti <sup>(1)</sup>. Portano insomma a falsare, per ciascuna stella, le caratteristiche vettoriali del moto, ma non possono contribuire ad occultare eventuali effetti di accelerazione. È lecito pertanto concludere che tali effetti, compresi come sono entro i limiti degli errori di osservazione in misure tecnicamente accuratissime, siano da ritenersi attualmente evanescenti e che la loro presenza possa solo rivelarsi in un periodo di osservazioni che sia più esteso di quelli sufficienti per la determinazione delle velocità.

Segue da quanto innanzi che se, nel predisporre uno schema teoricamente rigoroso per la determinazione dei moti stellari, è necessario, come non v'ha dubbio, che sia prevista la presenza di forze atte a determinare accelerazioni assolute non trascurabili, sarà lecito attenersi, nel formulare analiticamente tale previsione, ad una espressione approssimata. Tale espressione può essere nel nostro caso ben facilmente trovata ed è quella che va sostituita alla differenza che figura al primo membro nella equazione (1).

Passo dunque a stabilirla.

2. Si consideri l'insieme di tutti i corpi celesti compresi nell'ammasso galattico ad eccezione del Sole: una massa unitaria che fosse collocata al posto del centro del Sole assumerebbe una accelerazione assoluta identica a quella effettiva del Sole stesso, cioè quella innanzi indicata con  $\ddot{S}_a$  e sarà, detto  $U$  il potenziale corrispondente al sistema di masse così definito,  $\text{grad } U_s = \ddot{S}_a$ . Analogamente una massa unitaria collocata al posto della stella  $\Sigma$  prenderà una accelerazione identica a  $\ddot{\Sigma}_a$  e si avrà, essendo  $V$  il potenziale determinato dall'insieme di *tutti* i corpi della Galassia diversi da  $\Sigma$ ,  $\text{grad } V_\Sigma = \ddot{\Sigma}_a$ . Le due funzioni  $U$  e  $V$ , a rigore differenti fra di loro, determinano però, da sole, due campi che si possono, ai nostri fini, considerare coincidenti, perché l'intensità del campo gravitazionale galattico *totale*, già di per sé tenuissima, subisce, in conseguenza della esclusione di *una* delle masse, una variazione che altera la funzione potenziale soltanto per una piccolissima parte del suo valore, dato che si intende rimossa, in entrambi i casi considerati, una sola delle innumerevoli masse che sono comprese nella Galassia. Si tratta dunque in complesso, di effetti *di secondo ordine* che è lecito quindi trascurare. Confondendo dunque la  $U$  e

(1) Ciò perchè le variazioni nelle coordinate trasformate, che i detti errori determinano, sono funzioni delle coordinate stesse e del tempo e non *del caso*.

la  $V$  in una unica funzione che indicheremo d'ora innanzi con  $U$ , si potrà scrivere

$$(3) \quad \ddot{\Sigma}_a - \ddot{S}_a = \text{grad } U_{\Sigma} - \text{grad } U_S$$

e poiché le due masse unitarie collocate in  $\Sigma$  o in  $S$  non appartengono al sistema di quelle che determinano il campo, sarà lecito, come è noto dalla teoria del potenziale newtoniano, sviluppare in serie di Taylor le componenti delle differenze vettoriali del secondo membro. Se si considera una terna di assi con orientamento assoluto e con l'origine in  $S$  e si indicano con  $x, y, z$  le coordinate di  $\Sigma$  rispetto a questa, si avranno dunque per le dette componenti le relazioni

$$(4) \quad (\text{grad } U_{\Sigma} - \text{grad } U_S)_x = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_S x + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_S y + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_S z$$

e due analoghe, nelle quali lo sviluppo è limitato, per l'insieme delle considerazioni che precedono, al gruppo dei termini lineari. Queste si possono riassumere simbolicamente nell'unica

$$(5) \quad \ddot{\Sigma}_a - \ddot{S}_a = \left( \frac{d}{d\Sigma} \text{grad } U \right)_S (\Sigma - S),$$

la quale comprende anche la (3) e mostra come il vettore  $\Sigma_a - \ddot{S}_a$  possa dedursi, nel dominio di validità delle (4), con l'applicare a  $\Sigma - S$  l'operatore lineare  $(d/d\Sigma \text{grad } U)_S$  (omografia vettoriale), che sarà in seguito indicato brevemente con  $\lambda$ .

Potrà dunque scriversi, indicando come innanzi con  $\rho$  la distanza fra  $\Sigma$  e  $S$ ,  $\ddot{\Sigma}_a - \ddot{S}_a = \rho \lambda s$  e la (2) assumerà allora la forma definitiva

$$(6) \quad \rho [(\beta - \lambda) s + 2 \omega \wedge \dot{s} + \ddot{s}] + 2 \dot{\rho} (\omega \wedge s + \dot{s}) + \ddot{\rho} s = 0.$$

Notiamo intanto riguardo alla  $\lambda$  che per essa svanisce la componente assiale, essendo nullo il suo vettore, che è qui definito da  $\text{rot grad } U$ . La  $\lambda$  è dunque una *dilatazione* e la sua matrice è quindi simmetrica (proprietà che corrisponde a quella della permutabilità delle due derivazioni nelle derivate miste). Il numero delle costanti che la considerazione del potenziale galattico introduce nei nostri calcoli si riduce dunque a sei ed anzi a cinque sole indipendenti, perché la somma degli elementi della diagonale principale, che è  $\text{div grad } U = \Delta_2 U$ , è nel caso presente nulla pel teorema di Laplace. Tale risultato vale, dato il carattere invariante del laplaciano, qualunque sia la terna mobile che convenga scegliere nella attuazione pratica effettiva del nuovo procedimento e sussiste pure in ogni caso la proprietà di simmetria della matrice di  $\lambda$ .

Ciò premesso, si noti come la (6) stabilisca - per essere gli scalari  $\rho, \dot{\rho}$  e  $\ddot{\rho}$  non nulli - la complanarità dei vettori pei quali sono moltiplicati

quei tre numeri: ciò implica l'annullarsi del loro prodotto misto. Ogni stella dell'intorno considerato darà quindi luogo ad una equazione del tipo

$$(7) \quad [(\beta - \lambda) \mathbf{s} + 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{s}} + \ddot{\mathbf{s}}] \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s} + \dot{\mathbf{s}}) \times \mathbf{s} = 0 \quad (2)$$

essendo dati di osservazione, per ciascuna stella, le componenti dei vettori  $\mathbf{s}$ ,  $\dot{\mathbf{s}}$ ,  $\ddot{\mathbf{s}}$  rispetto al triedro mobile  $T_t$ , relative queste ad una epoca fissa  $t_0$ , alla quale si intenderanno riportate le osservazioni eseguite in varie epoche.

3. Per fissare ora la forma definitiva delle equazioni del sistema (7) ai fini dell'effettivo calcolo numerico occorre precisare il triedro mobile pel riferimento immediato delle osservazioni. In conformità coi concetti precedentemente esposti circa l'opportunità di escludere triedri collegati ai movimenti della Terra, immagineremo le direzioni stellari riferite, per l'osservazione, ad un triedro avente l'origine nella posizione O dell'osservatore terrestre. Scelte quindi due stelle  $S_1$  e  $S_2$  sufficientemente luminose, supporremo l'asse  $Ox$  coincidente con la congiungente  $OS_1$  e orientato positivamente nel senso da O verso  $S_1$  e che per piano  $Oxy$  sia scelto quello individuato dai punti O,  $S_1$  ed  $S_2$ . La perpendicolare ad  $OS_1$  condotta nel piano predetto sarà scelta per asse  $Oy$  e si potrà immaginare orientata in modo che per portare la semiretta delle  $x$  positive a coincidere con quella delle  $y$  positive occorra una rotazione di  $90^\circ$  nel senso diretto. Per asse  $Oz$  si sceglierà poi la perpendicolare da O al piano  $Oxy$ , convenientemente orientata. È questo il triedro al quale le osservazioni terrestri possono essere effettivamente riferite, mentre nella trattazione teorica che precede l'origine del triedro mobile è supposta al centro del Sole. Immagineremo quindi che la terna  $T_t$  sia quella con gli assi condotti da tale centro S parallelamente a quelli della terna innanzi definita. La rotazione assoluta delle due sarà la stessa, mentre le direzioni stellari corrispondenti ai vettori  $\mathbf{s}$  variano dall'una all'altra terna *solo per effetti parallattici*. Questi, certamente assai piccoli anche per stelle dell'« intorno » del Sole, hanno influenza praticamente nulla sui vettori  $\dot{\mathbf{s}}$  e  $\ddot{\mathbf{s}}$ , mentre l'influenza su  $\mathbf{s}$  è egualmente trascurabile per essere le componenti di  $\mathbf{s}$  nell'equazione (7) moltiplicate per quantità assai piccole <sup>(3)</sup>.

(2) Si vede poi, guardando l'aspetto algebrico della questione, che, potendosi dare al primo membro della (7) la forma di un determinante avente per linee successive le componenti di ciascuno dei tre vettori, l'annullarsi di esso esprime la condizione necessaria e sufficiente perché le tre equazioni che si ottengono eguagliando a zero le componenti della somma (6) possano esser verificate con valori non tutti nulli delle  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$  e  $\ddot{\rho}$ .

(3) Del resto, poiché con la soluzione qui data al problema generale del riferimento la determinazione delle distanze stellari si ottiene con mezzi completamente nuovi, con metodo uniforme e con probabilità di risultati più precisi di quelli attualmente conseguibili (in quanto non più basati su misure dirette di quantità piccolissime), potrebbe tenersi conto, eventualmente, degli effetti parallattici in una seconda approssimazione, dopo conosciute esattamente le distanze.

Rimandando ora ad una Nota successiva indicazioni e rilievi di carattere particolare sulla esecuzione effettiva delle misure e anche sui procedimenti che appaiono più convenienti per la risoluzione delle equazioni del tipo della (7), notiamo come sia necessario, prima di scrivere questa equazione nella forma scalare definitiva, premettere preliminarmente qualche osservazione di carattere generale necessaria per la riduzione del complesso dei dati di osservazione ad una epoca unica. Riguardo alla rotazione del triedro mobile innanzi definito può sicuramente ritenersi che i valori delle componenti di quel vettore e anche quelli delle derivate temporali delle medesime, debbano risultare, a risoluzione effettuata, molto piccoli. Se così non fosse, la somma vettoriale  $\beta \mathbf{s} + \omega \wedge \dot{\mathbf{s}} + \ddot{\mathbf{s}}$ , che figura nell'equazione (2) moltiplicata pel fattore  $\rho$ , costituendo, per la presenza di questo fattore, il gruppo preponderante del secondo membro, porterebbe ad assegnare al vettore somma dei tre gruppi un modulo di entità tale da rendere impossibile il sussistere della (2), che è *del tutto rigorosa* e nella quale il vettore a primo membro, indipendente dalla scelta di  $T_t$ , è *indubbiamente* molto piccolo, come mostrano le ben fondate considerazioni innanzi premesse.

Analoghe deduzioni possono ovviamente trarsi riguardo ai valori delle derivate prime e seconde delle componenti di  $\mathbf{s}$ , ossia delle  $\dot{\alpha}$  e  $\ddot{\alpha}$ . Da questo segue che per riportare tutti i dati di osservazione ad una epoca fissa  $t_0$  è certamente lecito servirsi di relazioni della forma  $\alpha_t = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 t + \frac{\ddot{\alpha}_0}{2} t^2$ , in numero eguale a quello delle osservazioni ottenute per ciascuna stella in epoche diverse e che da un numero considerevole di tali equazioni si possano dedurre per le  $\alpha_0$ ,  $\dot{\alpha}_0$ ,  $\ddot{\alpha}_0$  e analoghe, valori sufficientemente precisi.

4. Per scrivere ora in forma breve l'equazione fondamentale indichiamo con  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) gli elementi della matrice dell'omografia  $\beta - \lambda = \sigma$  e con  $(\sigma \mathbf{s})_x, (\sigma \mathbf{s})_y, (\sigma \mathbf{s})_z$  le componenti del vettore  $\sigma \mathbf{s}$ . Sarà dunque

$$(8) \quad \begin{cases} (\sigma \mathbf{s})_x = a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma \\ (\sigma \mathbf{s})_y = a_{21} \alpha + a_{22} \beta + a_{23} \gamma \\ (\sigma \mathbf{s})_z = a_{31} \alpha + a_{32} \beta + a_{33} \gamma \end{cases}$$

e con queste posizioni la (7) assume, per ciascuna stella, la forma

$$(9) \quad \begin{vmatrix} (\sigma \mathbf{s})_x + 2(q\dot{\gamma} - r\dot{\beta}) + \ddot{\alpha} & (\sigma \mathbf{s})_y + 2(r\dot{\alpha} - p\dot{\gamma}) + \ddot{\beta} & (\sigma \mathbf{s})_z + 2(p\dot{\beta} - q\dot{\alpha}) + \ddot{\gamma} \\ q\gamma - r\beta + \dot{\alpha} & r\alpha - p\gamma + \dot{\beta} & p\beta - q\alpha + \dot{\gamma} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Considerando ora che la matrice della  $\beta$  (la quale è parte della  $\sigma$  e i cui elementi sono pertanto inclusi negli elementi  $a_{ij}$  di questa) può scriversi

in altro modo, cioè con l'applicare direttamente l'espressione (1) del vettore  $\beta s$ , si perviene, introducendo la matrice della  $\lambda$ , ossia

$$\begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix},$$

alla formazione di quella della  $\sigma$  nell'altro aspetto che essa può assumere e che è opportuno indicare qui appresso in modo esplicito:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} -(q^2 + r^2) - a & pq - \dot{r} - n & pr + \dot{q} - m \\ pq + \dot{r} - n & -(p^2 + r^2) - b & qr - \dot{p} - l \\ pr - \dot{q} - m & qr + \dot{p} - l & -(p^2 + q^2) - c \end{vmatrix}.$$

Alle due forme qui indicate per la matrice della  $\sigma$  corrispondono due diversi indirizzi di calcolo che si possono seguire per la risoluzione del sistema delle equazioni del tipo (9) e due diversi gruppi di incognite. Nel primo caso si assumono per le  $(\sigma s)_x$ ,  $(\sigma s)_y$ ,  $(\sigma s)_z$  le espressioni (8), ciò che porta ad introdurre nelle (9) le incognite  $a_{ij}$ , alle quali rimangono aggregate nelle stesse equazioni le incognite principali  $p, q, r$ . Occorrono dunque, per la risoluzione, dati relativi ad un numero di stelle non minore di dodici. Nel secondo caso, rimanendo fra le incognite le  $p, q, r$ , si intendono sostituite alle  $a_{ij}$  le loro espressioni fornite dai corrispondenti elementi della matrice (10). Le nove incognite non comuni all'altro gruppo sono così  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  e inoltre i sei elementi  $a, b, c; l, m, n$  della matrice di  $\lambda$ .

Rimane così libera la scelta delle incognite da assumere ai fini della risoluzione del sistema fondamentale (9); interessa però osservare come le relazioni di collegamento fra i due sistemi di incognite possano mettersi sotto la forma simmetrica

$$\begin{aligned} a &= -(a_{11} + q^2 + r^2) & 2l &= 2qr - (a_{32} + a_{23}) & 2\dot{p} &= a_{32} - a_{23} \\ b &= -(a_{22} + p^2 + r^2) & 2m &= 2pr - (a_{13} + a_{31}) & 2\dot{q} &= a_{13} - a_{31} \\ c &= -(a_{33} + p^2 + q^2) & 2n &= 2pq - (a_{21} + a_{12}) & 2\dot{r} &= a_{21} - a_{12}. \end{aligned}$$

Su questo dovremo ritornare in una Nota conclusiva.

**Chimica.** — *Sullo spettro ultrarosso d'assorbimento del 2,2'-dipirrilchetone*<sup>(\*)</sup>. Nota di GIOV. BATTISTA BONINO e PAOLO MIRONE, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. B. BONINO.

Nello studio dei derivati carbonilici del pirrolo meritano una particolare attenzione i 2,2'-dipirrilchetoni per le singolari caratteristiche del gruppo carbonilico che ad essi compete.

Il 2,2'-dipirrilchetone è noto da molto tempo, essendo stato preparato da Ciamician e Magnaghi fin dal 1885<sup>(1)</sup>. Estese ricerche sui dipirrilchetoni vennero eseguite poi da Hans Fischer e Collab.<sup>(2)</sup>

È noto da tutte queste ricerche che il gruppo CO dei citati composti (detto CO «meso») presenta dal lato chimico un comportamento anormale. Per esempio, il dipirrilchetone non reagisce con idrossilamina e con semicarbazide. Il CO meso del dipirrilchetone mostra cioè una «inerzia chimica» più spiccata di quella del CO della 2-pirrolaldeide.

Le misure termochimiche eseguite sui dipirrilchetoni da Stern e Klebs<sup>(3)</sup> mettono in evidenza caratteristiche del tutto singolari del valore termochimico del CO «meso» ( $-0,9$  Kcal di fronte alle  $+9,2$  Kcal del CO del benzofenone).

I detti Autori, interpretano questa anomalia come un carattere di «maggior saturazione» del CO «meso» dei dipirrilchetoni di fronte al CO degli alchil-pirril-chetoni che mostrano invece normali reazioni del cheto-gruppo.

Già diversi anni addietro in collaborazione con Manzoni Ansidei e Pratesi<sup>(4)</sup> si sono studiati in questo Istituto gli spettri Raman di alcuni dipirrilchetoni alchilati e si è riscontrata la forte anomalia della banda riferibile alla oscillazione di valenza dei gruppi  $C=O$  in questi composti di fronte per esempio alla analoga riga Raman del 2-acetilpirrolo, dell'acetofenone e del benzofenone.

Per esempio la banda Raman del CO mentre si trova a  $1636\text{ cm}^{-1}$  nel 2-acetilpirrolo ed a  $1652\text{ cm}^{-1}$  nel benzofenone, nei dipirrilchetoni, allora studiati, si trovava spostata a  $1530-1540\text{ cm}^{-1}$ , per sostanze esaminate in soluzione metilalcolica satura.

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro studi di Chimica Fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico «Giacomo Ciamician» della Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

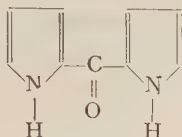
(1) CIAMICIAN e MAGNAGHI, «B.», 18, 419 (1885).

(2) H. FISCHER e Collab., *A*, 489, p. 62 e sgg. (1931); *A*, 502, 237 (1933).

(3) STERN e KLEBS, *A*, 500, 98 (1932).

(4) MANZONI ANSIDEI e PRATESI, «Zeit. f. Phys. Chem.» (B), 25, 348 (1934).

Le ricerche che abbiamo in corso sui derivati carbonilici del pirrolo ci hanno consigliato di studiare lo spettro ultrarosso di assorbimento del dipirrilchetone non sostituito:



Lo spettro di oscillazione di questo composto non ci risulta fino ad oggi conosciuto.

È noto che spesso i sostituenti alchilici al nucleo pirrolico portano delle variazioni sensibili nello spettro di oscillazione di queste molecole <sup>(4)</sup> e ci è sembrato perciò assai utile conoscere lo spettro del chetone non alchilato.

Il 2,2'-dipirrilchetone è stato preparato in questo Istituto seguendo le indicazioni date nei lavori di Ciamician e Magnaghi <sup>(5)</sup>, di Hess e Anselm <sup>(5)</sup> di Tschelinzew e Skorzow <sup>(6)</sup>.

Il chetone, cristallizzato da alcool metilico, si presenta in cristalli prismatici quasi incolori P. F. 160°-161°.

Ringraziamo la signora Anna Maria Fiorentini-Drusiani per la valida collaborazione prestataci nella preparazione e l'identificazione chimica delle caratteristiche di purezza del composto studiato.

Lo spettro ultrarosso del dipirrilchetone è stato studiato sia allo stato solido, sotto forma di pasta in olio di vaselina, sia in soluzione in tetracloruro di carbonio.

Le Tabelle I e II riportano le frequenze e le intensità dei massimi osservati per questo composto confrontate con le posizioni dei massimi di assorbimento osservati per la 2-pirrolaldeide, il 2-acetilpirrolo ed il pirrolo.

Due zone dello spettro. u. r. meritano una descrizione particolare e cioè quelle ordinariamente attribuite alle oscillazioni di valenza dei gruppi NH e CO.

Nella prima di queste due zone (NH) lo spettro del dipirrilchetone cristallino mostra un doppietto a 3415-3367  $\text{cm}^{-1}$ ; la frequenza media di questo doppietto corrisponde a 3391  $\text{cm}^{-1}$  ed è molto più alta della frequenza NH della pirrolaldeide e del 2-acetilpirrolo solidi ( $\sim 3280 \text{ cm}^{-1}$ ), e si avvicina al valore della frequenza NH del pirrolo liquido ( $\sim 3410 \text{ cm}^{-1}$ ). Si potrebbe attribuire questa più alta posizione della frequenza NH trovata nel dipirrilchetone solido al fatto che gli eventuali gruppi NH nel composto siano impegnati in legami idrogenici molto più deboli di quelli esistenti nella pirrolaldeide e nel 2-acetilpirrolo.

(5) HESS e ANSELM, « B. », 54, 2318 (1921).

(6) TSCHELINZEW e SKORZOW, Centralbl. 1916, I, 789.

TABELLA I.

*Spettro ultrarosso del 2,2'-dipirrilchetone cristallino.*

| 2,2'-Dipirril-<br>chetone<br>(cristallino) | 2-Pirrolaldeide<br>(cristallina) | 2-Acetilpirrolo<br>(cristallino) | Pirrolo<br>(liquido) | Assegnazioni  |
|--|----------------------------------|----------------------------------|----------------------|---------------|
| 3415 <i>m</i>                              | 3279 <i>f</i>                    | 3278 <i>f</i>                    | 3410 <i>ff</i>       | } $\nu$ NH    |
| 3367 <i>n</i>                              |                                  |                                  |                      |               |
| 3135 <i>d</i>                              | 3156 <i>m</i>                    | —                                | 3133/3108 <i>m</i>   | $\nu$ CH      |
| 1569 <i>f</i>                              | 1655 <i>ff</i>                   | 1638 <i>ff</i>                   | —                    | $\nu$ C=O     |
| —  | 1623 <i>d</i>                    | —                                | 1581 <i>m</i>        |               |
| 1547 <i>m</i>                              | 1550 <i>d</i>                    | 1542 <i>f</i>                    | 1531 <i>m</i>        |               |
| 1442 <i>f</i>                              | 1448 <i>f</i>                    | —                                | 1470 <i>m</i>        |               |
| 1423 <i>f</i>                              | —                                | 1423 <i>m</i>                    | 1419 <i>m</i>        |               |
| 1405 <i>f</i>                              | 1402 <i>f</i>                    | 1398 <i>f</i>                    | 1386 <i>d</i>        |               |
| —  | 1356 <i>f</i>                    | 1363 <i>m</i>                    | —                    |               |
| —  | 1316 <i>m</i>                    | 1323 <i>m</i>                    | —                    |               |
| 1246 <i>d</i>                              | —                                | —                                | 1287 <i>d</i>        |               |
| 1124 <i>m</i>                              | 1141 <i>f</i>                    | 1141/1131 <i>f</i>               | 1145 <i>m</i>        |               |
| 1104 <i>f</i>                              | —                                | —                                | —                    |               |
| 1093 <i>m</i>                              | 1095 <i>m</i>                    | 1076 <i>m</i>                    | 1076 <i>f</i>        |               |
| 1058 <i>m</i>                              | 1050 <i>m</i>                    | 1046 <i>f</i>                    | 1051 <i>f</i>        |               |
| 1040 <i>f</i>                              | 1025 <i>dd</i>                   | 1021 <i>m</i>                    | 1016 <i>f</i>        |               |
| 999 <i>d</i>                               | 1000 <i>d</i>                    | —                                | —                    |               |
| 945 <i>d</i>                               | 961 <i>d</i>                     | 973 <i>f</i>                     | —                    |               |
| 897 <i>d</i>                               | —                                | 927 <i>f</i>                     | —                    |               |
| 887 <i>m</i>                               | —                                | 888 <i>d</i>                     | 882 <i>d</i>         |               |
| 881 <i>m</i>                               | 864 <i>m</i>                     | —                                | 869 <i>m</i>         |               |
| 841 <i>f</i>                               | —                                | 844 <i>f</i>                     | 841 <i>d</i>         |               |
| 772 <i>m</i>                               | 792 <i>m</i>                     | 775 <i>ff</i>                    | —                    | } $\gamma$ CH |
| 754 <i>f</i>                               | 754/740 <i>f</i>                 | 751 <i>ff</i>                    | 735 <i>ff</i>        |               |
| 652 <i>m</i>                               | —                                | ↑<br>↓                           | 652 <i>m</i>         |               |
| 634 <i>m</i>                               | —                                |                                  | —                    |               |
| 607 <i>m</i>                               | 608 <i>d</i>                     |                                  | —                    |               |
| 599 <i>m</i>                               | —                                |                                  | —                    |               |
| 581 <i>f</i>                               | —                                |                                  | 561 <i>ff</i>        | $\gamma$ NH   |
| —  | 531 <i>d</i>                     |                                  | —                    |               |
| —  | 522 <i>d</i>                     |                                  | —                    |               |

TABELLA II.

*Frequenze delle oscillazioni NH in soluzione di CCl<sub>4</sub>.*

| 2,2'-Dipirril-<br>chetone | 2-Pirrolaldeide | 2-Acetilpirrolo | Pirrolo | Assegnazioni      |
|---------------------------|-----------------|-----------------|---------|-------------------|
| 3458                      | 3458            | 3457            | 3496    | $\nu$ NH (liberi) |
| 3279                      | 3272            | 3282            | —       | $\nu$ N—H—O       |

Si deve notare che, se si dovesse interpretare questo risultato nel senso che nel dipirrilchetone solido esistano legami  $N \dots H \dots N$ , si dovrebbe considerare il gruppo CO praticamente non impegnato in associazioni sia intra che inter molecolari con il gruppo NH.

La situazione però cambia quando si passa a studiare il dipirrilchetone in soluzione satura in  $CCl_4$  (concentrazione 0,003 M).

Per tale soluzione si trova una completa analogia con gli spettri delle corrispondenti soluzioni di aldeidi pirroliche e di 2-acetilpirrolo: una banda netta a  $3458 \text{ cm}^{-1}$  ( $\Delta\nu_{1/2} = 20 \text{ cm}^{-1}$ ) e una banda larga a  $3279 \text{ cm}^{-1}$  ( $\Delta\nu_{1/2} = 100 \text{ cm}^{-1}$ ).

Queste bande sono da attribuire nel senso più generale ad oscillazioni di valenza di un atomo di idrogeno impegnato in legami con l'atomo di azoto (o con quello di ossigeno).

La oscillazione di valenza CO si manifesta nello spettro del dipirrilchetone solido con una banda intensa a  $1569 \text{ cm}^{-1}$ . Un'altra banda meno intensa si trova a  $1547 \text{ cm}^{-1}$  ed è difficile stabilire se si tratta di una seconda componente della banda CO, analogamente a quanto si osserva nella pirrolaldeide, la cui banda carbonilica è sdoppiata in due componenti a  $1655$  e  $1623 \text{ cm}^{-1}$ , oppure se essa corrisponde alla vibrazione nucleare che dà luogo a una banda a  $1531 \text{ cm}^{-1}$  nel pirrolo, a  $1542 \text{ cm}^{-1}$  nell'acetil pirrolo e a  $1550 \text{ cm}^{-1}$  nella pirrolaldeide.

Comunque stiano le cose, è interessante rilevare che la frequenza CO del dipirrilchetone è di circa  $70\text{--}80 \text{ cm}^{-1}$  più bassa della corrispondente frequenza della pirrolaldeide e dell'acetil pirrolo solido ( $1650\text{--}1640 \text{ cm}^{-1}$ ). E quest'ultima, come si sa, è a sua volta spostata di una ottantina di numeri d'onda rispetto al valore della frequenza carbonilica delle aldeidi non coniugate. Ciò mostra che nel 2,2'-dipirrilchetone il gruppo carbonilico è intensamente coniugato con i nuclei pirrolici. Questi pertanto si dovranno ritenere complanari con il CO.

Resta dunque confermato, per ciò che riguarda il CO « meso » del dipirrilchetone, quanto già si era rilevato negli spettri Raman dei dipirrilchetoni alchilati. La forte anomalia del CO meso dei dipirrilchetoni emerge dunque in modo nettissimo anche dallo spettro u. r. del chetone non sostituito.

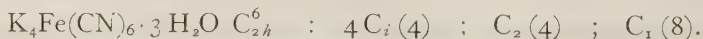
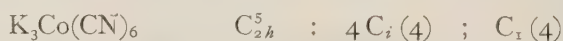
Le altre regioni dello spettro non forniscono indicazioni di grande rilievo, almeno per ora. Alcune bande possono avere una plausibile interpretazione: così il doppietto a  $772-754\text{ cm}^{-1}$  potrebbe essere attribuito alle vibrazioni di deformazione fuori del piano dei gruppi CH e la banda a  $581\text{ cm}^{-1}$  alla analoga vibrazione del gruppo NH. La grande intensità e la relativa invarianza di queste bande permettono di seguire facilmente le stesse dallo spettro del pirrolo (spettro che si può ormai considerare interpretato in modo soddisfacente <sup>(7)</sup>) a quelli del dipirrilchetone, dalla pirrolaldeide e del 2-acetilpirrolo.

**Chimica.** — *Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del cobalticianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa* <sup>(\*)</sup>. Nota di GIOV. BATTISTA BONINO e GIAN FRANCO FABBRI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. B. BONINO.

Proseguendo nelle ricerche già iniziate sullo spettro ultrarosso di assorbimento di cianuri complessi, ad integrazione delle misure eseguite su una serie di ferrocianuri alcalini ed alcalino terrosi (misure sulle quali si è riferito in precedenti lavori [1] apparsi su questi « Rendiconti » ed in altri lavori in corso di pubblicazione [2]) abbiamo ritenuto particolarmente interessante esaminare lo spettro del cobalticianuro di potassio ( $\text{K}_3\text{Co}(\text{CN})_6$ ) per le sue analogie strutturali con il ferrocianuro corrispondente.

Ambedue i complessi cristallizzano nel sistema monoclinico, ma c'è qualche differenza fra i cristalli dei due composti. A parte il fatto che il ferrocianuro di potassio cristallizza con tre molecole di acqua e il cobalticianuro si ottiene cristallizzato anidro, è noto dalle ricerche di Pospelov e Zhdanov [3] che il gruppo spaziale riferibile al cristallo di ferrocianuro di potassio è il  $C_{2h}^6$  con quattro molecole di ferrocianuro per cella elementare mentre il cristallo monoclinico di cobalticianuro di potassio (che non ha acqua di cristallizzazione) comporta il gruppo spaziale  $C_{2h}^5$  con due molecole per cella elementare [4].

C'è pertanto una differenza tra i sottogruppi « locali » (i « site » di Halford [5]) delle due celle cristalline elementari e cioè:



Tale differenza è significativa agli effetti della interpretazione degli spettri di oscillazione del cristallo dato che, mentre si possono localizzare nel cristallo di ferrocianuro di potassio gli ioni ferrocianidrici nei « site »  $C_2$ , gli ioni  $\text{Co}(\text{CN})_6$  del cobalticianuro non si possono localizzare che nei « site »  $C_i$  del gruppo spaziale  $C_{2h}^5$ .

(7) LORD e MILLER, « Journ. Chem. Phys. », 10, 328 (1942).

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro studi di Chimica Fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » della Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

Sono state recentemente studiate in questo Istituto [2] le oscillazioni dello ione ferrocianidrico tenendo conto per esse in modo ortodosso della simmetria cristallina « locale »  $C_2$  nel cristallo di ferrocianuro di potassio. In un precedente lavoro [6] data la speciale struttura dello ione ferrocianidrico, si era analizzato in via semiempirica lo spettro di oscillazione per la sola parte riferibile al gruppo delle così dette oscillazioni CN come se lo ione ferrocianidrico perturbato dal campo cristallino potesse ancora conservare praticamente il centro di simmetria.

Sulle differenze fra le conclusioni a cui si giunge con queste due alternative (e cioè la prima di carattere cristallografico più rigoroso e la seconda di carattere semiempirico) è stato riferito e discusso in un recentissimo lavoro da uno di noi (Bonino) in collaborazione con O. Salvetti [2].

Il cobalticianuro di potassio per queste ricerche è stato preparato secondo il metodo descritto da Fernelius in *Inorganic Syntheses* [7].

Ringraziamo il dott. Enos Tedeschi di questo Istituto per la efficace collaborazione prestataci nella preparazione del complesso.

I campioni da sottoporre all'esame spettrometrico nell'ultrarosso furono allestiti seguendo due vie diverse e cioè sia col metodo dell'impasto del complesso polverizzato in olio di vaselina (ovvero tripen) e col metodo del così detto disco in bromuro di potassio. Per ottenere polveri che non provocassero forti diffusioni delle radiazioni il composto è stato macinato allo stato puro in mulino a vibrazione con mortaio in agata per un'ora e posto poi sotto vuoto su anidride fosforica.

Per la preparazione del campione sotto forma di disco in bromuro di potassio si è incontrata qualche difficoltà.

Abbiamo ottenuto buoni risultati con il seguente metodo.

Le polveri di KBr e di  $K_3Co(CN)_6$  già macinate separatamente venivano di nuovo macinate insieme nelle giuste proporzioni per circa 30 minuti in mulino a vibrazione. Terminata tale macinazione la miscela veniva posta sotto vuoto su  $P_2O_5$  e lasciata a sé per 48 ore. A tale punto l'apparecchio di essiccazione e la matrice della pressa venivano posti in stufa a  $40^\circ$ – $50^\circ C$  per portare, sia la matrice sia la polvere da pressare, a temperatura leggermente superiore alla temperatura ambiente al fine di evitare, durante le brevi manipolazioni precedenti la pressatura, la condensazione su di essi del vapore acqueo atmosferico. Si sono ottenuti così dischi eccellenti dal punto di vista ottico. La pressa usata per la costruzione dei dischi è del tipo « Schiedt » costruita dalla ditta O. Lieberman di Stoccarda, con matrice di 22 mm. di diametro.

Si deve anche notare la difficoltà con la quale il campione cristallino del complesso abbandona le ultime tracce di acqua di interposizione o di umidità. Difatti, se si sottopongono all'esame spettrometrico nell'ultrarosso campioni di questo complesso non sufficientemente essiccati si registrano nette le bande caratteristiche dell'acqua. Con successivi tempi di diligente essiccazione dette bande tendono a scomparire e perciò non sono state registrate nello spettro del complesso.

## TABELLA I.

*Spettro ultrarosso del  $K_3Co(CN)_6$  cristallino.*

| Paste          | Dischi         |
|----------------|----------------|
| —              | 4212 <i>dd</i> |
| —              | 4241 <i>dd</i> |
| 2529 <i>dd</i> | 2528 <i>dd</i> |
| 2544 <i>dd</i> | 2544 <i>dd</i> |
| (2557)         | (2527)         |
| 2604 <i>dd</i> | 2602 <i>dd</i> |
| 2692 <i>dd</i> | 2693 <i>dd</i> |
| (2702)         | 2704 <i>dd</i> |
| 2088 <i>f</i>  | 2088 <i>ff</i> |
| 2090 <i>m</i>  | —              |
| 2103 <i>m</i>  | 2105 <i>ff</i> |
| 2106 <i>m</i>  | —              |
| 2129 <i>f</i>  | 2129 <i>ff</i> |
| —              | 746 <i>dd</i>  |
| 764 <i>dd</i>  | 766 <i>dd</i>  |
| 797 <i>dd</i>  | 796 <i>dd</i>  |
| 894 <i>dd</i>  | 892 <i>dd</i>  |
| 912 <i>dd</i>  | 910 <i>dd</i>  |
| —              | (923)          |
| 936 <i>dd</i>  | 939 <i>dd</i>  |
| —              | 976 <i>dd</i>  |
| 564 <i>f</i>   | 564 <i>f</i>   |
| 421 <i>f</i>   | 423 <i>f</i>   |

La soluzione acquosa satura di  $K_3Co(CN)_6$  mostra una banda unica con massimo a  $2128\text{ cm}^{-1}$  ( $4,701\text{ }\mu$ ) nella «zona CN».

Gli spettri sono stati ottenuti con uno spettrofotometro Beckman IR 2 con monocromatori in fluoruro di litio, salgemma e bromuro di potassio. Spettri preliminari orientativi su dischi di KBr sono stati eseguiti con spettro-

fotometro Perkin Elmer 21 a doppio raggio dotato di prisma in salgemma e ringraziamo vivamente il prof. Carlo Ferrari, Direttore dell'Istituto di Chimica Agraria della Università di Bologna, per averci concesso l'uso di questo ultimo apparecchio.

Nella Tabella I sono riportati i risultati di diverse misure ottenuti sul cobalticianuro cristallino con il metodo della pasta e con quello dei dischi. È da notarsi che, in genere, gli spettri ottenuti con il metodo dei dischi mostrano qualche riga debole di più di quelli ottenuti con le paste. Fa eccezione la zona spettrale riferibile alle oscillazioni di valenza CN dove con il metodo dei dischi non si sono potute risolvere, con il nostro spettrometro, le due fortissime bande rispettivamente a  $2088$  e  $2105\text{ cm}^{-1}$  che invece vengono risolte esaminando campioni ottenuti con il metodo delle paste.

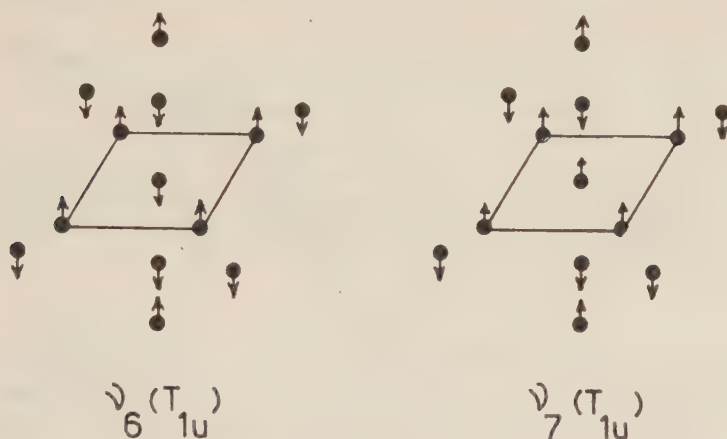


Fig. 1. - Schema delle oscillazioni  $\nu_6(T_{1u})$  e  $\nu_7(T_{1u})$  del modello ottaedrico dello ione.

Nella così detta zona del CN abbiamo poi studiato lo spettro ultrarosso del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa satura. Per tale soluzione lo spettro ultrarosso registra nella zona del CN una sola banda molto stretta ed intensa con massimo a  $2128\text{ cm}^{-1}$  ( $4,701\text{ }\mu$ ).

Ritourneremo in un prossimo lavoro sullo studio dei sistemi di bande debolissime che si osservano nella zona dello spettro ultrarosso del citato complesso attorno a  $4200\text{ cm}^{-1}$ ,  $2500\text{ cm}^{-1}$ ,  $700\text{--}900\text{ cm}^{-1}$  e ci fermiamo invece in questa Nota all'esame di due gruppi di forti bande uno a circa  $2100\text{ cm}^{-1}$  e l'altro tra  $400\text{--}600\text{ cm}^{-1}$ , che hanno un particolare significato per lo studio della struttura del complesso considerato.

Nella zona  $2100\text{ cm}^{-1}$  circa cadono le frequenze caratteristiche riferibili ad oscillazioni di valenza dei gruppi CN. Si dovrebbe registrare in questa zona per lo ione cobalticianidrico a configurazione ottaedrica  $O_h$  considerato isolato (per esempio in soluzione) una banda assai forte dovuta alla oscillazione  $\nu_6(T_{1u})$  triplamente degenerare (ved. [2], [6]) caratteristica nella sim-

metria ottaedrica dello ione cobalticianidrico e corrispondente all'analogia oscillazione dello ione ferrocianidrico « isolato » [6].

Ed invero l'esperienza conferma pienamente detta previsione come risulta dall'esame dello spettro del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa.

Nella zona  $400-600\text{ cm}^{-1}$  dovrebbe cadere (sempre per lo ione isolato) una oscillazione pur triplamente degenera e cioè la  $\nu_7(T_{1u})$  che può essere praticamente interpretata come una oscillazione di valenza  $\text{Co}-\text{C}$ . Non ci è stato per ora possibile, per difficoltà sperimentali del nostro impianto, spingere le nostre misure su soluzioni fino alla zona delle basse frequenze dove dovrebbe comparire questa oscillazione.

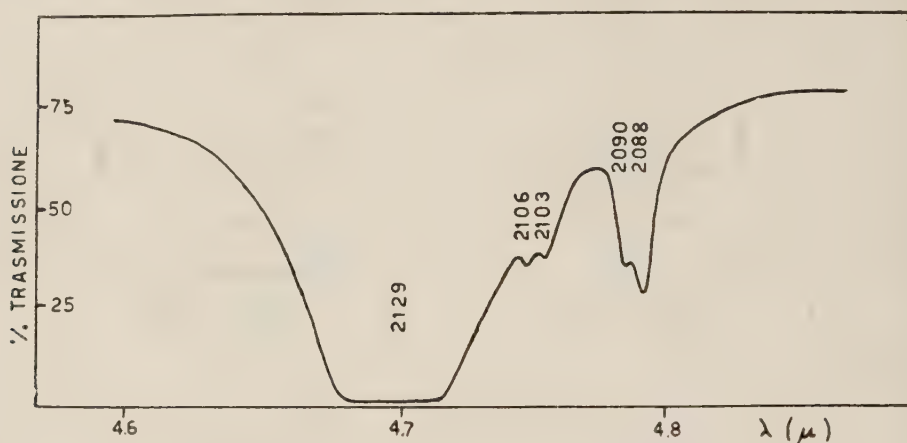


Fig. 2. - Spettro ultrarosso del  $\text{K}_3\text{Co}(\text{CN})_6$  cristallino nella zona delle « oscillazioni CN ».

(I numeri segnati nella Figura in corrispondenza dei massimi di assorbimento rappresentano le rispettive frequenze di massimo espresse in  $\text{cm}^{-1}$ ).

Nello spettro del cobalticianuro cristallino (tecnica delle paste) appaiono nella zona CN fra  $2000-2100\text{ cm}^{-1}$  5 bande delle quali due assai forti e 3 di minore intensità.

L'aspetto della fortissima banda a  $2129\text{ cm}^{-1}$  lascia però supporre come molto probabile che si tratti di una banda doppia.

Si arriverebbe allora a contare, nella così detta zona del CN, sei bande di assorbimento delle quali 3 assai intense e 3 meno intense.

Si può tentare una interpretazione di questo spettro del cobalticianuro per il sistema di bande CN.

La simmetria del gruppo spaziale  $C_{2h}^5$  che compete al cristallo di cobalticianuro di potassio ci porterebbe a localizzare i baricentri dei detti ioni del cristallo in punti (site) a simmetria locale  $C_i$ . Però data la speciale struttura dello ione cobalticianuro è difficile pensare che nelle sue oscillazioni questo ione, mantenendo un centro di simmetria, non mantenga anche gli altri elementi del gruppo  $C_{2h}$  che è il gruppo di punti che corrisponde alla simmetria della cella elementare.

Obbligando alla simmetria  $C_{2h}$  della cella cristallina elementare lo ione  $\text{Co}(\text{CN})_6$  ottaedrico, utilizzando i metodi della teoria dei gruppi che si sono recentemente ricordati in un altro lavoro [2] si avrebbe che la oscillazione  $\nu_6(\text{T}_{1u})$  attiva in ultrarosso si risolve in due oscillazioni di tipo  $B_u$  e una di  $A_u$  del gruppo  $C_{2h}$  mentre le oscillazioni  $A_{1g}$  e  $E_g$  (attive in Raman e inattive in ultrarosso) danno luogo a tre oscillazioni  $A_g$  del gruppo  $C_{2h}$  attive in Raman ed inattive in ultrarosso.

Accoppiando fra di loro le oscillazioni dei due ioni  $\text{Co}(\text{CN})_6$  contenuti nella cella cristallina elementare e ricordando che tale accoppiamento può essere simmetrico o antisimmetrico rispetto al centro della cella stessa (e cioè, in linguaggio gruppistico, conforme alla rappresentazione irriducibile  $A_g$  o a quella  $A_u$  del gruppo  $C_{2h}$  che compete alla cella stessa) ne verrà una ulteriore scissione secondo lo schema seguente:

TABELLA II.

*Oscillazioni CN dello ione  $\text{K}_3\text{Co}(\text{CN})_6$* 

| ione « isolato »<br>simmetria $O_h$ | un ione $\text{Co}(\text{CN})_6$<br>nella simmetria<br>cristallina $C_{2h}$                   | due ioni $\text{Co}(\text{CN})_6$<br>nella cella cristal-<br>lina elementare:<br>oscillazioni accop-<br>piate |
|-------------------------------------|---|---|
| $1 A_g$ (Raman)                     | $3 A_g$ (Raman)   | $\left\{ \begin{array}{l} 3 A_g \\ 3 A_u \end{array} \right.$   |
| $1 E_g$ (Raman)                     |   |   |
| $1 T_{1u}$ (u. r.)                  | $\left\{ \begin{array}{l} 1 A_u \text{ (u. r.)} \\ 2 B_u \text{ (u. r.)} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 1 A_u \\ 1 A_g \\ 2 B_u \\ 2 B_g \end{array} \right.$                               |

Si prevederebbero cioè complessivamente per il cristallo di  $\text{K}_3\text{Co}(\text{CN})_6$  ben 12 oscillazioni CN delle quali 6 attive in ultrarosso ( $4 A_u + 2 B_u$ ) e 6 attive in Raman ( $4 A_g + 2 B_g$ ).

Come abbiamo già osservato in un precedente lavoro [2] è però da attenderci che nello spettro ultrarosso le oscillazioni di tipo  $A_u$  (sottolineate in tratteggio nella Tabella II) che provengono da accoppiamento delle oscillazioni  $A_g$  inattive in ultrarosso importeranno variazioni più piccole del momento elettrico ed avranno perciò una minore intensità. Mentre dovremo attenderci assai più intense le  $A_u$  e le  $B_u$  (sottolineate in tratto pieno nella tabella) che provengono da accoppiamento di oscillazioni interne già di per sé attive in ultrarosso.

Si prevederebbero dunque nello spettro ultrarosso del cobalticianuro di potassio cristallino 3 forti bande molto intense e 3 bande meno intense. Come

si vede dalla tabella I e dalla figura 2 le tre bande meno intense sono segnate e distinte e delle due bande intense trovate una si presenta molto allargata e fa presumere di essere doppia.

Dunque l'esperienza nelle nostre condizioni strumentali rileva già nettamente 5 delle 6 bande previste. Però una di queste e cioè la  $2129\text{ cm}^{-1}$  si presenta con tutte le caratteristiche di una banda doppia non ancora risolta. Tale mancata risoluzione potrebbe attribuirsi o a non sufficiente potenza dei mezzi sperimentali usati o per effetto di allargamento e sovrapposizione delle due bande vicine in conseguenza di termini di anarmonicità delle oscillazioni relative e conseguenti combinazioni con oscillazioni reticolari come abbiamo già rilevato nel citato lavoro [2].

In questo caso uno studio dello spettro ultrarosso del cristallo a bassissima temperatura potrebbe dare nuovi elementi per una conferma.

Le oscillazioni attive in ultrarosso e caratteristiche del gruppo Co—C non mostrano invece la molteplicità che è apparsa per le oscillazioni CN. Ma un fatto analogo è stato riscontrato [1] nel caso delle oscillazioni dello ione ferrocianidrico. Anche per questo ione la molteplicità delle bande CN nel cristallo era assai superiore a quella della banda Fe—C.

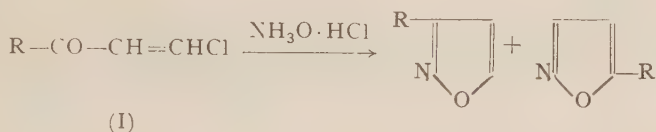
Dovremo fermare perciò la nostra attenzione su questo ultimo punto quando saremo in possesso di un maggior numero di dati sperimentali.

#### BIBLIOGRAFIA.

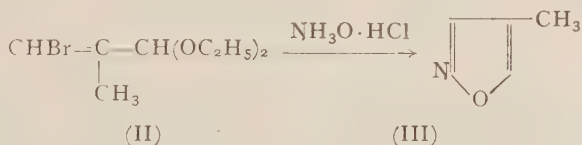
- [1] G. B. BONINO e G. FABBRI, questi « Rendiconti », XIX, 386 (1955); XX, 414; (1956); G. B. BONINO e O. SALVETTI, questi « Rendiconti », XX, 150 (1956); G. B. BONINO, questi « Rendiconti », XX, 419 (1956).
- [2] G. B. BONINO e O. SALVETTI, « La Ricerca Scientifica » (in corso di pubblicazione).
- [3] POSPELOV e ZHDANOV, « Z. fis. Khim. S.S.S.R. », 21, 405, 521 (1947).
- [4] BARKHATOV e ZHDANOV, « Acta Phys. Chim. U.R.S.S. », XVI, 43 (1942); BARKHATOV, id. XVI, 123 (1942).
- [5] R. S. HALFORD, « Journ. Chem. Phys. », 14, 8 (1946).
- [6] G. B. BONINO, questi « Rendiconti », XX, 419 (1956).
- [7] W. C. FERNELIUS, *Inorganic Syntheses*, vol. II, p. 225, McGraw-Hill Co. 1946.

**Chimica organica.** — *Nuova sintesi dell'isossazolo e del pirazolo* <sup>(\*)</sup>. Nota di GIORGIO GAUDIANO, ADOLFO QUILICO e ALDO RICCA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. QUILICO.

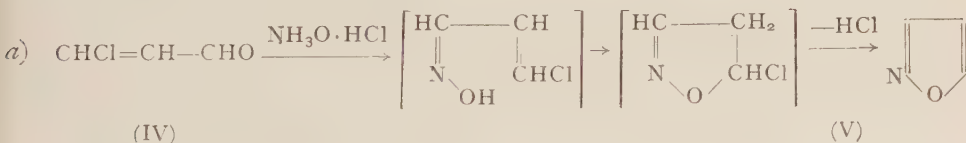
Tra i numerosi metodi di cui oggi disponiamo per la sintesi degli isossazoli omologhi, vi è quello descritto qualche anno fa da Nesmeyanov e Kochetkov <sup>(1)</sup>, basato sull'azione dell'idrossilammina sui  $\beta$ -clorovinilchetoni (I). Questi, facilmente preparabili per addizione dei cloruri acilici sull'acetilene in presenza di  $\text{AlCl}_3$ , forniscono per trattamento con  $\text{NH}_3\text{O}\cdot\text{HCl}$  una miscela dei due alchilisossazoli isomeri  $\alpha$  e  $\gamma$ , in rapporti che dipendono essenzialmente dalla natura di R:



Della reazione, in tutto parallela, riguardante le aldeidi insature  $\beta$ -alogenate si ha un solo esempio nella letteratura, quello riportato da Pino ed Ercoli <sup>(2)</sup> i quali, facendo agire a caldo il cloridrato d'idrossilammina sull'acetale della  $\alpha$ -metil- $\beta$ -bromoacroleina (II), sintetizzarono il  $\beta$ -metilisossazolo (III), il solo termine ancora mancante alla serie dei metilderivati:



In una recentissima breve nota di Sollazzo e Vercellone <sup>(3)</sup> è stato descritto un metodo pratico per la preparazione della ancora scarsamente studiata  $\beta$ -cloroacroleina (IV); ciò ci ha fatto intravedere la possibilità di una nuova sintesi del termine fondamentale della serie isossazolica secondo la reazione:



(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

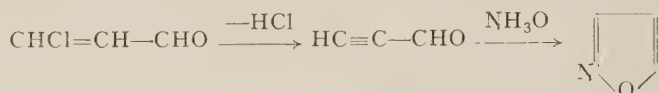
(1) A. N. NESMEYANOV e N. K. KOCHETKOV, «Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.», 77, 65 (1951); N. K. e N. A. SEMENOV, «Izvestia Akad. Nauk S.S.S.R.», 1952, 87.

(2) «Gazz. Chim. It.», 81, 757 (1951).

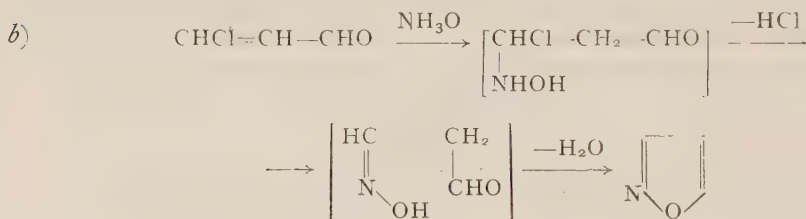
(3) «La Chimica e l'Ind.», 38, 591 (1956).

È infatti noto che le ossime delle aldeidi  $\alpha$ ,  $\beta$ -insature possono ciclizzare a isossazoline, e che le isossazoline  $\alpha$ -alogenate eliminano con grande facilità una molecola d'idracido per dare i corrispondenti isossazoli<sup>(4)</sup>. Le previsioni sono state confermate dall'esperienza. L'aldeide  $\beta$ -cloroallilica reagisce già a temperatura ordinaria con il cloridrato d'idrossilammina in soluzione acquosa, e distillando il liquido di reazione passa con l'acqua l'*isossazolo* (V), isolabile attraverso il composto con  $\text{CdCl}_2$  in rese di circa il 75 % del teorico rispetto all'aldeide grezza.

Che il meccanismo della sua formazione sia quello sopra indicato e non l'altro:

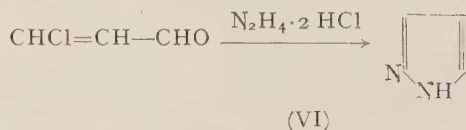


implicante l'aldeide propargilica come intermedio, appare confermato dal fatto che la  $\beta$ -cloroacroleina reagisce in modo normale senza perdita di HCl con gli altri reattivi del gruppo CO, dando un *o*-*p*-dinitrofenilidrazone p. f. 189°-190° con dec. e un *semicarbazone* p. f. 141°-141°,5 stabili, aventi la composizione richiesta dalle formule. Potrebbe invece essere preso in considerazione anche l'altro meccanismo:



comprendente l'addizione di  $\text{NH}_3\text{O}$  sul doppio legame, seguita da eliminazione di HCl; anzi, il verificarsi contemporaneamente delle due reazioni *a*) e *b*), che nel caso della  $\beta$ -cloroacroleina portano allo stesso risultato, renderebbe ragione del fatto che i  $\beta$ -clorovinilchetoni (I) diano una miscela dei due isossazoli isomeri<sup>(5)</sup>.

Considerato il parallelismo esistente in genere tra i metodi di sintesi degli anelli isossazolico e pirazolico, era prevedibile che la  $\beta$ -cloroacroleina potesse venire utilizzata come materiale di partenza anche per la sintesi del pirazolo, secondo lo schema:



(4) P. GRÜNANGER, «Gazz. Chim. It.», 84, 360 (1954).

(5) Questa non è naturalmente l'unica spiegazione; altre interpretazioni si potrebbero dare, per esempio la formazione di biderivati  $\text{HON}(\text{CHCl}-\text{CH}_2-\text{CHO})_2$  ecc., come nel caso della formazione delle due isossazoline isomere nella reazione tra chetoni  $\alpha$ -insaturi e  $\text{NH}_3\text{O}$ . Vedi K. VON AUWERS e H. MÜLLER, «J. prakt. Chem.», 137, 102 (1933).

Infatti per breve riscaldamento dell'aldeide con una soluzione acquosa concentrata di cloridrato d'idrazina, successiva alcalinizzazione ed estrazione con etere, si isola il *pirazolo* (VI) in rese del 30-35 % sull'aldeide grezza.

Se si opera a temperatura ordinaria, l'aggiunta della aldeide alla soluzione di  $N_2H_4 \cdot 2HCl$  provoca l'immediata separazione di un prodotto aranciato p.f. 164° con dec. Questa sostanza per riscaldamento con acidi o con soluzione di cloridrato d'idrazina passa a pirazolo, e trattata con o.p.-dinitrofenilidrazina dà il dinitrofenilidrazone della  $\beta$ -cloroacroleina. L'analisi di questo intermedio non corrisponde tuttavia a quella di una aldazina  $ClCH=CH-CH=N-N=CH-CH=CHCl$ , come si presentava probabile per il modo di formazione, dal comportamento chimico e dal colore <sup>(6)</sup>.

Non siamo invece riusciti ad ottenere l'*N*-2,4-dinitrofenilpirazolo per trattamento dell'aldeide  $\beta$ -cloroallilica con 2,4-dinitrofenilidrazina. Anche dopo prolungato riscaldamento dei reagenti in soluzione idroalcolica in presenza di HCl o di acetato sodico si è sempre isolato il dinitrofenilidrazone della  $\beta$ -cloroacroleina p.f. 189°-190°.

#### PARTE SPERIMENTALE

##### PREPARAZIONE DELLA $\beta$ -CLOROACROLEINA (formula IV).

È stata preparata per ossidazione dell'alcool  $\gamma$ -cloroallilico con  $MnO_2$  e  $H_2SO_4$  in presenza di  $NaHSO_4$ , seguendo le prescrizioni di Vercellone e Sol-lazzo <sup>(3)</sup>. Le rese oscillano alquanto nelle differenti preparazioni, e poiché abbiamo sempre impiegato direttamente l'aldeide grezza, anche i rendimenti in isossazolo e pirazolo sono variabili da un'operazione all'altra.

*o.p.-Dinitrofenilidrazone*. Preparato dai componenti in etanolo in presenza di  $H_2SO_4$ . Cristallizza dall'ac. acetico nel quale è notevolmente solubile in minuti cristalli rosso-aranciati p.f. 189°-190° con dec.

|         |                                  |   |       |
|---------|----------------------------------|---|-------|
| Analisi | trov. %:                         | N | 20,86 |
|         | per $C_9H_7ClO_4N_4$ , calcolato |   | 20,70 |

Il prodotto non ciclizza a pirazolo per ebollizione di circa un'ora della soluzione alcolica addizionata di HCl concentrato o di acetato sodico.

*Semicarbazone*. Cristallizza da etanolo in aghetti incolori p.f. 141°-141°,5 con dec.

|         |                            |   |       |
|---------|----------------------------|---|-------|
| Analisi | trov. %:                   | N | 28,34 |
|         | per $C_4H_6ClON_3$ , calc. |   | 28,48 |

(6) L'aldazima dell'aldeide crotonica descritta da J. HLADIK, «M.», 24, 438 (1903) è colorata in rosso aranciato.

AZIONE DEL CLORIDRATO D'IDROSSILAMMINA SULL'ALDEIDE  $\beta$ -CLOROALLILICA:  
ISOSSAZOLO (form. V).

g 1,85 di  $\beta$ -cloroacroleina grezza vengono addizionati a temperatura ambiente alla soluzione di g 1,6 (1,1 mole) di  $\text{NH}_3\text{O}\cdot\text{HCl}$  in  $15\text{ cm}^3$  di acqua. Dopo alcuni istanti la reazione si inizia con sviluppo di calore. Si bolle a ricadere per qualche minuto, poi si distilla lentamente l'azeotropo acqua-isossazolo. Per trattamento del distillato con soluzione satura di  $\text{CdCl}_2$  precipita il sale  $\text{C}_3\text{H}_3\text{ON}\cdot\text{CdCl}_2$  che viene filtrato, lavato con etere e seccato nel vuoto. Resa g 3,9, corrispondente al 74 % del teorico rispetto all'aldeide <sup>(7)</sup>.

L'isossazolo, messo in libertà dal sale di cadmio per cauta distillazione, presenta le caratteristiche date in letteratura. Trattato con  $\text{CH}_3\text{ONa}$  in soluzione metanolica si isomerizza a cianacetaldeide, identificata alla formazione del caratteristico *p*-nitrofenilidrazone, che ricristallizzato dall'alcool fonde a  $154^\circ$  anche in miscela con un campione autentico di altra provenienza.

AZIONE DEL CLORIDRATO D'IDRAZINA SULL'ALDEIDE  $\beta$ -CLOROALLILICA; PI-  
RAZOLO (form. VI).

A) *A temperatura ordinaria*. - g 1,15 di aldeide  $\beta$ -cloroallilica vengono aggiunti a g 1,15 di  $\text{N}_2\text{H}_4\cdot 2\text{HCl}$  sciolti in  $15\text{ cm}^3$  di acqua. Si forma subito un precipitato polverulento giallo che passa immediatamente all'arancione, e che viene filtrato, lavato e seccato; ottenuti g 0,6. La sostanza è scarsamente solubile nei solventi idrocarburici e clorurati, abbastanza solubile in acqua, alcool e acido acetico. Ricristallizzato da butanolo fonde a  $164^\circ$  con dec. Il dosamento dell'azoto ha dato 18,82; 18,76; 18,91 % <sup>(8)</sup>. Si scioglie negli alcali diluiti a freddo e riprecipita per acidificazione. Con o-*p*-dinitrofenilidrazina dà il dinitrofenilidrazone della  $\beta$ -cloroacroleina p. f.  $189^\circ$ - $190^\circ$  già descritto.

g 0,15 di prodotto aranciato vengono bolliti con g 0,1 di  $\text{N}_2\text{H}_4\cdot 2\text{HCl}$  in  $5\text{ cm}^3$  di acqua. Dopo alcuni minuti si filtra, si alcalinizza e si estrae con etere. Per evaporazione dell'estratto eterico seccato su  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  rimane un olio che prontamente solidifica. Il prodotto ha debole odore basico; ripreso con poco etere e trattato con soluzione eterica di acido picrico dà un picrato cristallino che fonde a  $159^\circ$ - $160^\circ$  come il picrato del *pirazolo* descritto in letteratura.

B) *A caldo*. - g 1,5 di aldeide grezza vengono riscaldati a b. m. con una soluzione di g 1,5 di  $\text{N}_2\text{H}_4\cdot 2\text{HCl}$  sciolti in  $4\text{ cm}^3$  di acqua fino al

(7) In altre operazioni si sono avute rese alquanto inferiori, in relazione al differente contenuto in  $\beta$ -cloroacroleina dell'aldeide grezza.

(8) Per l'aldazina  $\text{CHCl}=\text{CH}-\text{CH}=\text{N}-\text{N}=\text{CH}-\text{CH}=\text{CHCl}$  il teorico sarebbe N 15,82 %.

ridiscioglimento del precipitato arancione formatosi in un primo tempo, ciò che richiede qualche minuto. Dopo raffreddamento si separano circa g 0,15 di un olio (probabilmente alcool  $\gamma$ -cloroallilico inalterato) che si elimina per decantazione. Si filtra, si alcalinizza e si estrae con etere il liquido acquoso; per evaporazione dell'estratto etero seccato si ottengono g 0,4 di *pirazolo* grezzo, che viene purificato per sublimazione e per ricristallizzazione da esano. Il prodotto puro fonde a  $70^\circ$ , corrispondentemente a quanto è dato in letteratura. Il *picrato*, dopo cristallizzazione da acqua e da benzolo, fonde a  $164^\circ$ – $166^\circ$ .

Analisi trov. % N : 23,37  
per  $C_3H_4N_2 \cdot C_6H_3O_7N$ , calc. : 23,57

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici.* Nota II <sup>(\*)</sup> di CORNELIS GERRIT LEKKERKERKER, presentata dal Socio B. SEGRE.

8. Per poter procedere ci occorrono ancora due lemmi, che stabiliremo in questo numero e nel numero successivo.

LEMMA 5. — *Siano  $k$  e  $n$  interi positivi. Allora esiste un numero positivo  $\varepsilon = \varepsilon(n, k)$ , dipendente solo da  $n$  e  $k$ , tale che vale la seguente proprietà.*

*Siano  $\zeta$  e  $\eta$  due numeri positivi, i cui sviluppi in frazioni continue regolari siano dati da*

$$\zeta = [b_0, b_1, b_2, \dots] \quad , \quad \eta = [c_0, c_1, c_2, \dots].$$

*Sia  $\zeta$  un numero di  $L(k)$  e sia  $|\zeta - \eta| < \varepsilon$ . Allora si ha*

$$b_v = c_v \quad \text{per } v = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Indichiamo con  $t_m/u_m$  le ridotte della prima frazione continua e con  $b_m^*$  i quozienti completi di questa ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Abbiamo per un  $n$  comunque assegnato

$$\begin{aligned} \zeta = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n^*] &= \frac{b_n^* t_{n-1} + t_{n-2}}{b_n^* u_{n-1} + u_{n-2}} \\ &= \frac{t_{n-1}}{u_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{u_{n-1} (b_n^* u_{n-1} + u_{n-2})}, \end{aligned}$$

ed è inoltre  $1 + 1/(k+1) < b_n^* < k+1$ . Un numero positivo  $\eta$  soddisferà all'asserto, se possiamo scrivere

$$\eta = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, x], \quad \text{dove } x > 1,$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1956.

e cioè se

$$(13) \quad \eta = \frac{z_{n-1}}{n_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{u_{n-1}(xu_{n-1} + u_{n-2})}, \quad \text{dove } x > 1.$$

Osserviamo dapprima che è:  $u_{n-1} < (k+1)^n$ . Consideriamo poi la funzione  $\varphi(x)$  data da

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_{n-1}(xu_{n-1} + u_{n-2})}.$$

Essa è decrescente per  $x > 1$ , e si ha

$$\begin{aligned} \varphi(1) - \varphi(1 + 1/(k+1)) &> \frac{1}{k+1} \{ (1 + 1/(k+1)) u_{n-1} + u_{n-2} \}^{-2} \\ &= \frac{1}{k+1} \left\{ \frac{k+1}{(k+2)u_{n-1} + (k+1)u_{n-2}} \right\}^2 > \frac{1}{9(k+1)u_{n-1}^2} > \frac{1}{9} (k+1)^{-(2n+1)}, \end{aligned}$$

$$\varphi(k+1) - \varphi(\infty) = \varphi(k+1) > \frac{1}{(k+2)u_{n-1}^2} > \frac{1}{9} (k+1)^{-(2n+1)}.$$

Ne segue che, se  $y$  è un numero reale per cui si abbia

$$|\varphi(b_n^*) - y| < \frac{1}{9} (k+1)^{-(2n+1)},$$

esiste un numero  $x > 1$  tale che  $y = \varphi(x)$ . Da ciò segue il lemma, con

$$\varepsilon(n, k) = \frac{1}{9} (k+1)^{-(2n+1)}.$$

9. LEMMA 6. - Sia  $\theta$  un numero di  $L(k)$ ,  $\theta = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Supponiamo che la successione  $\{a_n^*\}$  abbia soltanto un numero finito di punti di accumulazione. Allora la frazione continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  risulta periodica da un certo indice in poi.

Siano  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_g$ , distinti fra loro, i punti di accumulazione della successione  $\{a_n^*\}$ . Gli sviluppi dei numeri  $\rho_i$  in frazioni continue regolari siano dati da

$$\rho_i = [b_{i0}, b_{i1}, b_{i2}, \dots], \dots, \rho_g = [b_{g0}, b_{g1}, b_{g2}, \dots].$$

Nessuna di queste frazioni continue è finita, poiché ogni  $\rho_i$  è il limite di una certa successione di numeri appartenenti a  $L(k)$  ed è quindi anche un numero di  $L(k)$ . Ovviamente  $\rho_i \geq 1$ , e quindi  $b_{i0} \geq 1$  per  $i = 1, 2, \dots, g$ .

Sia ora  $m$  un intero positivo  $\geq g$ , tale che le frazioni continue finite

$$[b_{i0}, b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{i, m-1}], \dots, [b_{g0}, b_{g1}, b_{g2}, \dots, b_{g, m-1}]$$

siano distinte fra loro. Poniamo  $\varepsilon_0 = \varepsilon(2m, k)$  dove il numero  $\varepsilon(2m, k)$  si determini col lemma 5 (n. 8). Sia poi  $n_0$  un intero positivo tale che, per ogni indice  $n \geq n_0$ , la differenza fra  $a_n^*$  ed almeno uno dei punti di accumulazione  $\rho_i$  sia minore di  $\varepsilon_0$ . Allora ad ogni  $n \geq n_0$  si può associare un certo indice  $i = i(n) \leq g$  in modo che si abbia

$$(14) \quad |a_n^* - \rho_{i(n)}| < \varepsilon_0.$$

Dalla (14) segue, per la definizione di  $\varepsilon_0$ , che certamente i primi  $m$  quozienti parziali corrispondenti negli sviluppi di  $a_n^*$  e  $\rho_{i(n)}$  in frazioni continue regolari coincidono. Di conseguenza, per ogni  $n \geq n_0$  l'indice  $i(n)$  è determinato univocamente.

Consideriamo ora i  $g+1$  numeri  $n = n_0, n_0+1, \dots, n_0+g$ . Ad almeno due di questi è associato il medesimo indice  $i(n)$ ; sia  $i(n_1) = i(n_1+p) = j$  dove  $n_0 \leq n_1 < n_1+p \leq n_0+g$ . Allora abbiamo

$$|a_{n_1}^* - \rho_j| < \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad |a_{n_1+p}^* - \rho_j| < \varepsilon_0,$$

mentre  $1 \leq p \leq g \leq m$ . In conseguenza ancora del lemma 5, e per la definizione di  $\varepsilon_0$ , abbiamo dunque

$$a_{n_1+l} = b_{jl} \quad \text{e} \quad a_{n_1+p+l} = b_{jl} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \dots, 2m-1,$$

e quindi

$$(15) \quad a_{n_1+l} = a_{n_1+p+l} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \dots, 2m-1.$$

In particolare,

$$(15') \quad a_{n_1+l} = a_{n_1+p+l} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \dots, p-1;$$

si ha poi

$$a_{n_1+p+l} = a_{n_1+2p+l} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

in quanto  $p+m-1 \leq 2m-1$ ; ne segue che dev'essere

$$i(n_1+p) = i(n_1+2p) = j.$$

Può infine ripetersi indefinitamente lo stesso ragionamento, sostituendo soltanto  $n_1$  con  $n_1+p$ , oppure con  $n_1+2p$ , e via dicendo. Di conseguenza abbiamo

$$i(n_1+sp) = j \quad \text{per} \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

$$a_{n_1+sp+l} = a_{n_1+l} \quad \text{per} \quad l = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad \text{e} \quad s = 0, 1, 2, \dots.$$

L'ultima relazione fornisce l'asserto.

10. Siamo ora in grado di dimostrare anche la seconda parte del teorema A (enunciato nel n. 1), ossia di stabilire il

TEOREMA 2. — *Se  $J'(\theta)$  è discreto, allora  $\theta$  è un numero quadratico.*

Dal lemma 4 segue intanto che ogni insieme  $J'_{a,b}(\theta)$  è finito. In particolare, faremo uso della finitezza degli insiemi  $J'_{1,1}(\theta)$  e  $J'_{2,1}(\theta)$ , i quali consistono rispettivamente dei numeri  $\zeta_n^{(1,1)}$  e  $\zeta_n^{(2,1)}$ .

Supponiamo che la successione  $a_0^*, a_1^*, a_2^*, \dots$  abbia un numero infinito di punti di accumulazione. Allora esistono infinite successioni crescenti di numeri interi positivi

$$\{n(i, 1), n(i, 2), \dots, n(i, j), \dots\} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

tali che:

1° la successione dei numeri  $(-1)^{n(i,j)} \zeta_{n(i,j)}^{(1,1)}$ , con  $i, j = 1, 2, \dots$ , tende a un certo limite  $\alpha_1$  per  $n(i, j) \rightarrow \infty$ ;

2° la successione dei numeri  $(-1)^{n(i,j)} \zeta_{n(i,j)}^{(2,1)}$ , con  $i, j = 1, 2, \dots$ , tende a un limite  $\alpha_2$ ;

3° fissato  $i$  arbitrariamente, la successione  $\{a_n^*(i, j)\}$  ha un limite,  $\rho_i$ , in modo che i numeri  $\rho_1, \rho_2, \dots$  risultano distinti fra di loro.

Si ha dunque

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_n^*(i, j) = \rho_i, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{n(i, j)} \zeta_n^{(1, 1)}(i, j) = \alpha_1,$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{n(i, j)} \zeta_n^{(2, 1)}(i, j) = \alpha_2 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

I numeri  $a_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) e  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) appartengono tutti a  $L(k)$ , e sono quindi irrazionali; i numeri  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono finiti e non nulli, per il lemma 4 e i risultati del Cugiani richiamati nel n. 1.

Applichiamo ora il lemma 3, con  $a = b = 1$ . Troviamo che, per  $i$  fissato, risulta

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (1 - a_n^*(i, j)) (1 + 1/\lambda_n(i, j) - 1) (a_n^*(i, j) + 1/\lambda_n(i, j) - 1)^{-1} = \alpha_i,$$

e quindi anche

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (1 - \rho_i) (1 + 1/\lambda_n(i, j) - 1) (\rho_i + 1/\lambda_n(i, j) - 1)^{-1} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Si ha dunque

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n(i, j) - 1} = \tau_i, \quad \text{dove} \quad \frac{(1 - \rho_i)(1 + \tau_i)}{\rho_i + \tau_i} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Applicando di nuovo il lemma 3, con  $a = 2$  e  $b = 1$ , troviamo che è anche

$$\frac{(2 - \rho_i)(2 + \tau_i)}{\rho_i + \tau_i} = \alpha_2 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Abbiamo così ottenuto due relazioni colleganti i limiti  $\rho_i$  e  $\tau_i$ ; eliminando fra esse  $\tau_i$ , si ricava:

$$(\alpha_1 - \alpha_2 - 1)x_i^2 + (2\alpha_1 - 1)x_i + \alpha_1 = 0, \quad \text{con } x_i = 1 - \rho_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Dunque, nell'ipotesi fatta, l'ultima relazione sarebbe soddisfatta da un numero infinito di distinte  $x_i$ , ciò che è assurdo. Pertanto la successione  $a_0^*, a_1^*, a_2^*, \dots$  non può che avere un numero finito di punti di accumulazione.

Infine il lemma 6 (n. 9) ci garantisce la periodicità della frazione continua  $\theta = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Quindi  $\theta$  è un numero quadratico, ciò che completa la dimostrazione del teorema.

II. Passiamo da ultimo a stabilire il teorema C (enunciato nel n. 1). Sia  $\theta$  un numero di  $L(k-1)$  e consideriamo l'insieme  $J_{1,0}(\theta)$  quale risulta dal n. 4, dato cioè dai numeri  $\zeta_n = \zeta_n^{(1,0)} = q_{n-1}^2 \left( \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \theta \right)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Applicando a questi il lemma 3, con  $a = 1$  e  $b = 0$ , ritroviamo la nota relazione (4)

$$(16) \quad \zeta_n = q_{n-1}^2 \left( \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \theta \right) = \frac{(-1)^n}{a_n^* + 1/\lambda_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

(4) Si veda ad esempio: O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner (1913), p. 52, r. 4.

Faremo vedere che il numero  $\theta$  può essere scelto in guisa che l'insieme dei punti di ascissa  $(-1)^n (a_n^* + 1/\lambda_{n-1})$  sia denso su ambedue gli intervalli  $(-k, -k/4)$  e  $(k/4, k)$ . Indicheremo tale insieme con  $G = G(\theta)$ .

Sia  $x$  un punto arbitrario nell'intervallo  $(k/4, k)$ . Definito il numero intero  $c$  mediante le  $\sqrt{2} - 1 < x - c \leq \sqrt{2}$ , si ha  $k/4 - c \leq \sqrt{2}$ , e quindi  $c \geq k/4 - \sqrt{2}$ , sicché  $c \geq 1$ ; similmente si vede che  $c \leq k - (\sqrt{2} - 1)$ , onde  $c \leq k - 1$ . Al numero  $x - c$  possiamo ora applicare il lemma 2° (n. 2); così troviamo che il numero  $x$  può venir scritto nella forma

$$x = x' + x'',$$

dove  $x'$  ed  $x''$  sono due numeri di  $L(4)$  con  $c < x' < c + 1$  e  $0 < x'' < 1$ . Ovviamente,  $x$  è punto di accumulazione di  $G(\theta)$  se esiste una successione crescente di indici pari  $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$ , tale che si abbia

$$a_{n_i}^* \rightarrow x' \quad , \quad 1/\lambda_{n_i-1} \rightarrow x'' \quad \text{per } i \rightarrow \infty.$$

Dimosteremo anzitutto che ogni numero  $x$  dell'intervallo  $(k/4, k)$  gode di questa proprietà, e tratteremo in modo analogo l'intervallo  $(-k, -k/4)$ .

Sia  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$  una successione crescente di interi positivi. Per  $i \geq 1$ , siano  $B_i(1), B_i(2), \dots, B_i(4^{m_i})$  gli aggregati di  $m_i$  interi positivi, tutti  $\leq 4$ . È immediato come si possa costruire una frazione continua tale che ognuno degli aggregati  $B_i(j)$ , con  $1 \leq j \leq 4^{m_i}$  e  $i \geq 1$ , appaia come successione di  $m_i$  suoi quozienti parziali consecutivi; basta mettere l'uno dopo l'altro, in un qualunque ordine, gli aggregati  $B_i(j)$ . Si potrebbero anche inserire fra due aggregati consecutivi altri interi o aggregati. A noi occorre considerare una frazione continua regolare

$$(17) \quad [a_0, a_1, a_2, \dots],$$

che rappresenti un numero di  $L(k-1)$  e goda della seguente proprietà.

Scelti a piacere il numero  $\sigma = \pm 1$  e quattro interi positivi  $c, i, j, j'$ , con  $1 \leq c \leq k-1, j \leq 4^{m_i}, j' \leq 4^{m_i}$  e  $i \geq 1$ , esiste un indice

$$n = n(\sigma, c, i, j, j') > m_i$$

tale che si abbia:

$$(-1)^n = \sigma, \quad a_n = c;$$

$$(a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+m_i}) \text{ sia l'aggregato } B_i(j);$$

$$(a_{n-m_i}, a_{n-m_i+1}, \dots, a_{n-1}) \text{ sia l'aggregato } B_i(j').$$

Osserviamo che l'insieme di tali frazioni continue ha la potenza del continuo.

Riferiamoci ora a due numeri arbitrari  $x'$  e  $x''$  di  $L(4)$  con  $c < x' < c+1$  e  $0 < x'' < 1$ , dove  $c$  sia uno dei numeri  $1, 2, \dots, k-1$ . I loro sviluppi in frazioni continue regolari siano dati da

$$x' = [c, b_1, b_2, \dots] \quad , \quad x'' = [0, c_1, c_2, \dots].$$

Per ogni  $i \geq 1$ , siano  $B_i(j_i)$  l'aggregato  $(b_1, b_2, \dots, b_{m_i})$ ,  $B_i(j'_i)$  l'aggregato  $(c_{m_i}, c_{m_i-1}, \dots, c_1)$ , e si ponga  $n_i = n(1, c, i, j_i, j'_i)$ ,  $n'_i = n(-1, c, i, j_i, j'_i)$ .

Allora, nella suddetta frazione continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ , i quozienti parziali  $a_{n_i}$  e  $a_{n'_i}$  sono preceduti dall'aggregato  $(c_{m_i}, c_{m_i-1}, \dots, c_1)$  e seguiti dall'aggregato  $(b_1, b_2, \dots, b_{m_i})$ , mentre  $a_{n_i} = a_{n'_i} = c$ ,  $n_i$  è un numero pari e  $n'_i$  è un numero dispari. Ne segue fra l'altro, siccome  $m_i \rightarrow \infty$  per  $i \rightarrow \infty$ , che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n'_i}^* = [c, b_1, b_2, \dots] = x'$$

e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} 1/\lambda_{n_i-1} = \lim_{i \rightarrow \infty} 1/\lambda_{n'_i-1} = [0, c_1, c_2, \dots] = x''.$$

Quindi, poiché gli indici  $n_i$  sono pari e gli indici  $n'_i$  sono dispari,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (-1)^{n_i} (a_{n_i}^* + 1/\lambda_{n_i-1}) = x' + x'',$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (-1)^{n'_i} (a_{n'_i}^* + 1/\lambda_{n'_i-1}) = -(x' + x'').$$

Dalle cose dette segue che, se  $\theta$  è il numero di  $L$  ( $k-1$ ) rappresentato dalla frazione continua (17), ogni punto degli intervalli  $(-k, -k/4)$  e  $(k/4, k)$  è di accumulazione per  $G(\theta)$ . Ne segue che l'insieme  $J_{1,0}(\theta)$  è denso sugli intervalli  $(-4/k, -1/k)$  e  $(1/k, 4/k)$ . Ora, se  $y$  è un punto di  $J(\theta)$ , tale è pure ogni punto  $m^2 y$ , dove  $m$  denoti un qualunque intero positivo. Quindi  $J(\theta)$  è denso sull'asse reale al di fuori dell'intervallo  $(-1/k, 1/k)$ , ciò che completa la dimostrazione del teorema C.

**Geometria.** — *Sulle calotte a centri allineati appartenenti a superficie algebriche.* Nota di UMBERTO GASAPINA, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

INTRODUZIONE. — È classico il teorema di M. Reiss che assegna una relazione fra gli elementi  $E_2$  di una curva algebrica aventi i centri allineati: E. Bompiani<sup>(1)</sup> ha risolto il problema delle relazioni che sussistono fra le  $n$  calotte del secondo ordine a centri allineati di una superficie algebrica  $F_n$  di ordine  $n$  in  $S_3$ ; in particolare ha provato che:

*Data una superficie algebrica d'ordine  $n$  ed una retta  $r$  che la incontri in  $n$  punti distinti, fra le calotte del secondo ordine aventi i centri in quei punti passano tre relazioni indipendenti.*

Il Bompiani pone poi la questione in forma analitica e calcola, in un sistema di riferimento generale, queste tre relazioni; più precisamente calcola una sola relazione da applicarsi a tre sezioni della superficie con tre piani passanti per la retta dei centri; quindi determina il significato proiettivo delle tre relazioni stesse e ne dà una forma metrica nel caso particolare in cui le linee coordinate sulle  $n$  calotte siano linee piane ottenute secondo la

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) E. BOMPIANI, *Calotte a centri allineati di superficie algebriche*, « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I, pp. 93-101 (1940). In questo lavoro si trovano anche ampie notizie storiche e bibliografiche sul teorema di Reiss.

$F_n$  con piani paralleli a due piani passanti per la retta  $r$ . Assumendo in particolare un riferimento cartesiano nel quale l'asse delle  $z$  è la retta sulla quale sono allineati i centri e col riferire ciascuna calotta ai due parametri cartesiani  $x, y$  egli perviene alle tre relazioni semplici ed eleganti

$$\sum_i^n \frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} = 0, \quad \sum_i^n \frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y} = 0, \quad \sum_i^n \frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2} = 0.$$

Lo scopo della presente Nota è di dare alle relazioni del Bompiani una forma che ponga in rilievo alcuni elementi metrici fondamentali del sistema calotte-retta senza che vi intervenga in alcun modo il riferimento. I risultati a cui perveniamo, e che ci sembrano espressivi, sono i seguenti.

Siano:  $F_n$  la superficie algebrica di ordine  $n$ ;  $P_1, P_2, \dots, P_n$  i centri, tutti distinti, delle  $n$  calotte;  $r$  il versore di  $r$  in un verso fissato;  $v$  il generico versore perpendicolare alla retta  $r$ ;  $a_{1i}$  e  $a_{2i}$  i versori tangenti alle asintotiche passanti per  $P_i$ ;  $H_i$  e  $K_i$  la curvatura media e la curvatura totale della superficie calcolate in  $P_i$ ;  $\omega_i$  l'angolo che il versore normale  $N$  alla superficie in  $P_i$  forma con  $r$ .

La relazione del Bompiani, intercedente fra le calotte del secondo ordine di una  $F_n$  a centri allineati e da applicarsi a tre versori  $v$ , può scriversi nella forma

$$(1) \quad \sum_i^n \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} \frac{(a_{1i} \times v)(a_{2i} \times v)}{a_{1i} \times a_{2i}} = 0.$$

Da questa relazione si possono dedurre le due altre seguenti relazioni, dipendenti esclusivamente dalla retta  $r$ , la seconda delle quali è stata data dal Bompiani in un caso particolare di parametrizzazione delle  $n$  calotte:

$$(2) \quad \sum_i^n \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} = \sum_i^n \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} \frac{(a_{1i} \times r)(a_{2i} \times r)}{a_{1i} \times a_{2i}},$$

$$(3) \quad \frac{K_1}{\cos^4 \omega_1} = \sum_i^n \frac{K_i}{\cos^4 \omega_i} +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{i+j}^n \frac{H_i H_j}{\cos^3 \omega_i \cos^3 \omega_j (a_{1i} \times a_{2i})(a_{1j} \times a_{2j})} \cdot \{ (a_{1i} \wedge a_{2j} \times r)(a_{2i} \wedge a_{1j} \times r) + (a_{1i} \wedge a_{1j} \times r)(a_{2i} \wedge a_{2j} \times r) \}.$$

OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>. — In un punto in cui le asintotiche sono perpendicolari il rapporto  $H/(a_1 \times a_2)$  diviene indeterminato. Si può verificare facilmente che in un tale punto al rapporto  $H/(a_1 \times a_2)$  può sostituirsi  $2\sqrt{-K}$ .

OSSERVAZIONE 2<sup>a</sup>. — La normale alla superficie e i versori tangenti alle asintotiche possono essere orientati arbitrariamente per ciascuna calotta poiché cambiando uno qualunque di tali orientamenti resta evidentemente invariato il segno di ciascun termine delle somme che compaiono nelle relazioni (1), (2) e (3).

## § I. — DIMOSTRAZIONE DELLA RELAZIONE (1)

Nell'intorno  $\Sigma_i$  di ciascun punto  $P_i$  la  $F_n$  sia rappresentata dalle equazioni parametriche

$$x = x_i(u_i, v_i), \quad y = y_i(u_i, v_i), \quad z = z_i(u_i, v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove  $u_i$  e  $v_i$  sono parametri indipendenti da intorno a intorno.

Siano inoltre

$$X = X_i(u_i, v_i), \quad Y = Y_i(u_i, v_i), \quad Z = Z_i(u_i, v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

i coseni direttori del versore  $\mathbf{N}$ , e siano

$$ds_i^2 = \Sigma dx_i^2 = E_i du_i^2 + 2 F_i du_i dv_i + G_i dv_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$- \Sigma dx_i dX_i = L_i du_i^2 + 2 M_i du_i dv_i + N_i dv_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

le due forme fondamentali relative all'intorno  $\Sigma_i$ . Consideriamo un piano qualunque  $\theta$  passante per la retta  $r$ , la cui equazione normale è

$$\varphi = d \quad (\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1).$$

Il piano  $\theta$  seziona la  $F_n$  secondo una curva algebrica  $\Gamma_n$ . Si denoti con  $1/\rho_i$  la curvatura di  $\Gamma_n$  in  $P_i$  e con  $\tau_i$  l'angolo che la  $\Gamma_n$  forma in  $P_i$  con  $r$ . Per il teorema di Reiss si ha <sup>(2)</sup>

$$(4) \quad \sum_i^n \frac{1}{\rho_i \sin^3 \tau_i} = 0.$$

Calcoliamo la curvatura di  $\Gamma_n$  in  $P_i$ . Indicando con  $\sigma_i$  l'angolo fra 0 e  $\pi$  che la direzione positiva della normale a  $\Gamma_n$  forma con la direzione positiva della normale alla superficie e con  $[I/R_\varphi]_{P_i}$  il valore con segno della curvatura della sezione normale tangente a  $\Gamma_n$  in  $P_i$ , si ha

$$(5) \quad \frac{\cos \sigma_i}{\rho_i} = \frac{\left[ L_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \right)^2 + 2 M_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} + N_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right)^2 \right]}{\left[ E_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \right)^2 + 2 F_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} + G_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right)^2 \right]_{P_i}} = - \left[ \frac{I}{R_\varphi} \right]_{P_i}.$$

Se  $\nabla_i \varphi$  indica il parametro differenziale primo calcolato rispetto alla forma  $\Sigma dx_i^2$ , si ha inoltre

$$(6) \quad [\nabla_i \varphi]_{P_i} = \cos^2 \sigma_i, \quad \sin \tau_i = \frac{\cos \omega_i}{\cos \sigma_i} \quad (\cos \omega_i = \mathbf{N}_i \times \mathbf{r}).$$

Mediante le (5) e (6), dalla (4) si deduce la seguente relazione che è valida qualunque sia il piano  $\theta$  passante per la retta  $r$

$$(7) \quad \sum_i^n \frac{1}{\cos^3 \omega_i} \left[ \frac{\nabla_i \varphi}{R_\varphi} \right]_{P_i} = 0.$$

(2) L'espressione di  $1/\rho \sin^3 \tau$  si estende ovviamente nel campo analitico complesso.

Fissati due piani  $\chi = d_1$  e  $\psi = d_2$  passanti per  $r$  si ha

$$\varphi = \rho(\chi + \lambda\psi) \quad (\rho = \rho(\lambda), \lambda \text{ parametro}).$$

Posto

$$\frac{I}{R_{\chi, \psi}} = - \frac{L_i \frac{\partial \chi}{\partial v_i} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} - M_i \left( \frac{\partial \chi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} + \frac{\partial \chi}{\partial v_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right) + N_i \frac{\partial \chi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i}}{E_i \frac{\partial \chi}{\partial v_i} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} - F_i \left( \frac{\partial \chi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial v_i} + \frac{\partial \chi}{\partial v_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right) + G_i \frac{\partial \chi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i}}$$

e, indicando con  $\nabla_i(\chi, \psi)$  il parametro differenziale primo misto di  $\chi$  e  $\psi$  calcolato rispetto alla forma  $\Sigma dx_i^2$ , dalla (7) si ricava

$$(8) \quad \sum_i^n \frac{I}{\cos^3 \omega_i} \left( \frac{\nabla_i \chi}{R_\chi} + 2\lambda \frac{\nabla_i(\chi, \psi)}{R_{\chi, \psi}} + \lambda^2 \frac{\nabla_i \psi}{R_\psi} \right)_{P_i} = 0.$$

Quest'ultima relazione deve sussistere qualunque sia il piano  $\theta$  per  $r$ , ossia qualunque sia  $\lambda$ , e perciò si ha

$$(9) \quad \sum_i^n \frac{I}{\cos^3 \omega_i} \left[ \frac{\nabla_i \chi}{R_\chi} \right]_{P_i} = 0, \quad \sum_i^n \frac{I}{\cos^3 \omega_i} \left[ \frac{\nabla_i(\chi, \psi)}{R_{\chi, \psi}} \right]_{P_i} = 0,$$

$$\sum_i^n \frac{I}{\cos^3 \omega_i} \left[ \frac{\nabla_i \psi}{R_\psi} \right]_{P_i} = 0.$$

Viceversa, attraverso la (8), si vede che la relazione (7) è conseguenza di queste ultime. Si ritrova così il teorema del Bompiani:

*Tre sole delle infinite relazioni che si deducono dalla (7) sono indipendenti.*

Al termine generale della somma che compare al primo membro della (7) può essere data un'altra forma. Supponendo gli  $n$  intorni  $\Sigma_i$  riferiti alle asintotiche, con le notazioni dell'introduzione si ha

$$\left( \frac{\nabla_i \varphi}{R_\varphi} \right)_{P_i} = \left( \frac{2 M_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial v_i}}{E_i G_i - F_i^2} \right)_{P_i},$$

$$\left( \frac{2 M_i F_i}{E_i G_i - F_i^2} \right)_{P_i} = H_i, \quad \left( \frac{F_i}{\sqrt{E_i G_i}} \right)_{P_i} = \mathbf{a}_{1i} \times \mathbf{a}_{2i}$$

$$\left( \frac{I}{\sqrt{E_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right)_{P_i} = \mathbf{a}_{1i} \times \mathbf{v}, \quad \left( \frac{I}{\sqrt{G_i}} \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} \right)_{P_i} = \mathbf{a}_{2i} \times \mathbf{v}.$$

Perciò la (7) diviene

$$\sum_i^n \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} \frac{(\mathbf{a}_{1i} \times \mathbf{v})(\mathbf{a}_{2i} \times \mathbf{v})}{\mathbf{a}_{1i} \times \mathbf{a}_{2i}} = 0.$$

## § 2. — DIMOSTRAZIONE DELLE RELAZIONI (2) e (3).

Siano  $\chi = d_1$ ,  $\psi = d_2$ ,  $\eta = d_3$  le equazioni normali di tre piani mutuamente perpendicolari passanti per un punto  $P$  di una qualunque superficie

S. Se  $H$  indica la curvatura media di  $S$  nel punto  $P$  si verifica immediatamente che

$$(10) \quad \left( \frac{\nabla \chi}{R_\chi} + \frac{\nabla \psi}{R_\psi} + \frac{\Delta \eta}{R_\eta} \right)_P = H \quad (3).$$

Calcoliamo ora la (10) nei punti in cui la retta  $r$ , comune ai due piani  $\chi = d_1$  e  $\psi = d_2$ , incontra una superficie algebrica  $F_n$  di ordine  $n$ . Dalla (7) si ricava allora

$$\sum_i^n \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} = \sum_i^n \frac{1}{\cos^3 \omega_i} \left( \frac{\nabla_i \eta}{R_\eta} \right)_{P_i},$$

e con una trasformazione analoga a quella usata alla fine del numero precedente otteniamo

$$\sum_i^n \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} = \sum_i^n \frac{H_i}{\cos^3 \omega_i} \frac{(\mathbf{a}_{1i} \times \mathbf{r})(\mathbf{a}_{2i} \times \mathbf{r})}{\mathbf{a}_{1i} \times \mathbf{a}_{2i}}.$$

Siano  $\chi = d_1$  e  $\psi = d_2$  le equazioni normali di due piani perpendicolari passanti per un punto  $P$  di una superficie qualunque. Se  $K$  indica la curvatura totale di  $S$  in  $P$  e  $\omega$  l'angolo che la retta  $r$ , comune ai due piani forma con la normale alla superficie in  $P$ , si verifica facilmente che

$$(11) \quad \left[ \frac{\nabla \chi}{R_\chi} \frac{\nabla \psi}{R_\psi} - \left( \frac{\nabla(\chi, \psi)}{R_{\chi, \psi}} \right)^2 \right]_P = K \cos^2 \omega \quad (4).$$

Dalle (9), tenendo conto della (11), si ricava allora la relazione

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{\cos^4 \omega_1} &= \sum_i^n \frac{K_i}{\cos^4 \omega_i} + \\ &+ \sum_{i+j}^n \frac{1}{\cos^3 \omega_i \cos^3 \omega_j} \left\{ \left( \frac{\nabla_i \chi}{R_\chi} \right)_{P_i} \left( \frac{\nabla_j \psi}{R_\psi} \right)_{P_j} - \left( \frac{\nabla_i(\chi, \psi)}{R_{\chi, \psi}} \right)_{P_i} \left( \frac{\nabla_j(\chi, \psi)}{R_{\chi, \psi}} \right)_{P_j} \right\}, \end{aligned}$$

che è stata data dal Bompiani e che *permette il calcolo della curvatura in un centro, note le calotte rimanenti e il piano tangente in quello.*

(3) Si supponga infatti che il punto  $P$  sia l'origine degli assi coordinati, che i piani  $\chi = d_1$ ,  $\psi = d_2$ ,  $\eta = d_3$  siano i piani  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , e che la superficie  $S$  sia riferita alle asintotiche. Si ha allora

$$\left( \frac{\nabla \chi}{R_\chi} + \frac{\nabla \psi}{R_\psi} + \frac{\nabla \eta}{R_\eta} \right)_P = \left[ \frac{2M \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)}{EG - F^2} \right]_P = \left( \frac{2MF}{EG - F^2} \right)_P = H.$$

(4) Si supponga infatti che il punto  $P$  sia l'origine degli assi coordinati, che i piani  $\chi = d_1$  e  $\psi = d_2$  siano i piani  $x = 0$  e  $y = 0$  e che la superficie sia riferita alle asintotiche. Si ha allora

$$\left[ \frac{\nabla \chi}{R_\chi} \frac{\nabla \psi}{R_\psi} - \left( \frac{\nabla(\chi, \psi)}{R_{\chi, \psi}} \right)^2 \right]_P = \left[ - \frac{M^2}{EG - F^2} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right]_P = K \cos^2 \omega.$$

Da questa relazione si perviene alla (3) con semplici calcoli tenendo conto che sussistono le tre relazioni

$$\frac{\nabla \chi}{R_\chi} = \frac{H}{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{v}_1) (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{v}_1) \quad , \quad \frac{\nabla \psi}{R_\psi} = \frac{H}{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{v}_2) (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{v}_2)$$

$$\frac{\nabla (\chi, \psi)}{R_{\chi, \psi}} = \frac{1}{2} \frac{H}{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2} \{ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{v}_1 (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{v}_2) + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{v}_2) (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{v}_1) \},$$

ove  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono due versori perpendicolari alla retta  $r$  e perpendicolari fra loro.

**Geometria.** — *Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana.* Nota di ENZO MARTINELLI, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Le metriche kähleriane in una varietà a struttura complessa  $V_{2n}$  sono quelle che — si può dire con linguaggio sintetico — rispettano completamente i caratteri infinitesimali intrinseci determinati in  $V_{2n}$  dalla struttura complessa <sup>(1)</sup>. Tali caratteri sono legati essenzialmente alle *faccette caratteristiche* piane di  $V_{2n}$ , immagini reali degli elementi lineari complessi della  $\mathcal{Q}_n$  complessa di cui  $V_{2n}$  è immagine reale. Ricordiamo, in particolare, che la connessione definita da una metrica kähleriana conserva le *faccette caratteristiche*.

Si capisce che, in conseguenza, lo studio delle proprietà essenziali di curvatura entro una varietà kähleriana dovrebbe potersi fare considerando le singole faccette caratteristiche come qualcosa di indecomponibile, senza porre mente cioè agli  $\infty^1$  elementi lineari che compongono di fatto una tal faccetta. In questo lavoro si dà un esempio in proposito, studiando secondo l'accennato punto di vista la curvatura di una *superficie caratteristica*  $S_2$  di  $V_{2n}$ , cioè superficie immagine reale di una curva analitica complessa  $\mathcal{S}_1$  di  $\mathcal{Q}_n$ .

Per una tal superficie  $S_2$  introduco una speciale nozione di curvatura, che denomino *curvatura caratteristica* ed indico con  $K_c$ , dipendente soltanto dalle faccette caratteristiche tangenti ad  $S_2$  ed esprimente in sostanza la velocità di deviazione di tali faccette per uno spostamento sulla superficie (in senso analogo a quello secondo il quale la curvatura di una linea reale esprime la velocità di deviazione della tangente).

La curvatura caratteristica risulta legata in modo molto semplice alla curvatura relativa  $K_r$  di  $S_2$  entro  $V_{2n}$ , cioè alla differenza  $K_r = K_i - K_e$  tra la curvatura interna o gaussiana,  $K_i$ , di  $S_2$  in un suo punto  $P$  e la curvatura esterna o riemanniana,  $K_e$ , dell'ambiente  $V_{2n}$  in corrispondenza alla faccetta tangente in  $P$  ad  $S_2$ . Dimostro invero che si ha:  $K_r = -K_c$ . In par-

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) Cfr. E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, « Annali di Mat. », in corso di stampa. A questo lavoro ci riferiamo per la terminologia e per varie proprietà ricordate in seguito.

icolare, quando  $V_{2n}$  si riduca allo spazio euclideo  $E_{2n}$ , si annulla  $K_z$  e la relazione precedente diviene  $K_i = -K_z^2$ , donde segue che la curvatura gaussiana di una superficie caratteristica dello  $E_{2n}$  non può mai essere positiva<sup>(2)</sup>.

2. Supponiamo la varietà a struttura complessa  $V_{2n}$  descritta localmente mediante le coordinate isotrope  $z^\alpha, z^{\alpha*}$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ), ottenendosi i punti reali di  $V_{2n}$  per  $z^{\alpha*} = \overline{z^\alpha}$  (dove con barra s'indica il valore complesso coniugato). In  $V_{2n}$  sia assegnata la metrica pseudoconforme (o hermitiana) definita positiva:

$$(1) \quad ds^2 = 2g_{\alpha\beta*} dz^\alpha dz^{\beta*} \quad (g_{\beta\alpha*} = \overline{g_{\alpha\beta*}}),$$

che supponiamo soddisfacente alla condizione di Kähler. Tal condizione può esprimersi con l'annullarsi dei coefficienti della connessione seguenti:

$$(2) \quad \Gamma_{\beta* \gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta \gamma*}^\alpha = \Gamma_{\beta* \gamma*}^\alpha = \Gamma_{\beta \gamma}^{\alpha*} = \Gamma_{\beta \gamma}^{\alpha*} = \Gamma_{\beta \gamma}^{\alpha*} = 0,$$

cosicché gli unici coefficienti da considerare nel seguito sono del tipo:  $\Gamma_{\beta \gamma}^\alpha, \Gamma_{\beta* \gamma*}^{\alpha*}$ .

Una linea analitica complessa  $S_1$  nella  $\mathfrak{N}_n$  complessa è data da equazioni del tipo:

$$(3) \quad z^\alpha = f^\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$

essendo le  $f^\alpha$  funzioni analitiche della variabile complessa  $t$ . Per avere, in coordinate isotrope entro  $V_{2n}$ , la rappresentazione della corrispondente superficie caratteristica  $S_2$ , non v'è che da aggiungere alle (3) le equazioni complesse coniugate:

$$(4) \quad z^{\alpha*} = f^{\alpha*}(t^*) \quad (\alpha^* = 1^*, \dots, n^*),$$

dove le  $f^{\alpha*}$  sono funzioni analitiche della variabile complessa  $t^*$ , definite per il fatto che nei punti reali di  $S_2$  ( $t^* = \bar{t}$ ) risulti:

$$(5) \quad f^{\alpha*}(\bar{t}) = \overline{f^\alpha(t)}.$$

In ogni punto di  $S_1$  c'è un elemento lineare complesso tangente, e quindi una faccetta caratteristica tangente in ogni punto di  $S_2$ . Un bivettore appartenente alla faccetta, *bivettore caratteristico*<sup>(3)</sup>, può ottenersi come prodotto esterno dei vettori tangenti  $(\partial_t f^\alpha, 0)$ ,  $(0, \partial_{t^*} f^{\alpha*})$ , o meglio (non essendo questi reali) dei vettori reali loro combinazioni lineari  $(\partial_t f^\alpha, \partial_{t^*} f^{\alpha*})$ ,  $(i\partial_t f^\alpha, -i\partial_{t^*} f^{\alpha*})$ . Si ottengono così per il bivettore caratteristico le componenti contravarianti:

$$(6) \quad q^{\alpha\beta*} = 2i\partial_t f^\alpha \partial_{t^*} f^{\beta*}, \quad q^{\alpha* \beta} = -q^{\beta\alpha*}, \quad q^{\alpha\beta} = q^{\alpha* \beta*} = 0.$$

(2) I risultati di questo lavoro hanno trovato posto in un seminario per il Centro Internazionale Matematico Estivo da me tenuto a Varenna nel settembre 1956, e che apparirà prossimamente, in edizione ciclostilata presso l'Istituto Matematico dell'Università di Roma, nel ciclo dedicato alla «Teoria delle funzioni di più variabili complesse».

(3) Cfr. il mio lavoro cit. al n. 1.

3. Ciò premesso, si presenta spontanea l'idea di definire nel modo seguente, per la superficie caratteristica  $S_2$ , uno scalare positivo analogo alla curvatura di una linea.

Sia  $P$  un punto di  $S_2$  e  $P'$  un punto prossimo della superficie stessa. Indichiamo con  $\Delta\varphi$  la deviazione angolare *assoluta* che subisce la faccetta caratteristica tangente ad  $S_2$  nel passaggio da  $P$  a  $P'$ , e con  $\Delta s$  la lunghezza dell'arco  $PP'$ . Definiamo allora *curvatura caratteristica* di  $S_2$  in  $P$ , che denotiamo con  $K_c$ , l'espressione:

$$(7) \quad K_c = \lim_{P' \rightarrow P} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

La (7) necessita di qualche commento. In primo luogo ricordiamo <sup>(4)</sup> che, in un ambiente euclideo, si definisce l'angolo  $\varphi$  di due faccette per esempio piane (come nel caso attuale) e determinate da due bivettori  $p, p'$  ad esse appartenenti, mediante la formula

$$(8) \quad \cos \varphi = \frac{p \times p'}{\text{mis } p \cdot \text{mis } p'},$$

ove:

$$p \times p' = \frac{1}{2} p^{ij} p'_{ij} = \sum_{i < j} p^{ij} p'_{ij}, \quad (\text{mis } p)^2 = p \times p.$$

La (8) permette di ottenere senz'altro  $\Delta\varphi$  quando la varietà kähleriana  $V_{2n}$  si riduce allo spazio euclideo  $E_{2n}$ . Nel caso generale dovrà invece intendersi  $\Delta\varphi$  come l'angolo che la faccetta tangente in  $P'$  ad  $S_2$  forma con la faccetta che si ottiene trasportando in  $P'$  per parallelismo la faccetta tangente in  $P$ , l'angolo essendo valutato rispetto alla metrica dello spazio euclideo tangente a  $V_{2n}$  in  $P'$  (o, ciò che è lo stesso, in  $P$ , trascurando infinitesimi d'ordine superiore).

Infine avvertiamo che ha senso scrivere la (7) senza precisare la direzione tangente ad  $S_2$  secondo la quale  $P'$  tende a  $P$ , perché vedremo che la parte principale dell'infinitesimo  $\Delta\varphi$ , che indicheremo con  $\delta\varphi$ , riesce proporzionale a  $ds$  secondo un fattore indipendente dalla direzione. Potremo quindi anche scrivere:

$$(9) \quad K_c = \frac{\delta\varphi}{ds}.$$

Per giungere ad una espressione di  $K_c$  più adatta al calcolo, conviene notare che la ricordata formulà (8) è suscettibile della seguente interpretazione.

Si pensino le

$$p^{ij}, \quad p_{ij} = g_{ih} g_{jk} p^{hk} = \sum_{h < k} (g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh}) p^{hk}$$

come le componenti risp. contravarianti e covarianti di un vettore dello spazio euclideo di dimensione  $\binom{2n}{2}$ , le cui coordinate siano contrassegnate dalle coppie d'indici  $ij$  ( $i < j$ ), essendo

$$g_{ij, hk} = g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh}$$

(4) Cfr. per esempio E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2<sup>ème</sup> éd. (1946), Paris, Gauthier-Villars, cap. I.

i coefficienti della metrica. Appare allora ovviamente che l'angolo  $\varphi$  fornito dalla (8) coincide con l'angolo dei due vettori immagini dei bivettori  $p, p'$ , e analogamente dicasi per le misure dei bivettori.

Ciò posto, sia  $p$  un bivettore di misura 1 definito su  $V_{2n}$ ,  $\delta\varphi$  la deviazione angolare assoluta della faccetta contenente  $p$  per lo spostamento  $PP'$ , e  $\delta p$  il corrispondente incremento assoluto di  $p$ . Poiché il vettore immagine di  $p$  ha misura 1, risulta ovviamente (a meno di infinitesimi d'ordine superiore):

$$\delta\varphi = \text{mis } \delta p.$$

Applichiamo questa osservazione alla (9). Indichiamo con  $\tilde{q}^{\alpha\beta*}$ ,  $\tilde{q}_{\alpha\beta*}$  le componenti contravarianti e covarianti del bivettore caratteristico  $\tilde{q}$  di misura unitaria appartenente ad una faccetta tangente ad  $S_2$ . Si ha allora:

$$(\text{mis } \delta\tilde{q})^2 = \delta\tilde{q}^{\alpha\beta*} \delta\tilde{q}_{\alpha\beta*};$$

quindi la (9), elevata al quadrato, diviene:

$$(10) \quad K_c^2 = \frac{\delta\tilde{q}^{\alpha\beta*} \delta\tilde{q}_{\alpha\beta*}}{ds^2}.$$

4. Esplicitiamo la (10) tenendo conto delle equazioni (3), (4) di  $S_2$ . Pon-  
gasi per comodità:

$$(11) \quad u^\alpha = \partial_t f^\alpha, \quad u^{\alpha*} = \partial_{t^*} f^{\alpha*},$$

e si ricordi che  $u^\alpha, u^{\alpha*}$  sono definite su  $S_2$  come funzioni risp. soltanto di  $t, t^*$ .  
Le (6) possono allora scriversi (limitatamente alle componenti non nulle):

$$(12) \quad q^{\alpha\beta*} = -q^{\beta* \alpha} = -2i u^\alpha u^{\beta*}.$$

Introduciamo altresì le componenti covarianti del vettore (11):

$$(13) \quad u_\alpha = g_{\alpha\gamma*} u^\gamma, \quad u_{\alpha*} = g_{\gamma\alpha*} u^\gamma,$$

e del bivettore (12):

$$(14) \quad q_{\alpha\beta*} = -q_{\beta* \alpha} = g_{\alpha\gamma*} g_{\delta\beta*} q^{\gamma\delta*} = g_{\alpha\gamma*} g_{\delta\beta*} 2i u^\delta u^{\gamma*} = 2i u_\alpha u_{\beta*}.$$

Le misure del vettore  $u$  e del bivettore  $q$  considerati risultano allora:

$$(\text{mis } u)^2 = 2 g_{\alpha\beta*} u^\alpha u^{\beta*} = 2 u^\alpha u_\alpha = 2 u^{\beta*} u_{\beta*} = 2\rho,$$

$$(\text{mis } q)^2 = q^{\alpha\beta*} q_{\alpha\beta*} = -2i u^\alpha u^{\beta*} 2i u_\alpha u_{\beta*} = 4\rho^2,$$

ove si è posto:

$$(15) \quad \rho = u^\gamma u_\gamma = u^{\gamma*} u_{\gamma*}.$$

Ne segue che le componenti del bivettore  $\tilde{q}$  di misura unitaria sono espresse dalle:

$$(16) \quad \tilde{q}^{\alpha\beta*} = \frac{1}{2\rho} q^{\alpha\beta*} = -\frac{i}{\rho} u^\alpha u^{\beta*}, \quad \tilde{q}_{\alpha\beta*} = \frac{1}{2\rho} q_{\alpha\beta*} = \frac{i}{\rho} u_\alpha u_{\beta*}.$$

Differenziando assolutamente le (15) si ha:

$$(17) \quad \delta \rho = u^\gamma \delta u_\gamma + u_\gamma \delta u^\gamma = u^{\gamma*} \delta u_{\gamma*} + u_{\gamma*} \delta u^{\gamma*},$$

dove si noti che risulta:

$$(18) \quad \begin{cases} u^\gamma \delta u_\gamma = u^\gamma \delta (g_{\gamma\epsilon*} u^{\epsilon*}) = g_{\gamma\epsilon*} u^\gamma \delta u^{\epsilon*} = u_{\epsilon*} \delta u^{\epsilon*} \\ u_\gamma \delta u^\gamma = u_\gamma \delta (g^{\gamma\epsilon*} u_{\epsilon*}) = g^{\gamma\epsilon*} u_\gamma \delta u_{\epsilon*} = u^{\epsilon*} \delta u_{\epsilon*}. \end{cases}$$

Ciò posto possiamo passare al calcolo del 2° membro della (10). Viene dalle (16):

$$\delta \tilde{q}^{\alpha\beta*} = -\frac{i}{\rho^2} [(u^\alpha \delta u^{\beta*} + u^{\beta*} \delta u^\alpha) \rho - u^\alpha u^{\beta*} \delta \rho]$$

$$\delta \tilde{q}_{\alpha\beta*} = -\frac{i}{\rho^2} [(u_\alpha \delta u_{\beta*} + u_{\beta*} \delta u_\alpha) \rho - u_\alpha u_{\beta*} \delta \rho];$$

quindi, tenuto conto delle (15), (17), (18):

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{\alpha\beta*} \delta \tilde{q}_{\alpha\beta*} &= \frac{1}{\rho^4} [(u^\alpha u_\alpha \delta u^{\beta*} \delta u_{\beta*} + u^\alpha \delta u_\alpha u_{\beta*} \delta u^{\beta*} + u_\alpha \delta u^\alpha u^{\beta*} \delta u_{\beta*} + u^{\beta*} u_{\beta*} \delta u^\alpha \delta u_\alpha) \rho^2 - \\ &\quad - (u^\alpha u_\alpha u_{\beta*} \delta u^{\beta*} + u^{\beta*} u_{\beta*} u_\alpha \delta u^\alpha + u^\alpha u_\alpha u^{\beta*} \delta u_{\beta*} + u^{\beta*} u_{\beta*} u^\alpha \delta u_\alpha) \rho \delta \rho + \\ &\quad + u^\alpha u_\alpha u^{\beta*} u_{\beta*} (\delta \rho)^2] \\ &= \frac{1}{\rho^4} [\{ \rho \delta u^{\beta*} \delta u_{\beta*} + (u^\alpha \delta u_\alpha)^2 + (u_\alpha \delta u^\alpha)^2 + \rho \delta u^\alpha \delta u_\alpha \} \rho^2 - \\ &\quad - 2 \rho^2 (\delta \rho)^2 + \rho^2 (\delta \rho)^2]. \end{aligned}$$

D'altronde è anche:

$$\delta u^{\beta*} \delta u_{\beta*} = \delta (g^{\alpha\beta*} u_\alpha) \delta (g_{\gamma\beta*} u^\gamma) = g^{\alpha\beta*} g_{\gamma\beta*} \delta u_\alpha \delta u^\gamma = \delta u_\gamma \delta u^\gamma,$$

cosicchè si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{q}^{\alpha\beta*} \delta \tilde{q}_{\alpha\beta*} &= \frac{1}{\rho^4} [\{ 2 \rho \delta u^\alpha \delta u_\alpha + (\delta \rho)^2 - 2 u^\alpha \delta u_\alpha u_{\beta*} \delta u^{\beta*} \} \rho^2 - \rho^2 (\delta \rho)^2] \\ &= \frac{2}{\rho^2} [u^{\beta*} u_{\beta*} \delta u^\alpha \delta u_\alpha - u^\alpha \delta u_\alpha u_{\beta*} \delta u^{\beta*}], \end{aligned}$$

o infine:

$$(19) \quad \delta \tilde{q}^{\alpha\beta*} \delta \tilde{q}_{\alpha\beta*} = \frac{2}{\rho^2} \begin{pmatrix} \delta u^\gamma \\ u^\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_\epsilon \\ u_\epsilon \end{pmatrix},$$

dove, nell'ultima espressione, si simboleggia il prodotto di due matrici eseguito per orizzontali <sup>(5)</sup>.

(5) Si poteva ottenere un'espressione analoga sostituendo gl'indici a secondo membro con indici asteriscati.

Osserviamo ora che, avendo supposto la metrica di  $V_{2n}$  kähleriana, sono valide le (2) e quindi risulta:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta u^\alpha &= du^\alpha + \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha u^\gamma dz^\epsilon = (\partial_{tt} f^\alpha + \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha \partial_t f^\gamma \partial_t f^\epsilon) dt \\ \delta u_\beta &= \delta (g_{\beta\alpha^*} u^{\alpha^*}) = g_{\beta\alpha^*} \delta u^{\alpha^*} = g_{\beta\alpha^*} (du^{\alpha^*} + \Gamma_{\gamma^*\epsilon^*}^{\alpha^*} u^{\gamma^*} dz^{\epsilon^*}) \\ &= g_{\beta\alpha^*} (\partial_{t^*t^*} f^{\alpha^*} + \Gamma_{\gamma^*\epsilon^*}^{\alpha^*} \partial_{t^*} f^{\gamma^*} \partial_{t^*} f^{\epsilon^*}) dt^*, \end{aligned} \right.$$

e potremo anche scrivere:

$$\delta u^\alpha = \frac{\delta u^\alpha}{dt} dt, \quad \delta u_\beta = \frac{\delta u_\beta}{dt^*} dt^*,$$

simboleggiando con  $\delta u^\alpha/dt$ ,  $\delta u_\beta/dt^*$  derivate semi-intrinseche il cui valore esplicito risulta dalle (20) ed è:

$$(21) \quad \frac{\delta u^\alpha}{dt} = \partial_{tt} f^\alpha + \Gamma_{\gamma\epsilon}^\alpha \partial_t f^\gamma \partial_t f^\epsilon, \quad \frac{\delta u_\beta}{dt^*} = g_{\beta\alpha^*} (\partial_{t^*t^*} f^{\alpha^*} + \Gamma_{\gamma^*\epsilon^*}^{\alpha^*} \partial_{t^*} f^{\gamma^*} \partial_{t^*} f^{\epsilon^*}).$$

Si ha perciò:

$$(19') \quad \delta \ddot{q}^{\alpha\beta^*} \delta \ddot{q}_{\alpha\beta^*} = \frac{2}{\rho^2} \left( \frac{\delta u^\gamma}{dt} \right) \left( \frac{\delta u_\epsilon}{dt^*} \right) dt dt^*.$$

D'altra parte il  $ds^2$  sulla superficie caratteristica  $S_2$  risulta:

$$ds^2 = 2 g_{\alpha\beta^*} dz^\alpha dz^{\beta^*} = 2 g_{\alpha\beta^*} u^\alpha u^{\beta^*} dt dt^* = 2 u^\alpha u_\alpha dt dt^*,$$

cioè:

$$(22) \quad ds^2 = 2 \rho dt dt^*;$$

onde la (10) diviene finalmente:

$$(23) \quad K_c = \frac{1}{(u^\gamma u_\gamma)^3} \left( \frac{\delta u^\alpha}{dt} \right) \left( \frac{\delta u_\beta}{dt^*} \right).$$

Come vedesi l'espressione infine ottenuta per  $K_c$  risulta, secondo si era preannunciato (n. 3), indipendente dalla direzione secondo la quale il punto  $P'$  tende al punto  $P$  su  $S_2$ , giacché la (23) è appunto indipendente dai valori dei differenziali  $dt$ ,  $dt^*$ .

5. Ci chiediamo ora quali relazioni sussistano tra la curvatura caratteristica  $K_c$  e le altre curvature note per la superficie  $S_2$ .

Per rispondere alla domanda, supponiamo dapprima che  $V_{2n}$  si riduca allo spazio euclideo  $E_{2n}$ , cioè si abbia:

$$ds^2 = \sum_\alpha dz^\alpha dz^{\alpha^*},$$

cosicché:

$$g_{\alpha\beta^*} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta},$$

indicando con  $\delta_{\alpha\beta}$  il simbolo di Kronecker.

In tal caso le derivate semi-intrinseche (21) si riducono a derivate ordinarie e risulta inoltre

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta^*} u^{\beta^*} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} u^{\beta^*} = \frac{1}{2} u^{\alpha^*} = \frac{1}{2} \partial_{t^*} f^{\alpha^*}.$$

Si noti che nel caso attuale  $u^\alpha$  risulta funzione della sola  $t$  e  $u_\alpha$  della sola  $t^*$ .

La (23) può dunque ora scriversi:

$$(24) \quad K_c^2 = \frac{1}{(u^\gamma u_\gamma)^3} \begin{pmatrix} \partial_t u^\alpha \\ u^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{t^*} u_\beta \\ u_\beta \end{pmatrix},$$

o più esplicitamente, tenuto anche conto delle (5),

$$(24') \quad K_c^2 = \frac{2}{\left( \sum_\gamma \left| \frac{df^\gamma}{dt} \right|^2 \right)^3} \begin{pmatrix} \frac{d^2 f^\alpha}{dt^2} \\ \frac{df^\alpha}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 \overline{f^\alpha}}{dt^2} \\ \frac{d\overline{f^\alpha}}{dt} \end{pmatrix}.$$

D'altra parte il  $ds^2$  su  $S_2$  è sempre dato dalla (22), cosicché la curvatura gaussiana di  $S_2$  risulta espressa dalla:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{\rho} \partial_{t^*} \log \rho = -\frac{1}{\rho^3} (\rho \partial_{t^*} \rho - \partial_t \rho \partial_{t^*} \rho) \\ &= -\frac{1}{(u^\gamma u_\gamma)^3} [u^\gamma u_\gamma \partial_t u^\alpha \partial_{t^*} u_\alpha - u_\alpha \partial_t u^\alpha u^\beta \partial_{t^*} u_\beta]. \end{aligned}$$

Quindi, confrontando con la (24), si ha la relazione seguente *valida nello  $E_{2n}$  euclideo*:

$$(25) \quad K = -K_c^2.$$

6. Possiamo ottenere la generalizzazione della (25) al caso di un ambiente  $V_{2n}$  dotato di metrica kähleriana qualunque senza calcoli.

Si indichi con  $K_i$  la *curvatura interna* o gaussiana in un punto P di una superficie immersa in un ambiente riemanniano e con  $K_e$  la *curvatura esterna* o riemanniana dell'ambiente in corrispondenza alla faccetta tangente in P alla superficie. È noto <sup>(6)</sup> che la differenza

$$(26) \quad K_i - K_e = K_r,$$

la quale dicesi *curvatura relativa* della superficie in P, dipende soltanto dai valori in P dei simboli di Christoffel concernenti la metrica dell'ambiente.

Sostituiamo allora la metrica di  $V_{2n}$  con una metrica euclidea *osculatrice* in P (cioè dotata degli stessi valori in P per i coefficienti e per i simboli di

(6) Cfr. E. CARTAN, op. cit., p. 194.

Christoffel) e indichiamo con  $K'_i, K'_e, K'_r, K'_c$  i valori delle corrispondenti curvatures di  $S_2$  rispetto alla nuova metrica. Risulta ovviamente:

$$K'_e = 0, \quad K'_r = K_r, \quad K'_c = K_c.$$

D'altronde le (25), (26) sono applicabili alle curvatures indicate con apice, cioè si ha:

$$K'_i = -K'^2_c = -K^2_c, \quad K'_i - 0 = K'_r = K_r.$$

Quindi la (25) si generalizza nella relazione seguente:

$$K_r = -K^2_c,$$

valida in una  $V_{2n}$  kähleriana qualunque.

**Geometria.** — *Su particolari deformazioni infinitesime di superficie rigate.* Nota di GIACOMO SABAN, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. In una Nota precedente, essenzialmente rivolta all'esame di proprietà di curve sferiche chiuse [1], sono state ottenute due equazioni scalari, contenenti quantità duali, valide per quelle deformazioni infinitesime di superficie rigate che ne conservano l'elemento d'arco sferico duale [2]. Queste due equazioni, il cui contenuto geometrico è qui maggiormente messo in evidenza, vengono applicate ad alcuni casi particolari.

2. Sia  $\mathcal{R}$  una superficie rigata e  $\mathcal{G}_1 = g_1 + \varepsilon g_{10} = \mathcal{G}_1(s)$  il versore duale della generatrice generica  $G$ :  $g_1$  ne denoti il versore,  $s$  l'arco dell'indicatrice sferica delle generatrici,  $\mathfrak{I}$ , e  $g_{10} = I \wedge g_1$ , ove  $I = I(s)$  traccia la linea di stringimento,  $\mathfrak{Q}$ , di  $\mathcal{R}$ . Detto  $p = p(s)$  il parametro distributore della rigata, il suo *elemento d'arco sferico duale* è definito dalla relazione

$$(1) \quad d\mathcal{G}_1^2 = (1 + \varepsilon p)^2 ds^2 = dS^2$$

e sussistono le formule di derivazione

$$(2) \quad \frac{d\mathcal{G}_1}{dS} = \mathcal{G}_2, \quad \frac{d\mathcal{G}_2}{dS} = -\mathcal{G}_1 + \Sigma \mathcal{G}_3, \quad \frac{d\mathcal{G}_3}{dS} = -\Sigma \mathcal{G}_2$$

ove  $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$  e  $\Sigma$  sono rispettivamente il versore duale normale ad  $\mathcal{R}$  nel punto centrale di  $G$ , il versore duale della tangente ad  $\mathcal{R}$  ortogonale a  $G$  nel medesimo punto ed un invariante differenziale, detto *curvatura sferica duale*. Essendo

$$(3) \quad \Sigma = \frac{\left( \mathcal{G}_1, \frac{d\mathcal{G}_1}{dS}, \frac{d^2\mathcal{G}_1}{dS^2} \right)}{\left[ \left( \frac{d\mathcal{G}_1}{dS} \right)^2 \right]^{3/2}} = \sigma + \varepsilon \sigma_0,$$

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

si verifica facilmente che  $\sigma$  è la curvatura sferica o geodetica di  $\mathfrak{J}$ . Infine, ponendo

$$(4) \quad \frac{\left(\mathfrak{G}_1, \frac{d\mathfrak{G}_1}{dS}, \frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dS^2}\right)}{\left(\frac{d\mathfrak{G}_1}{dS}\right)^2} = \sigma + \varepsilon q_0,$$

si ha

$$(5) \quad \Sigma = \frac{\sigma + \varepsilon q_0}{1 + \varepsilon p} = \sigma + \varepsilon (q_0 - \sigma p).$$

3. Si consideri ora, assieme alla funzione vettoriale duale

$$(6) \quad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_1(s)$$

che rappresenta la  $\mathfrak{R}$ , la funzione vettoriale duale

$$(7) \quad \mathfrak{G}_1^* = \mathfrak{G}_1 + \eta \delta \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_1(s)$$

rappresentante una rigata  $\mathfrak{R}^*$ , ove  $\eta$  è un infinitesimo del primo ordine e  $\delta \mathfrak{G}_1$  soddisfa alla

$$(8) \quad \mathfrak{G}_1 \cdot \delta \mathfrak{G}_1 = 0.$$

Sia inoltre

$$(9) \quad \frac{d\mathfrak{G}_1}{ds} \cdot \frac{d}{ds} \delta \mathfrak{G}_1 = 0;$$

in tal caso si ha

$$(10) \quad dS^{*2} = d\mathfrak{G}_1^{*2} = d\mathfrak{G}_1^2 = dS^2,$$

cioè la deformazione infinitesima  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^*$  conserva l'elemento sferico duale di  $\mathfrak{R}$ . Segue allora dalla (1) che *le deformazioni rappresentate dalla (7), con le ipotesi (8) e (9), conservano l'elemento d'arco dell'indicatrice ed il parametro distributore della rigata.*

Si è dimostrato altrove che per siffatte deformazioni di  $\mathfrak{R}$  sussistono le due seguenti equazioni duali:

$$(11) \quad \frac{d}{ds} (\mathfrak{G}_3 \cdot \delta \mathfrak{G}_2) = - (\mathfrak{G}_3 \cdot \delta \mathfrak{G}_1) + \delta \Sigma,$$

$$(12) \quad \frac{d}{ds} (\mathfrak{G}_2 \cdot \delta \mathfrak{G}_1) = \Sigma (\mathfrak{G}_3 \cdot \delta \mathfrak{G}_1).$$

Queste, tenuto conto delle (1) e (5), si decompongono ciascuna in due equazioni reali, dando luogo complessivamente al sistema

$$(13) \quad \frac{d}{ds} (g_3 \cdot \delta g_2) = \delta \sigma - (g_3 \cdot \delta g_1),$$

$$(14) \quad \frac{d}{ds} (g_2 \cdot \delta g_1) = \sigma (g_3 \cdot \delta g_1),$$

$$(15) \quad \frac{d}{ds} (g_{30} \cdot \delta g_2 + g_3 \cdot \delta g_{20}) = \delta q_0 - p (g_3 \cdot \delta g_1) - (g_{30} \cdot \delta g_1 + g_3 \cdot \delta g_{10}),$$

$$(16) \quad \frac{d}{ds} (g_{20} \cdot \delta g_1 + g_2 \cdot \delta g_{10}) = q_0 (g_3 \cdot \delta g_1) + \sigma (g_{30} \cdot \delta g_1 + g_3 \cdot \delta g_{10}).$$

Qualora la superficie rigata  $\mathcal{R}$  sia *chiusa* [3], si potrà integrare questo sistema lungo l'indicatrice sferica (chiusa)  $\mathfrak{J}$ , ottenendo le quattro formule seguenti

$$(17) \quad \oint_{\mathfrak{J}} \delta \sigma \, ds = \oint_{\mathfrak{J}} (g_3 \cdot \delta g_1) \, ds,$$

$$(18) \quad \oint_{\mathfrak{J}} \sigma (g_3 \cdot \delta g_1) \, ds = 0$$

$$(19) \quad \oint_{\mathfrak{J}} \delta q_0 \, ds = \oint_{\mathfrak{J}} p (g_3 \cdot \delta g_1) \, ds - \oint_{\mathfrak{J}} (g_{30} \cdot \delta g_1 + g_3 \cdot \delta g_{10}) \, ds,$$

$$(20) \quad \oint_{\mathfrak{J}} q_0 (g_3 \cdot \delta g_1) \, ds = - \oint_{\mathfrak{J}} \sigma (g_{30} \cdot \delta g_1 + g_3 \cdot \delta g_{10}) \, ds.$$

Queste si semplificano notevolmente se ad  $\mathcal{R}$  si impone di essere sviluppabile o a piano direttore, avendosi nel primo caso  $p = 0$  e nel secondo  $\sigma = 0$ .

4. Si considerino ora quelle deformazioni infinitesime di superficie rigate chiuse che ne conservano l'indicatrice sferica, assieme al parametro distributore. Alle ipotesi (8) e (9) bisognerà quindi aggiungere le

$$(21) \quad \delta g_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3);$$

essendo

$$(22) \quad g_{i0} = \mathfrak{l} \wedge g_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

avremo allora

$$(23) \quad \delta g_{i0} = \delta \mathfrak{l} \wedge g_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

per cui le (13) e (14) risultano identicamente soddisfatte, ciascuno dei loro termini essendo nullo, e le (15) e (16) diventano

$$(24) \quad d(\delta \mathfrak{l} \cdot g_1) = \delta q_0 \, ds + (\delta \mathfrak{l} \cdot g_2) \, ds,$$

$$(25) \quad d(\delta \mathfrak{l} \cdot g_3) = -\sigma (\delta \mathfrak{l} \cdot g_2) \, ds.$$

Integrando lungo  $\mathfrak{J}$ , si ottiene il teorema seguente: *nelle deformazioni infinitesime di superficie rigate chiuse tali che, assieme al parametro distributore, si conservi l'indicatrice sferica delle generatrici, sussistono le relazioni integrali*

$$(26) \quad \oint_{\mathfrak{J}} \delta q_0 \, ds + \oint_{\mathfrak{J}} (\delta \mathfrak{l} \cdot g_2) \, ds = 0,$$

$$(27) \quad \oint_{\mathfrak{J}} \sigma (\delta \mathfrak{l} \cdot g_2) \, ds = 0.$$

5. Quale ulteriore applicazione delle (13)-(16), si considerino le deformazioni infinitesime di  $\mathcal{R}$  che ne lasciano rigida la linea di stringimento  $\mathcal{L}$ . In tal caso si avrà

$$(28) \quad \delta \mathfrak{l} = 0$$

e quindi dalle (22) si dedurrà

$$(29) \quad \delta g_{i0} = l \wedge \delta g_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Inoltre

$$(30) \quad g_{i0} \cdot \delta g_j + g_i \cdot \delta g_{j0} = (l, g_i, \delta g_j) + (g_i, l, \delta g_j) = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3),$$

per cui le (15) e (16) si riducono a

$$(31) \quad \delta q_0 - p(g_3 \cdot \delta g_1) = 0,$$

$$(32) \quad q_0(g_3 \cdot \delta g_1) = 0,$$

cioè, per rigate generiche ( $q_0 \neq 0$ ):

$$(33) \quad g_3 \cdot \delta g_1 = 0,$$

$$(34) \quad \delta q_0 = 0.$$

Tenendo conto della parte reale della (8) si ha dunque

$$(35) \quad \delta g_1 = a(s) g_2;$$

le (13) e (14) diventano così rispettivamente

$$(36) \quad \frac{d}{ds} (g_3 \cdot \delta g_2) = \delta \sigma,$$

$$(37) \quad \frac{da}{ds} = 0,$$

e forniscono  $a = k = \text{cost.}$

Conseguentemente, le deformazioni infinitesime di superficie rigate tali che si conservi il parametro distributore e si mantenga rigida la linea di stringimento sono quelle per cui

$$(38) \quad \delta g_1 = k g_2;$$

per esse conseguentemente risulta

$$(39) \quad \delta q_0 = 0.$$

La (38) mostra che tali deformazioni infinitesime si ottengono facendo ruotare ciascuna generatrice di  $\mathcal{R}$  attorno al suo punto centrale, nel piano centrale, di una medesima quantità costante; la (34) esprime invece che la quantità  $q_0$  rimane invariante sotto queste deformazioni.

Infine, supponendo la  $\mathcal{R}$ , chiusa, ed integrando la (36) si ha che per deformazioni infinitesime di superficie rigate chiuse che conservano il parametro distributore e la linea di stringimento, si ha

$$(39) \quad \oint \delta \sigma ds = 0.$$

6. Si supponga da ultimo che le flessioni infinitesime considerate lascino rigida una qualsiasi direttrice  $\mathcal{D}$  della rigata  $\mathcal{R}$ . Sia  $r$  il suo raggio vettore:

$$(40) \quad r = l(s) + u(s) g_1(s);$$

e si osservi che questo rappresenta il caso intermedio più generale, i casi trattati in precedenza corrispondendo ad  $u = \infty$  (n. 4) ed  $u = 0$  (n. 5). Rimanendo  $\mathfrak{D}$  invariante per le deformazioni sotto esame, si avrà

$$(41) \quad \delta r = \delta l + \delta u g_1 + u \delta g_1 = 0,$$

ossia

$$(42) \quad \delta l = -u \delta g_1 - \delta u g_1.$$

Si verifica facilmente che in tal caso

$$(43) \quad \delta g_{10} = (1 + u g_1) \wedge \delta g_1, \quad \delta g_{20} = 1 \wedge \delta g_2 - \delta u g_3 + u g_2 \wedge \delta g_1,$$

per cui

$$(44) \quad g_{30} \cdot \delta g_2 + g_3 \cdot \delta g_{20} = -\delta u,$$

$$(45) \quad g_{30} \cdot \delta g_1 + g_3 \cdot \delta g_{10} = u (g_2 \cdot \delta g_1),$$

$$(46) \quad g_{20} \cdot \delta g_1 + g_2 \cdot \delta g_{10} = -u (g_3 \cdot \delta g_1).$$

Consequentemente, le (15) e (16) si semplificano, riducendosi, per via delle (44)-(46), a

$$(47) \quad \frac{d}{ds} \delta u = p (g_3 \cdot \delta g_1) + u (g_2 \cdot \delta g_1) - \delta g_0$$

$$(48) \quad \frac{d}{ds} u (g_3 \cdot \delta g_1) = -q_0 (g_3 \cdot \delta g_1) - \sigma u (g_2 \cdot \delta g_1);$$

inoltre le corrispondenti formule integrali, che si ottengono introducendo le (44)-(46) nelle (17)-(20),

$$(49) \quad \oint_{\mathfrak{D}} \delta \sigma ds = \oint_{\mathfrak{D}} (g_3 \cdot \delta g_1) ds,$$

$$(50) \quad \oint_{\mathfrak{D}} \sigma (g_3 \cdot \delta g_1) ds = 0,$$

$$(51) \quad \oint_{\mathfrak{D}} \delta q_0 ds = \oint_{\mathfrak{D}} p (g_3 \cdot \delta g_1) ds + \oint_{\mathfrak{D}} u (g_2 \cdot \delta g_1) ds,$$

$$(52) \quad \oint_{\mathfrak{D}} q_0 (g_3 \cdot \delta g_1) ds = - \oint_{\mathfrak{D}} \sigma u (g_2 \cdot \delta g_1) ds,$$

sono valide per deformazioni infinitesime di superficie rigate chiuse che, oltre al parametro direttore ed all'arco della indicatrice delle generatrici, mantengono rigida una direttrice chiusa  $\mathfrak{D}$ .

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. SABAN, *Formule integrali nelle deformazioni infinitesime di curve e superficie rigate chiuse*, «Archiv. der Mathematik», in corso di stampa (1956).
- [2] K. ERIM, *Die höheren Differentialelemente einer Regelflaeche und einer Raumkurve*, «Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul», (A), vol. X, pp. 1-24, (1945).
- [3] G. SABAN, *Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle rigate*, «Accad. Naz. Lincei», Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat., ser. 8ª, vol. V, pp. 24-30 (1948); G. SABAN, *Su alcune famiglie di geodetiche*, «Rend. di Mat. e Appl.», ser. 5ª, vol. XIII, pp. 115-124 (1954).

**Meccanica.** — *Sopra alcune relazioni fra momenti del I° e II° ordine del peso elastico longitudinale di un'asta.* Nota (\*) di FILIPPO LATTANZI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

1. Consideriamo l'asta curva di asse piano OT (cfr. fig. 1) al quale sia stato assegnato il verso indicato, riferita al sistema di assi  $O(t, n)$  di origine coincidente con quella  $O$  dell'asta, e supponiamo che lungo essa ogni sezione trasversale abbia: un'asse principale d'inerzia, giacente sul piano di contenimento dell'asse dell'asta, e l'altro, normale a questo piano.

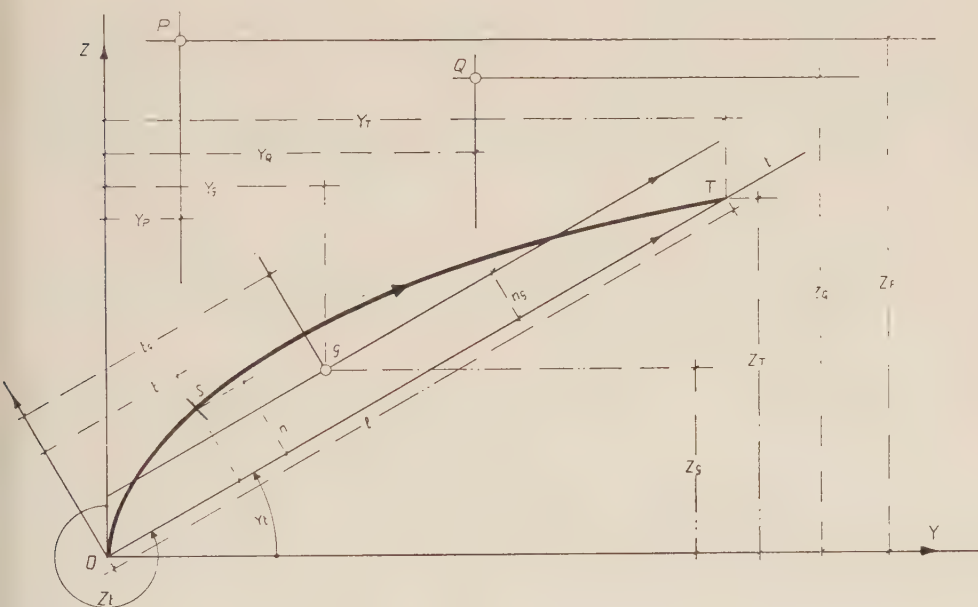


Fig. 1.

Scopo della presente Nota è riassumere le relazioni mutue fra i momenti del I e II ordine del peso elastico longitudinale dell'asta rispetto a rette giacenti sul piano  $(y, z)$ ; relazioni trascritte in forma che trovano applicazione nello studio di strutture elastiche piane iperstatiche condotto, sia con il metodo delle forze, sia con quello delle deformazioni.

2. Indicando con  $S$ , di ascissa  $t$ , una sezione trasversale generica, per l'elemento infinitesimo  $ds$  è:

$$(1) \quad d\varphi = ds/EI \quad \text{il peso elastico infinitesimo longitudinale}$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1956.

nella quale è:

I il momento d'inerzia dell'area  $\Omega$  della sezione S rispetto all'asse baricentrico normale al piano di contenimento dell'asta;

E il modulo di elasticità a compressione del materiale di cui essa si compone.

Per cui le caratteristiche elastiche dell'asta risultano (cfr. fig. 1):

$$(2) \quad \Phi = \int_0^T d\varphi \quad \text{peso elastico longitudinale totale} \quad [1/FL]$$

$$(3) \quad t_g = S^{(0)}/\Phi \quad \text{ascissa del baricentro elastico} \quad [L]$$

$$(4) \quad n_g = S'^{(0)}/\Phi \quad \text{ordinata} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad [L]$$

$$(5) \quad \mathfrak{B}_t^2 = \mathfrak{I}_t/\Phi \quad \text{raggio d'inerzia relativo alla direzione } t \text{ per } \mathfrak{S} \quad [L^2]$$

$$(6) \quad \mathfrak{B}_n^2 = \mathfrak{I}_n/\Phi \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad n \quad \text{»} \quad \text{»} \quad [L^2]$$

$$(7) \quad \mathfrak{B}_{tn}^2 = \mathfrak{I}_{tn}/\Phi \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{alle direzioni } t, n \quad \text{»} \quad \text{»} \quad [L^2].$$

Ove è:

$$(8) \quad S'^{(0)} = \int_0^T n d\varphi \quad \text{momento del I ordine di } \Phi \text{ rispetto a } t \quad [1/F]$$

$$(9) \quad S^{(0)} = \int_0^T t d\varphi \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{I} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad n \quad [1/F]$$

$$(10) \quad \mathfrak{I}_t = \int_0^T (n - n_g)^2 d\varphi \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{II} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad t \quad [L/F]$$

$$(11) \quad \mathfrak{I}_n = \int_0^T (t - t_g)^2 d\varphi \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{II} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad n \quad [L/F]$$

$$(12) \quad \mathfrak{I}_{tn} = \int_0^T (t - t_g)(n - n_g) d\varphi \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{II} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad t, n \quad [L/F]$$

### 3. Indichiamo in generale:

il momento del I ordine di  $\Phi$  relativo:

alla retta di direzione  $a$  uscente dal punto A con:  $S^a(A)$

il momento del II ordine di  $\Phi$  relativo:

alla retta di direzione  $a$  uscente dal punto A con:  $\mathfrak{I}^a(A)$

alle rette di direzione  $a, a'$  uscenti dallo stesso punto A con:  $\mathfrak{I}^{aa'}(A)$

alle rette di direzione  $a, b$  uscenti rispett. da A e B con:  $\mathfrak{I}^a(A) \delta(B)$

alle rette  $a, b$ , parallele uscenti rispett. da A e B con:  $\mathfrak{I}^a(A)(B)$ .

Seguendo poi l'uso comune chiameremo anche:  
 momento statico, il momento del I ordine  
 prodotto d'inerzia, il momento del II ordine relativo a due rette distinte.  
 momento d'inerzia, il momento del II ordine relativo a due rette coincidenti.

4. Rispetto alle direzioni  $t, n$  uscenti da  $O$  le grandezze dei momenti del I e II ordine di  $\Phi$  (questi ultimi ricavati mediante la formula di trasposizione) sono rispettivamente:

$$S^{t(o)} = n_g \Phi \quad S^{n(o)} = t_g \Phi$$

$$\mathfrak{J}^{t(o)} = (\mathfrak{B}_t^2 + n_g^2) \Phi \quad \mathfrak{J}^{n(o)} = (\mathfrak{B}_n^2 + t_g^2) \Phi \quad \mathfrak{J}^{tn(o)} = (\mathfrak{B}_{tn}^2 + t_g n_g) \Phi$$

dalle quali espressioni si passa a quelle relative ai momenti del I e II ordine rispetto agli assi  $yz$  uscenti pure da  $O$ , tenendo presente che nel sistema  $O(yz)$  le coordinate di un punto generico del piano  $o(t, n)$  ed in particolare quella del baricentro elastico  $\mathfrak{G}$  sono rispettivamente:

$$(I) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline y = t \cos \hat{y}t - n \cos \hat{z}t & y_g = t_g \cos \hat{y}t - n_g \cos \hat{z}t \\ \hline z = t \cos \hat{z}t + n \cos \hat{y}t & z_g = t_g \cos \hat{z}t + n_g \cos \hat{y}t \\ \hline \end{array}$$

Avremo quindi:

$$\begin{aligned} S_y^{(o)} &= \int_0^T z d\varphi = \int_0^T (t \cos \hat{z}t + n \cos \hat{y}t) d\varphi = S^{n(o)} \cos \hat{z}t + S^{t(o)} \cos \hat{y}t \\ &= [t_g \cos \hat{z}t + n_g \cos \hat{y}t] \Phi = z_g \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_z^{(o)} &= \int_0^T y d\varphi = \int_0^T (t \cos \hat{y}t - n \cos \hat{z}t) d\varphi = S^{n(o)} \cos \hat{y}t - S^{t(o)} \cos \hat{z}t \\ &= [t_g \cos \hat{y}t - n_g \cos \hat{z}t] \Phi = y_g \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{yz(o)} &= \int_0^T z^2 d\varphi = \int_0^T (t \cos \hat{z}t + n \cos \hat{y}t)^2 d\varphi \\ &= \mathfrak{J}^{n(o)} \cos^2 \hat{z}t + 2 \mathfrak{J}^{tn(o)} \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t + \mathfrak{J}^{t(o)} \cos^2 \hat{y}t \\ &= [(\mathfrak{B}_n^2 \cos^2 \hat{z}t + \mathfrak{B}_t^2 \cos^2 \hat{y}t + 2 \mathfrak{B}_{tn}^2 \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t) + z_g^2] \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathfrak{J}^{z^{(0)}}} &= \int_0^T y^2 d\varphi = \int_0^T (t \cos \hat{y}t - n \cos \hat{z}t)^2 d\varphi \\
 &= \mathfrak{J}^{n^{(0)}} \cos^2 \hat{y}t - 2 \mathfrak{J}^{tn^{(0)}} \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t + \mathfrak{J}^{t^{(0)}} \cos^2 \hat{z}t \\
 &= \left[ (\mathfrak{B}_n^2 \cos^2 \hat{y}t + \mathfrak{B}_t^2 \cos^2 \hat{z}t - 2 \mathfrak{B}_{tn}^2 \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t) + y_{\mathfrak{G}}^2 \right] \Phi \\
 \overline{\mathfrak{J}^{yz^{(0)}}} &= \int_0^T yz d\varphi = \int_0^T (t \cos \hat{y}t - n \cos \hat{z}t) (t \cos \hat{z}t + n \cos \hat{y}t) d\varphi \\
 &= (\mathfrak{J}^{n^{(0)}} - \mathfrak{J}^{t^{(0)}}) \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t + \mathfrak{J}^{tn^{(0)}} (\cos^2 \hat{y}t - \cos^2 \hat{z}t) \\
 &= \left[ (\mathfrak{B}_n^2 - \mathfrak{B}_t^2) \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t + \mathfrak{B}_{tn}^2 (\cos^2 \hat{y}t - \cos^2 \hat{z}t) + y_{\mathfrak{G}} z_{\mathfrak{G}} \right] \Phi
 \end{aligned}$$

e ponendo nelle precedenti:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B}_y^2 &= \mathfrak{B}_n^2 \cos^2 \hat{z}t + \mathfrak{B}_t^2 \cos^2 \hat{y}t + 2 \mathfrak{B}_{tn}^2 \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t \\
 \mathfrak{B}_z^2 &= \mathfrak{B}_n^2 \cos^2 \hat{y}t + \mathfrak{B}_t^2 \cos^2 \hat{z}t - 2 \mathfrak{B}_{tn}^2 \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t \\
 \mathfrak{B}_{yz}^2 &= (\mathfrak{B}_n^2 - \mathfrak{B}_t^2) \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t + \mathfrak{B}_{tn}^2 (\cos^2 \hat{y}t - \cos^2 \hat{z}t)
 \end{aligned}
 \tag{II}$$

(raggi d'inerzia di  $\Phi$  relativi alle direzioni  $y, z, yz$ , uscenti da  $\mathfrak{G}$ ) potremo scrivere riassumendo:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{J}^{y^{(0)}} &= z_{\mathfrak{G}} \Phi & \mathfrak{J}^{z^{(0)}} &= y_{\mathfrak{G}} \Phi \\
 \mathfrak{J}^{yz^{(0)}} &= [\mathfrak{B}_y^2 + z_{\mathfrak{G}}^2] \Phi & \mathfrak{J}^{yz^{(0)}} &= [\mathfrak{B}_z^2 + y_{\mathfrak{G}}^2] \Phi & \mathfrak{J}^{yz^{(0)}} &= [\mathfrak{B}_{yz}^2 + y_{\mathfrak{G}} z_{\mathfrak{G}}] \Phi
 \end{aligned}
 \tag{I II}$$

5. Dati ora nel piano  $yz$  i punti P e Q, e per ciascuno di essi due rette di direzioni parallele agli assi  $yz$ , attraverso i seguenti cinque enunciati riportiamo le relazioni che intercedono fra i momenti del I e II ordine di  $\Phi$  rispetto alle suddette rette uscenti da P e Q e le loro espressioni, in funzione delle caratteristiche elastiche dell'asta.

1° Il momento statico del peso elastico  $\Phi$  rispetto ad una retta parallela ad uno degli assi  $O(yz)$  è uguale:

« al momento statico di  $\Phi$  rispetto all'asse scelto diminuito del prodotto del peso elastico, per la coordinata della retta data »

$$S^{y(P)} = \int_0^T (z - z_P) d\varphi = \int_0^T z d\varphi - z_P \int_0^T d\varphi = S^{y(o)} - z_P \Phi$$

e per le (III)

$$= (z_g - z_P) \Phi$$

$$S^{z(P)} = \int_0^T (y - y_P) d\varphi = \int_0^T y d\varphi - y_P \int_0^T d\varphi = S^{z(o)} - y_P \Phi$$

e per le (III)

$$= (y_g - y_P) \Phi$$

2° Il prodotto d'inerzia del peso elastico  $\Phi$  rispetto ad uno degli assi  $O(yz)$  ed ad una retta ad esso parallela è uguale:

« al momento d'inerzia di  $\Phi$  rispetto all'asse scelto diminuito del prodotto del momento statico di  $\Phi$  rispetto allo stesso asse, per la coordinata della retta ad esso parallela »

$$\mathfrak{J}^{yz(o)(P)} = \int_0^T z (z - z_P) d\varphi = \int_0^T z^2 d\varphi - z_P \int_0^T z d\varphi = \mathfrak{J}^{yz(o)} - z_P S^{y(o)}$$

e per le (III)

$$= [\mathfrak{B}_y^2 + z_g (z_g - z_P)] \Phi$$

$$\mathfrak{J}^{zy(o)(P)} = \int_0^T y (y - y_P) d\varphi = \int_0^T y^2 d\varphi - y_P \int_0^T y d\varphi = \mathfrak{J}^{zy(o)} - y_P S^{z(o)}$$

e per le (III)

$$= [\mathfrak{B}_z^2 + y_g (y_g - y_P)] \Phi$$

3° Il prodotto d'inerzia del peso elastico  $\Phi$  rispetto ad uno degli assi  $O(yz)$  ed ad una retta parallela all'altro è uguale:

« al prodotto d'inerzia di  $\Phi$  rispetto agli assi  $O(yz)$  diminuito del prodotto del momento statico di  $\Phi$  rispetto all'asse scelto, per la coordinata della retta parallela all'altro asse »

$$\boxed{J^{y(o)z(P)}} = \int_0^T z(y - y_P) d\varphi = \int_0^T zy d\varphi - y_P \int_0^T z d\varphi = \boxed{J^{yz(o)} - y_P S^{y(o)}}$$

e per le (III)

$$= \boxed{[B_{yz}^2 + y_G(y_G - y_P)] \Phi}$$

$$\boxed{J^{z(o)y(P)}} = \int_0^T y(z - z_P) d\varphi = \int_0^T zy d\varphi - z_P \int_0^T y d\varphi = \boxed{J^{yz(o)} - z_P S^{z(o)}}$$

e per le (III)

$$= \boxed{[B_{yz}^2 + y_G(z_G - z_P)] \Phi}$$

4° Il prodotto d'inerzia del peso elastico  $\Phi$  rispetto ad una coppia di rette entrambe parallele ad uno degli assi  $O(yz)$  è uguale:

« al prodotto d'inerzia di  $\Phi$  rispetto all'asse scelto ed ad una delle due rette ad esso parallele diminuito del prodotto del momento statico di  $\Phi$  rispetto a questa retta, per la coordinata dell'altra »

$$\begin{aligned} \boxed{J^{y(P)z(Q)}} &= \int_0^T (z - z_P)(z - z_Q) d\varphi \\ &= \int_0^T z(z - z_Q) d\varphi - z_P \int_0^T (z - z_Q) d\varphi = \boxed{J^{y(o)z(Q)} - z_P S^{y(Q)}} \end{aligned}$$

od anche, operando analogamente:

$$= \boxed{J^{y(o)(P)} - z_Q S^{y(P)}}$$

e per gli enunciati 1° e 2°

$$= \boxed{[B_y^2 + (z_G - z_P)(z_G - z_Q)] \Phi}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\mathfrak{J}^{z(P)(Q)}} &= \int_0^T (y - y_P)(y - y_Q) d\varphi \\
 &= \int_0^T y(y - y_Q) d\varphi - y_P \int_0^T (y - y_Q) d\varphi = \boxed{\mathfrak{J}^{z(o)(Q)} - y_P S^{z(Q)}}
 \end{aligned}$$

od anche, operando analogamente:

$$= \boxed{\mathfrak{J}^{z(o)(P)} - y_Q S^{z(P)}}$$

e per gli enunciati 1° e 2°

$$= \boxed{[\mathfrak{B}_s^2 + (y_s - y_P)(y_s - y_Q)] \Phi}$$

5° Il prodotto d'inerzia del peso elastico  $\Phi$  rispetto a due rette ciascuna parallela ad uno degli assi  $O(yz)$  è uguale:

« al prodotto d'inerzia di  $\Phi$  rispetto ad uno degli assi ed alla retta parallela all'altro, diminuito del prodotto del momento statico di  $\Phi$  rispetto a questa retta, per la coordinata dell'altra »,

$$\begin{aligned}
 \boxed{\mathfrak{J}^{y(P)z(Q)}} &= \int_0^T (z - z_P)(y - y_Q) d\varphi \\
 &= \int_0^T z(y - y_Q) d\varphi - z_P \int_0^T (y - y_Q) d\varphi = \boxed{\mathfrak{J}^{y(o)z(Q)} - z_P S^{z(Q)}}
 \end{aligned}$$

od anche, operando analogamente:

$$= \boxed{\mathfrak{J}^{z(o)y(P)} - y_Q S^{y(P)}}$$

e per gli enunciati 1° e 2°

$$= \boxed{[\mathfrak{B}_{yz}^2 + (z_s - z_P)(y_s - y_Q)] \Phi}$$

E quindi riassumendo:

$$\begin{aligned}
 (IV) \quad & \begin{cases} 1^\circ \quad \begin{cases} S^{y(P)} = S^{y(o)} - z_P \Phi & = (z_g - z_P) \Phi \\ S^{z(P)} = S^{z(o)} - y_P \Phi & = (y_g - y_P) \Phi \end{cases} \\ \\ 2^\circ \quad \begin{cases} \mathfrak{J}^{y(o)(P)} = \mathfrak{J}^{y(o)} - z_P S^{y(o)} & = [\mathfrak{B}_y^2 + z_g(z_g - z_P)] \Phi \\ \mathfrak{J}^{z(o)(P)} = \mathfrak{J}^{z(o)} - y_P S^{z(o)} & = [\mathfrak{B}_z^2 + y_g(y_g - y_P)] \Phi \end{cases} \\ \\ 3^\circ \quad \begin{cases} \mathfrak{J}^{y(o)z(P)} = \mathfrak{J}^{yz(o)} - y_P S^{y(o)} & = [\mathfrak{B}_{yz}^2 + z_g(y_g - y_P)] \Phi \\ \mathfrak{J}^{z(o)y(P)} = \mathfrak{J}^{yz(o)} - z_P S^{z(o)} & = [\mathfrak{B}_{yz}^2 + y_g(z_g - z_P)] \Phi \end{cases} \\ \\ 4^\circ \quad \begin{cases} \mathfrak{J}^{y(P)(Q)} = \mathfrak{J}^{y(o)(Q)} - z_P S^{y(Q)} = \mathfrak{J}^{y(o)(P)} - z_Q S^{y(P)} & = [\mathfrak{B}_y^2 + (z_g - z_P)(z_g - z_Q)] \Phi \\ \mathfrak{J}^{z(P)(Q)} = \mathfrak{J}^{z(o)(Q)} - y_P S^{z(Q)} = \mathfrak{J}^{z(o)(P)} - y_Q S^{z(P)} & = [\mathfrak{B}_z^2 + (y_g - y_P)(y_g - y_Q)] \Phi \end{cases} \\ \\ 5^\circ \quad \mathfrak{J}^{y(P)z(Q)} = \mathfrak{J}^{y(o)z(Q)} - z_P S^{z(Q)} = \mathfrak{J}^{z(o)y(P)} - y_Q S^{y(P)} & = [\mathfrak{B}_{yz}^2 + (z_g - z_P)(y_g - y_Q)] \Phi \end{cases}
 \end{aligned}$$

6. Se l'asta si trova in posizione tale per la quale  $y \equiv t \quad z \equiv n$ , è

$$\cos \hat{y}t = 1 \quad \cos \hat{z}t = 0$$

Dalle (I) si ha:

$$(I') \quad \begin{array}{|c|c|} \hline y \equiv t & y_g \equiv t_g \\ \hline z \equiv n & z_g \equiv n_g \\ \hline \end{array}$$

e dalle (II)

$$(II') \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathfrak{B}_y^2 \equiv \mathfrak{B}_t^2 & \mathfrak{B}_z^2 \equiv \mathfrak{B}_n^2 & \mathfrak{B}_{yz}^2 \equiv \mathfrak{B}_{tn}^2 \\ \hline \end{array}$$

Le (III) e (IV) si mantengono formalmente inalterate; solo variando i valori di  $\mathfrak{B}$  dati in questo caso dalle (II)' e le coordinate  $y$  e  $z$ , sostituite rispettivamente dalle  $t$  ed  $n$ .

7. Se l'asta curva degenera in una retta, per ogni sua sezione  $S$  nel sistema  $O(tn)$  sarà:

$$n = 0$$

quindi per essa

$$\left| \begin{array}{l} y = t \cos \hat{y}t \\ z = t \cos \hat{z}t \end{array} \right|$$

inoltre dalle (8) (11)

$$S^{(0)} = 0 \quad n_g = 0$$

dalle (10) (12)

$$J^{(g)} = 0 \quad J^{tn(g)} = 0$$

dalle (5) (7)

$$B_t^2 = 0 \quad B_{tn}^2 = 0$$

e di conseguenza: dalle (I)

$$(I)'' \quad \begin{array}{|l|} \hline y = t \cos \hat{y}t - n \cos \hat{z}t \\ z = t \cos \hat{z}t + n \cos \hat{y}t \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l|} \hline y_g = t_g \cos \hat{y}t \\ z_g = t_g \cos \hat{z}t \\ \hline \end{array}$$

dalle (II)

$$(II)'' \quad \begin{array}{|l|} \hline B_y^2 = B_n^2 \cos^2 \hat{z}t \quad B_z^2 = B_n^2 \cos^2 \hat{y}t \quad B_{yz}^2 = B_n^2 \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t \\ \hline \end{array}$$

Le (III) e le (IV) rimangono formalmente inalterate solo variando i valori di  $B$  dati in questo caso dalle (II)'' ed i valori delle coordinate del baricentro elastico dati dalle (I)''.

8. Se l'asta retta si trova in posizione tale per la quale  $y \equiv t \quad z \equiv n$ , è

$$\cos \hat{y}t = 1 \quad \cos \hat{z}t = 0$$

quindi per ogni sezione  $S$  dell'asta

$$\begin{array}{|l|} \hline y \equiv t \quad z \equiv n = 0 \\ \hline \end{array}$$

inoltre dalle (I)''

$$(I)''' \quad \begin{array}{|l|} \hline y \equiv t \\ z \equiv n \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l|} \hline y_g \equiv t_g \\ z_g = 0 \\ \hline \end{array}$$

dalle (II)''

$$(II)''' \quad \begin{array}{|l|} \hline B_y^2 \equiv B_t^2 = 0 \quad B_z^2 \equiv B_n^2 \quad B_{yz}^2 \equiv B_{tn}^2 = 0 \\ \hline \end{array}$$

dalle (III)

$$(III)''' \quad \begin{aligned} S^{y(o)} &\equiv S^{t(o)} = 0 & S^{z(o)} &\equiv S^{n(o)} = t_g \cdot \Phi \\ \mathfrak{J}^{y(o)} &\equiv \mathfrak{J}^{t(o)} = 0 & \mathfrak{J}^{z(o)} &\equiv \mathfrak{J}^{n(o)} = (\mathfrak{B}_n^2 + t_g^2) \Phi & \mathfrak{J}^{yz(o)} &\equiv \mathfrak{J}^{tn(o)} = 0 \end{aligned}$$

dalle (IV)

$$(IV)''' \quad \begin{aligned} 1^\circ & \quad \begin{cases} S^{y(P)} = S^{t(P)} = -n_P \cdot \Phi \\ S^{z(P)} = S^{n(P)} = (t_g - t_P) \Phi \end{cases} \\ 2^\circ & \quad \begin{cases} \mathfrak{J}^{y(o)(P)} = \mathfrak{J}^{t(o)(P)} = 0 \\ \mathfrak{J}^{z(o)(P)} = \mathfrak{J}^{n(o)(P)} = [\mathfrak{B}_n^2 + t_g(t_g - t_P)] \Phi \end{cases} \\ 3^\circ & \quad \begin{cases} \mathfrak{J}^{y(o)z(P)} = \mathfrak{J}^{t(o)n(P)} = 0 \\ \mathfrak{J}^{z(o)y(P)} = \mathfrak{J}^{n(o)t(P)} = -t_g \cdot n_P \cdot \Phi \end{cases} \\ 4^\circ & \quad \begin{cases} \mathfrak{J}^{y(P)(Q)} = \mathfrak{J}^{t(P)(Q)} = n_P \cdot n_Q \cdot \Phi \\ \mathfrak{J}^{z(P)(Q)} = \mathfrak{J}^{n(P)(Q)} = [\mathfrak{B}_n^2 + (t_g - t_P)(t_g - t_Q)] \Phi \end{cases} \\ 5^\circ & \quad \mathfrak{J}^{y(P)z(Q)} = \mathfrak{J}^{t(P)n(Q)} = -n_P(t_g - t_Q) \Phi \end{aligned}$$

**Meccanica.** — *Sur le mouvement des fluides barotropes.* Nota (\*) di VICTOR VÁLCOVICI, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

Le mouvement permanent des fluides barotropes dénués de viscosité met en évidence certaine surface dont le plan tangent contient la vitesse et le tourbillon. Cette propriété a été établie déjà par H. Poincaré ([1]). La surface a été appelée ultérieurement « surface de Bernoulli » ([4] et [5]). Dans les derniers temps on s'est beaucoup occupé de cette surface (voir la Bibliographie) en calculant des cas particuliers remarquables.

Dans le présent travail en considérant les surfaces de Bernoulli dans le cas général nous arrivons à la conclusion que l'étude du mouvement du fluide se réduit proprement dit au mouvement en deux dimensions sur les surfaces rigides de Bernoulli et que ce mouvement est déterminé par deux fonctions,  $\varphi$  et  $\psi$ , dont la première fournit la vitesse du fluide par ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées curvilignes,  $q^1$  et  $q^2$ , sur la surface de Bernoulli, et la seconde, les lignes de courant, qui sont données par l'équation  $\psi = \text{const.}$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1956.

De cette manière le mouvement permanent du fluide barotrope en trois dimensions se présente comme étant réduit au mouvement en deux dimensions, réduction analogue à celle que l'on connaît pour les mouvements irrotationnels des fluides incompressibles. L'analogie s'étend aussi aux équations que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  doivent satisfaire, et qui sont des équations du type elliptique, généralisant l'équation de Laplace. Dans certains cas particuliers, qui d'ailleurs comprennent le cas spécial du mouvement plan mentionné ci-dessus, la combinaison  $\varphi + i\psi$  apparaît comme une fonction analytique d'un certain argument complexe.

On a donc le droit d'appeler  $\varphi$ , *le potentiel des vitesses* et  $\psi$ , *fonction de courant*, comme les fonctions qui leur correspondent dans le mouvement plan. En outre, la fonction  $\varphi$  présente la propriété de fournir la famille des lignes de tourbillon par l'équation  $\partial\varphi/\partial q^3 = \text{const}$ ,  $q^3$  étant un paramètre qui joue le rôle d'une troisième coordonnée curviligne.

I. LES SURFACES DE BERNOULLI (SB). — Les équations de mouvement des fluides barotropes, dénués de viscosité, sont:

$$(1) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times \vec{\omega} = -\text{grad } B,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0,$$

avec les notations

$$(3) \quad \vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} \quad , \quad B = \frac{V^2}{2} + P - U \quad , \quad P = \int \frac{dp}{\rho},$$

$\vec{u}$  désignant la vitesse du fluide,  $V$  sa valeur absolue,  $p$  la pression,  $\rho$  la densité et  $U$  la fonction des forces. Nous avons employé le signe  $\times$  pour le produit vectoriel.

Observons, en passant, que si l'on applique à l'équation (1) l'opérateur « rot » on obtiendra la relation

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{u} \times \vec{\omega}),$$

qui représente la condition nécessaire et suffisante pour que le champ vectoriel  $\vec{u}$  puisse représenter la vitesse d'un fluide parfait, barotrope.

Dans le cas du mouvement permanent les équations (1) et (2) deviennent

$$(4) \quad \text{grad } B = \vec{u} \times \vec{\omega},$$

$$(5) \quad \text{div}(\rho \vec{u}) = 0.$$

Or l'équation (4) montre que la normale à la surface représentée par

$$(6) \quad B = \text{const}$$

a la direction du produit vectoriel  $\vec{u} \times \vec{\omega}$ . Il s'ensuit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{\omega}$  se trouvent dans le plan tangent de la surface (6) et partant, que cette surface est formée par des lignes de courant et par des lignes de tourbillon; en conséquence, le mouvement du fluide aura lieu le long des surfaces rigides (6).

De cette manière, l'étude du mouvement du fluide dans l'espace se réduit à l'étude du mouvement sur ces surfaces, qui acquièrent ainsi une importance évidente. Ce sont d'ailleurs *les surfaces de Bernoulli*; nous les désignerons dans ce qui suit par le symbole « SB ».

2. COORDONNÉS CURVILIGNES. - Soit  $q^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) un système de coordonnées curvilignes tel qu'une SB soit déterminée par une valeur de l'expression B. On prendra à cet effet pour  $q^3$ , la valeur de la constante qui figure dans l'équation (6), les courbes coordonnées correspondantes étant les trajectoires orthogonales de la famille (6) de surfaces qui d'ailleurs seront ainsi données par l'équation

$$(7) \quad B = q^3.$$

Les coordonnées  $q^1, q^2$ , détermineront les points des surfaces SB.

L'élément d'arc  $ds$  sera donné par

$$(8) \quad (ds)^2 = g_{ij} dq^i dq^j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

où l'on a mis

$$(9) \quad g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

$x^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) désignant les coordonnées cartésiennes du point considéré ayant le vecteur de position  $\vec{r}$ .

Le vecteur  $\vec{u}$  pris comme tenseur, aura les composantes contravariantes

$$(10) \quad u^i = \dot{q}^i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire

$$\vec{u} = u^i \vec{r}_i, \quad \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

et les composantes covariantes  $u_i$  données par les relations:

$$(11) \quad u_i = g_{ij} u^j.$$

Il est évident que nous aurons

$$(12) \quad u^3 = 0;$$

il s'ensuit de (11),

$$(13) \quad u_3 = 0,$$

ayant égard aux relations

$$(14) \quad g_{3i} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

qui découlent de (9). En désignant par  $v^1, v^2, v^3$  les composantes vectorielles de  $\vec{u}$ ,

$$(15) \quad \vec{u} = v^i \bar{\rho}_i, \quad \bar{\rho}_i = \text{vers } \bar{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

on aura

$$(16) \quad v^i = H_i u^i \text{ (sans sommation),}$$

$H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) étant les coefficients (positifs) de Lamé

$$(17) \quad H_i^2 = \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^i} \right)^2 = \left( \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \right)^2 \text{ (sommation seulement par rapport à } k),$$

donc

$$(18) \quad v^3 = 0.$$

3. LA FONCTION DE COURANT  $\psi$ . LES LIGNES DE COURANT. — A l'aide de la formule générale

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{V|g|} \frac{\partial}{\partial q^i} (V|g| u^i) \quad , \quad g = \det(g_{ij}),$$

l'équation (5) prendra la forme

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial q^1} (V \bar{g} \rho u^1) + \frac{\partial}{\partial q^2} (V \bar{g} \rho u^2) = 0,$$

le déterminant  $g$  ayant toujours la valeur positive

$$(20) \quad g = g_{33} G \quad , \quad G = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2.$$

Il s'ensuit que l'on peut mettre

$$(21) \quad \rho V \bar{g} u^1 = \frac{\partial \psi}{\partial q^2} \quad , \quad \rho V \bar{g} u^2 = - \frac{\partial \psi}{\partial q^1},$$

$\psi$  étant une fonction deux fois dérivable, de  $q^1$  et  $q^2$ , avec  $\partial^2 \psi / \partial q^1 \partial q^2$  continu.

On aura

$$(22) \quad d\psi = \rho V \bar{g} (u^1 dq^2 - u^2 dq^1).$$

Le long d'une ligne de courant cette expression s'annule, vu que les quantités  $dq^i$  satisfont les relations (10). C'est dire que la fonction  $\psi$  reste constante le long d'une ligne de courant et partant, la famille des lignes de courant sur SB sera donnée par l'équation

$$(23) \quad \psi = \text{const.}$$

Nous appellerons  $\psi$  *fonction de courant*. Elle mesure, tout comme dans le mouvement plan, incompressible, le flux du fluide. Car, en effet, le flux  $dQ_1$  à travers un rectangle ayant comme base le vecteur  $ds_1$  sur la surface SB correspondant à la valeur  $q^3$ , le long de  $q^1$ , et comme hauteur le vecteur  $ds^3$  le long de  $q^3$ , entre les deux surfaces SB voisines,  $q^3$  et  $q^3 + dq^3$ , aura l'expression

$$(24) \quad dQ_1 = - \rho v^2 ds^1 \sin(q^1, q^2) ds^3.$$

En remplaçant le vecteur  $d\bar{s}^1$  par un autre,  $d\bar{s}^2$ , le long de  $q^2$  on obtiendra le flux  $dQ_2$ ,

$$(25) \quad dQ_2 = \rho v^1 ds^2 \sin(q^1, q^2) ds^3,$$

traversant le rectangle formé avec les vecteurs  $d\bar{s}^2$  (le long de  $q^2$ ) et  $d\bar{s}^3$ . Il en résulte que le flux  $dQ$  à travers le rectangle ayant la base  $d\bar{s} (=d\bar{s}^1 + d\bar{s}^2)$  et la hauteur  $d\bar{s}^3$  aura l'expression

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = (v^1 ds^2 - v^2 ds^1) \rho \sin(q^1, q^2) ds^3,$$

ou bien,

$$(26) \quad dQ = \frac{H_1 H_2}{V\bar{G}} \sin(q^1, q^2) d\psi dq^3,$$

en tenant compte des relations (16), (22) et des formules évidentes

$$(27) \quad ds^i = H_i dq^i, \quad (i = 1, 2, 3; \text{ sans sommation}).$$

Mais l'on a

$$(28) \quad \sin(q^1, q^2) = \frac{V\bar{G}}{H_1 H_2},$$

de sorte que (26) deviendra

$$(29) \quad dQ = d\psi dq^3.$$

Il s'ensuit que le flux  $(P_1 P_2)$  à travers une surface normale à SB le long de l'arc  $P_1 P_2$  de SB et limitée entre les deux surfaces SB considérées,  $q^3$  et  $q^3 + dq^3$ , aura l'expression

$$(30) \quad (P_1 P_2) = [\psi(P_2) - \psi(P_1)] dq^3.$$

Rapporté à l'unité de différence des constantes caractéristiques des SB le flux sera égal à  $\psi(P_2) - \psi(P_1)$ .

4. LA FONCTION POTENTIELLE  $\varphi$ . LES LIGNES DE TOURBILLON. — En désignant par  $\omega^i$  le pseudovecteur (densité tensorielle) associé au tenseur covariant  $\partial u_j / \partial q_i - \partial u_i / \partial q_j$ , c'est-à-dire en mettant

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^1 = \frac{\partial u_3}{\partial q^2} - \frac{\partial u_2}{\partial q^3} = - \frac{\partial u_2}{\partial q^3}, \\ \omega^2 = \frac{\partial u_1}{\partial q^3} - \frac{\partial u_3}{\partial q^1} = \frac{\partial u_1}{\partial q^3}, \\ \omega^3 = \frac{\partial u_2}{\partial q^1} - \frac{\partial u_1}{\partial q^2}, \end{array} \right.$$

on aura  $\omega^3 = 0$  puisque le vecteur  $\bar{\omega}$  est situé dans le plan tangent à SB. Donc nous aurons la relation

$$(32) \quad \frac{\partial u_2}{\partial q^1} = \frac{\partial u_1}{\partial q^2},$$

ce qui équivaut à

$$(33) \quad u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial q^1}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q^2},$$

$\varphi$  étant une fonction (deux fois dérivable) de  $q^1$  et  $q^2$ , avec  $\partial^2 \varphi / \partial q^1 \partial q^2$  continu. Nous dirons que  $\varphi$  est une *fonction potentielle* pour les composantes covariantes  $u_1, u_2$  de la vitesse  $\vec{u}$  traitée comme tenseur.

La fonction  $\varphi$  varie avec SB; en d'autres termes elle sera fonction de  $q^3$  également; nous la supposerons dérivable par rapport à  $q^3$ .

Nous nous proposons maintenant de trouver l'équation des lignes de tourbillon sur SB. L'équation différentielle correspondante aura la forme

$$(34) \quad \frac{ds^1}{(\text{rot } \vec{u})^1} = \frac{ds^2}{(\text{rot } \vec{u})^2},$$

si l'on désigne par  $(\text{rot } \vec{u})^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) les composantes curvilignes vectorielles du vecteur  $\text{rot } \vec{u}$  et par  $ds^1, ds^2$  les composantes vectorielles dans les directions  $q^1, q^2$ , du vecteur  $d\vec{s}$  pris le long de la ligne de courant. Or nous avons, comme on sait,

$$(\text{rot } \vec{u})^1 = \frac{H_1}{\sqrt{|g|}} \omega^1, \quad (\text{rot } \vec{u})^2 = \frac{H_2}{\sqrt{|g|}} \omega_2,$$

de sorte que l'équation (32) se réduira à

$$-\frac{dq^1}{\frac{\partial u_2}{\partial q^3}} = \frac{dq^2}{\frac{\partial u_1}{\partial q^3}},$$

en tenant compte des relations (27) et (31). On en tire avec (33)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^1 \partial q^3} dq^1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2 \partial q^3} dq^2 = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial q^2} dq^2 = 0, \quad \Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial q^3},$$

ce qui veut dire que la famille des lignes de tourbillon sera donnée par l'équation

$$(35) \quad \Phi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial q^3} = \text{const}$$

sur SB ( $q^3 = \text{const}$ ).

5. RELATIONS ENTRE  $\varphi$  ET  $\psi$ . — Les formules (21) et (33) nous fourniront immédiatement les relations entre  $\varphi$  et  $\psi$  si l'on tient compte des formules (11), à savoir:

$$(36) \quad \varphi_i = \frac{1}{\rho \sqrt{|g|}} (g_{i1} \psi_2 - g_{i2} \psi_1), \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}, \quad \psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial q^i}, \quad (i = 1, 2).$$

En faisant les substitutions

$$(37) \quad g_{11} = G g^{22}, g_{22} = G g^{11}, g_{12} = -G g^{12},$$

où  $g^{ij}$  désigne le tenseur contravariant associé au tenseur fondamental métrique  $g_{ij}$ , on pourra mettre les relations (36) sous la forme

$$(38) \quad \varphi_1 = \frac{G}{\rho \sqrt{g}} g^{2i} \psi_i, \quad \varphi_2 = -\frac{G}{\rho \sqrt{g}} g^{1i} \psi_i.$$

On obtiendra une autre forme de ces relations on substituant dans (21), à la place des quantités  $u^i$ ,  $u^2$ , leurs expressions

$$(39) \quad u^i = g^{ij} u_j = g^{ij} \varphi_j,$$

c'est-à-dire les relations

$$(40) \quad \psi_1 = -\rho \sqrt{g} g^{2i} \varphi_i, \quad \psi_2 = \rho \sqrt{g} g^{1i} \varphi_i;$$

celles-ci sont évidemment équivalentes aux relations (38).

En éliminant  $\psi$  entre les deux relations (40) par des dérivations croisées on aura

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial q^i} (\rho \sqrt{g} g^{ij} \varphi_j) = 0, \quad (i, j = 1, 2).$$

C'est l'équation à laquelle doit satisfaire  $\varphi$  comme fonction de  $q^1$  et  $q^2$ ; on peut la mettre sous la forme

$$(42) \quad g^{11} \varphi_{11} + 2 g^{12} \varphi_{12} + g^{22} \varphi_{22} + \dots = 0, \quad \varphi_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^i \partial q^j},$$

les points  $\dots$  représentant des termes linéaires du premier ordre en  $\varphi$ . On voit que, ayant égard seulement aux termes où  $\varphi$  apparaît explicitement, l'équation est du type elliptique, car le discriminant  $g^{11} g^{22} - (g^{12})^2$  de l'équation caractéristique est positif.

Par un procédé analogue et en partant des relations (38) on obtiendra l'équation en  $\psi$ ,

$$(43) \quad \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{G}{\rho \sqrt{g}} g^{ij} \psi_j \right) = 0, \quad (i, j = 1, 2)$$

En isolant les termes du second ordre en  $\psi$ , où cette fonction apparaît explicitement, l'équation (43) prendra la forme

$$(44) \quad g^{11} \psi_{11} + 2 g^{12} \psi_{12} + g^{22} \psi_{22} + \dots = 0, \quad \psi_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^i \partial q^j}.$$

On voit que l'équation en  $\psi$  est identique à l'équation (42) en  $\varphi$ , abstraction faite des termes du premier ordre. Ces deux équations (42) et (44), généralisent l'équation de Laplace à laquelle doivent satisfaire les fonctions potentielle et de courant dans le cas du mouvement fluide, plan, irrotationnel.

Les deux équations (41) et (43) seront identiques si l'on a

$$\rho^2 g = G,$$

ou bien

$$(45) \quad \rho H_3 = 1.$$

Or dans ce cas spécial les relations (36) coïncident avec la condition de Beltrami pour que l'expression  $\varphi + i\psi$  soit une fonction analytique de l'argument  $z$ , intégrale de l'équation

$$H_1 dq' + \frac{g_{12} + i\sqrt{G}}{H_1} dq^2 = 0.$$

C'est ce qui arrive p. ex. en prenant

$$H_1 = H_2 = H_3 = \rho = 1, \quad g_{12} = 0, \quad q^1 = x, \quad q^2 = y;$$

c'est le cas connu du mouvement dans le plan complexe  $z = x + iy$  du fluide incompressible, dépourvu de vorticité et de viscosit , qui apparait comme un cas particulier du cas spécial (45).

6. ORTHOGONALITÉ DES COURBES  $\varphi = \text{CONST}$ , ET  $\psi = \text{CONST}$ . — En désignant par  $dq^i$  le déplacement élémentaire sur une courbe de la famille  $\varphi = \text{const}$ , et par  $\delta q^i$  le déplacement élémentaire sur une courbe de la famille  $\psi = \text{const}$ , la condition d'orthogonalité s'écrit

$$(46) \quad g_{ij} dq^i \delta q^j = 0, \quad (i, j = 1, 2).$$

Or les quantités  $dq^i$  et  $\delta q^i$  vérifient les relations

$$(47) \quad \varphi_i dq^i = 0, \quad \psi_i \delta q^i = 0, \quad (i = 1, 2).$$

En éliminant les  $dq^i$  et  $\delta q^i$  entre les relations (46) et (47) on obtient

$$g_{11} \varphi_2 \psi_2 + g_{22} \varphi_1 \psi_1 - g_{12} (\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1) = 0$$

ou bien, avec (21) et (33),

$$u_2 (g_{11} u^1 + g_{12} u^2) - u_1 (g_{12} u^1 + g_{22} u^2) = 0,$$

ce qui est évident, ayant égard aux relations (11). Ainsi les familles de courbes  $\varphi = \text{const}$  et  $\psi = \text{const}$  forment sur SB un réseau orthogonal.

Dans un prochain travail nous allons donner la forme des équations en  $\varphi$  et en  $\psi$  en connexion avec la vitesse du son, en poursuivant une analogie avec les recherches que Tchaplyguine a entreprises concernant les mouvements irrotationnels.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] POINCARÉ H., *Théorie des tourbillons*, Paris 1893.
- [2] SEGRE B., « Ann. di Mat. », I, pp. 31-55 (1924).
- [3] CALDONAZZO B., « Rend. Lincei », 33, pp. 396-400 (1924).
- [4] CALDONAZZO B., « Rend. Lincei », IV, pp. 124-126 (1926).
- [5] CALDONAZZO B., « Boll. Unione mat. it. », IV, pp. 1-3 (1925).
- [6] FINZI B., « Rend. Lincei », VI, pp. 236-241 (1925).
- [7] FINZI B., « Rend. Palermo », 51, pp. 1-24 (1927).
- [8] CISOTTI U., « Rend. Lincei », VI, pp. 612-617 (1925).

- [9] MASOTTI A., « Rend. Lincei », V, pp. 985-989 (1927).
- [10] MASOTTI A., « Rend. Lincei », VI, pp. 224-228 (1927).
- [11] MASOTTI A., « Rend. Palermo », 52, pp. 313-330 (1928).
- [12] GRIALOU J., « C. R. Paris », 198, pp. 1972-1973 (1934).
- [13] GOLUBEVA O. V., « Prikl. mat. i meh. URSS », 78, pp. 287-294 (1950).
- [14] WINTNER A., « Qu. appl. Math. », IX, pp. 102-105 (1951).
- [15] BIUȘGHENS C. C., « Dokl. A. N. URSS », 78, pp. 837-840 (1951).
- [16] BIUȘGHENS C. C., « Dokl. A. N. URSS », 84, pp. 861-863 (1952).
- [17] GHEORGHIEV, GH., « St. Cerc. Iași », II, pp. 1-18 (1951).
- [18] GHEORGHIEV GH., « Rev. Univ. Iași », II, pp. 43-64 (1955).
- [19] VÂLCOVICI V., « Bul. St. A.R.P.R. », IV, pp. 541-545 (1952).
- [20] VÂLCOVICI V., « Bul. St. A.R.P.R. », V, pp. 147-152 (1953).

**Meccanica.** — *Compressione e torsione di due corpi elastici a contatto.* Nota di MAURO PACELLI, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio A. SIGNORINI.

Nella presente Nota si studia il problema statico del contatto con attrito tra due corpi elastici  $C_1$  e  $C_2$  di forma qualunque, inizialmente tangenti in un punto  $O$ , assoggettati ad una mutua compressione normale e, successivamente, ad una azione torcente attorno alla comune normale in  $O$ . I due corpi si suppongono omogenei, isotropi e costituiti dello stesso materiale. Seguendo un criterio abituale in tal genere di questioni, ciascuno di essi viene identificato, da un punto di vista geometrico, con il rispettivo paraboloide osculatore in  $O$ ; il suo comportamento meccanico essendo invece assimilato a quello di un semispazio elastico.

Data la uguale natura elastica dei due corpi sia l'area  $\sigma$  di contatto sia la distribuzione degli sforzi normali in essa presenti sono le stesse ottenute da Hertz (cfr. [2], p. 193) nel caso di sola compressione. Pertanto:

a)  $\sigma$  è un'ellisse con centro in  $O$  e con assi dipendenti in direzione e grandezza dalla forma e dal mutuo orientamento dei due corpi e dalle loro costanti elastiche;

b) con riferimento agli assi di  $\sigma$ , la distribuzione delle pressioni normali risulta:

$$(1) \quad p(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}$$

$a$  e  $b$  essendo i semiassi di  $\sigma$  e  $P$  l'entità globale della mutua compressione tra i due corpi.

La determinazione degli sforzi tangenziali, che è l'oggetto di questa Nota, ha già costituito argomento di ricerca. Nel 1949 R. D. Mindlin [4] dava la soluzione del problema nell'ipotesi, fisicamente molto restrittiva, di una perfetta aderenza in  $\sigma$ . Nel 1951 J. L. Lubkin, riprendendo l'ipotesi, formulata nel 1938 da C. Cattaneo nell'analogo problema della compressione obliqua [3], di un parziale scorrimento periferico in  $\sigma$ , giungeva alla

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

soluzione, in termini finiti, nel caso di due sfere [5]. Lo stesso caso particolare veniva trattato nel 1952 da Cattaneo [6], nelle stesse ipotesi fisiche, ma con un procedimento analitico diverso, che conduceva alla soluzione in forma di serie e che applicato, dallo stesso autore, nel 1955, al caso di due corpi di forma qualunque [8], permetteva di ottenere anche nel caso generale soluzioni approssimate con ordine di approssimazione comunque spinto.

Nel presente lavoro viene data la soluzione esatta, e in termini finiti, del problema generale, nelle stesse ipotesi poste da Cattaneo in [8], ipotesi che verranno esplicitamente richiamate (cfr. 1).

Premessa l'impostazione analitica del problema, si mostra come si possa formalmente costruire la soluzione generale a partire dalla soluzione particolare di Lubkin, con un procedimento induttivo suggerito da analogie formali tra le soluzioni approssimate, di ugual ordine, date da Cattaneo nel caso di due sfere [6] e nel caso generale [8].

Successivamente si esegue il controllo rigoroso della soluzione presunta sulla base delle equazioni integrodifferenziali nelle quali si traduce il problema in esame.

# 1. IPOTESI E IMPOSTAZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA.

Richiamo brevemente dal lavoro [8] le ipotesi e l'impostazione analitica del problema.

Ipotesi:

« I. Continuità. Lo sforzo tangenziale, di componenti  $(l, m)$  secondo gli assi di  $\sigma$ , è finito e continuo in  $\sigma$ .

« II. Validità locale della legge di attrito. In tutta  $\sigma$  esso soddisfa alla disuguaglianza

$$(2) \quad l^2 + m^2 \leq f^2 p^2$$

essendo  $f$  il coefficiente di attrito tra i due corpi e  $p$  lo sforzo normale.

« III. Zone di aderenza e di slittamento. Vi è assenza di slittamento in un'area ellittica  $\sigma_*$ , di semiassi  $a_*$  e  $b_*$  concentrica coassiale omotetica a  $\sigma$ , e interna ad essa. Si producono invece slittamenti nella residua corona ellittica marginale che chiameremo  $\tau$ .

« IV. Struttura analitica degli sforzi e loro direzione. Nello anello  $\tau$  gli sforzi tangenziali sono del tipo

$$(3) \quad l_\tau = \alpha \frac{\partial F(\mu)}{\partial y} \quad m_\tau = \beta \frac{\partial F(\mu)}{\partial x}$$

dove  $F(\mu)$  è una opportuna funzione di  $\mu = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$  e

$$(4) \quad \alpha = \frac{\kappa A (a^2 - b^2) + 2 \chi (B b^2 - A a^2)}{2 \kappa [\kappa A B (a^2 - b^2) + \chi (A + B) (B b^2 - A a^2)]}$$

$$(5) \quad \beta = - \frac{\kappa B (a^2 - b^2) + 2 \chi (B b^2 - A a^2)}{2 \kappa [\kappa A B (a^2 - b^2) + \chi (A + B) (B b^2 - A a^2)]}$$

dove è  $\kappa = \frac{1}{2\pi\mu}$ ,  $\chi = \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda + \mu)}$  ( $\lambda$  e  $\mu$  costanti di Lamé)

$$A = \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{d\psi}{(a^2 + \psi)^{3/2} \{(b^2 + \psi)\psi\}^{1/2}} \quad \text{e} \quad B = \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{d\psi}{(b^2 + \psi)^{3/2} \{(a^2 + \psi)\psi\}^{1/2}}$$

(Si presume con ciò che lo sforzo tangenziale in  $\tau$  abbia una ben determinata struttura analitica e abbia inoltre, ovunque in  $\tau$ , la stessa direzione che esso avrebbe in assenza completa di scorrimento) <sup>(1)</sup>.

«V. Condizione di massimo sforzo tangenziale compatibile con l'attrito. Subordinatamente alla condizione IV (3) la distribuzione degli sforzi tangenziali in  $\tau$  è tale che in almeno un punto di  $\tau$  la II (2) sia soddisfatta per uguaglianza (potendo nei rimanenti punti di  $\tau$  essere verificata per disuguaglianza) ».

In virtù delle ipotesi II, IV, V, l'autore determina per la  $F(\mu)$  l'espressione

$$(6) \quad F(\mu) = \frac{3fP}{4\pi b\beta} (\mu \sqrt{1-\mu^2} - \arcsin \mu)$$

e quindi per gli sforzi tangenziali in  $\tau$ :

$$(7) \quad l_\tau = \alpha \frac{\partial F(\mu)}{\partial y} = \frac{3fP\alpha}{2\pi b^3\beta} \frac{\mu y}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad m_\tau = \beta \frac{\partial F(\mu)}{\partial x} = \frac{3fP}{2\pi a^2 b} \frac{\mu x}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

Successivamente, facendo uso delle formule integrali, dovute a Boussinesq e Cerruti, che esprimono lo spostamento del generico punto di un suolo elastico in funzione degli sforzi agenti sul piano limite (cfr [1] p. 126), l'autore mostra che la ricerca degli sforzi tangenziali ( $l_*$ ,  $m_*$ ) nella ellisse  $\sigma_*$ , di dimensioni incognite, si traduce nella risoluzione del seguente sistema di equazioni integrodifferenziali

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_{\sigma_*} \left[ \chi \frac{l_* - l_\tau}{r} - \chi (l_* - l_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \chi (m_* - m_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \right] d\xi d\eta &= \\ &= - \int_{\sigma} \left[ \chi \frac{l_\tau}{r} - \chi l_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \chi m_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \right] d\xi d\eta - \omega y \\ \int_{\sigma_*} \left[ \chi \frac{m_* - m_\tau}{r} - \chi (m_* - m_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \chi (l_* - l_\tau) \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \right] d\xi d\eta &= \\ &= - \int_{\sigma} \left[ \chi \frac{m_\tau}{r} - \chi m_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \chi l_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \right] d\xi d\eta + \omega x \end{aligned}$$

(1) L'autore aveva precedentemente dimostrato nella stessa Nota che la soluzione del problema di contatto nel caso di assenza di slittamento era data da

$$l_\tau = \alpha \omega \frac{\partial \mu}{\partial y} \quad m_\tau = \beta \omega \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  hanno appunto l'espressione (4) e (5). Lo stesso risultato era già stato ottenuto, per altra via, da Mindlin [4].

con  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ ,  $\kappa = \frac{1}{2\pi\mu}$ ,  $\chi = \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda + \mu)}$ , essendo  $\lambda$  e  $\mu$  le due costanti di Lamé e dove  $\omega$  rappresenta la rotazione rigida di  $C_1$  rispetto a  $C_2$ . In tali equazioni i secondi membri sono noti, mentre si possono considerare incognite le funzioni di  $\xi$  e  $\eta$ ,  $l_* - l_\tau$  ed  $m_* - m_\tau$ , definite in  $\sigma_*$ , nonché i semiassi  $a_*$  e  $b_*$  di  $\sigma_*$  medesima, o, se si vuole, il rapporto

$$(9) \quad \lambda = \frac{a_*}{a} = \frac{b_*}{b}$$

di omotetia tra  $\sigma_*$  e  $\sigma$ .

## 2. COSTRUZIONE DELLA SOLUZIONE.

Nella Nota [6], Cattaneo stabilisce un procedimento di approssimazione, valido anche per il caso generale [8], che si basa sulla possibilità di approssimare, nei punti di  $\tau$  e per piccoli valori di  $\omega$ , la  $F(\mu)$  con un numero finito, ma comunque elevato, di termini del suo sviluppo in serie di potenze, e permette, in conseguenza, il calcolo di soluzioni approssimate di ordine qualunque.

Dal confronto delle soluzioni corrispondenti allo stesso ordine  $n$  di approssimazione relative rispettivamente al caso di due sfere e al caso generale si può mettere in luce la seguente analogia formale: indicate con  $(l_\tau^{(n)}, m_\tau^{(n)})$  le componenti secondo gli assi di  $\sigma$  dello sforzo tangenziale in  $\tau$  relativo all' $n$ -ma approssimazione e con  $(l_*^{(n)}, m_*^{(n)})$  le corrispondenti componenti dello sforzo tangenziale in  $\sigma_*$ , sia nel caso di due sfere sia nel caso generale, per l'approssimazione d'ordine  $n$  la soluzione si può porre nella forma seguente:

$$(10) \quad \begin{cases} l_*^{(n)} - l_\tau^{(n)} = l_\tau^{(n)} \varphi^{(n)}(\lambda, \mu_*) \\ m_*^{(n)} - m_\tau^{(n)} = m_\tau^{(n)} \varphi^{(n)}(\lambda, \mu_*) \\ \omega = Gh^{(n)}(\lambda) \end{cases}$$

dalla quale si ottiene la soluzione relativa al caso di due sfere ( $a = b$ ,  $a_* = b_*$ ) con le posizioni

$$(11) \quad \lambda = \frac{a_*}{a}, \quad \mu_* = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a_*^2}\right)^{1/2}, \quad G = \frac{3fP\pi\kappa}{8a^2}$$

e la soluzione relativa al caso generale con le posizioni

$$(12) \quad \lambda = \frac{a_*}{a} = \frac{b_*}{b}, \quad \mu_* = \left(1 - \frac{x^2}{a_*^2} - \frac{y^2}{b_*^2}\right)^{1/2}, \quad G = -\frac{3fP}{4\pi b_*^2}$$

le funzioni  $\varphi^{(n)}(\lambda, \mu_*)$  e  $h^{(n)}(\lambda)$  variando da una approssimazione all'altra, ma restando le stesse per una stessa approssimazione nei due casi.

La (10)<sub>3</sub> permette di determinare, per l' $n$ -ma approssimazione, il valore di  $\lambda$  in funzione di  $\omega$ , come la più piccola radice che coincide con 1 per  $\omega = 0$ , e, per tale valore di  $\lambda$ , le (10)<sub>1</sub> e (10)<sub>2</sub> definiscono completamente gli incogniti sforzi  $l_*^{(n)}$  ed  $m_*^{(n)}$ .

Poiché tale legge formale con la quale si passa da una soluzione approssimata relativa al caso di due sfere alla corrispondente soluzione approssimata relativa al caso generale, è valida per qualunque ordine di approssima-

zione, appare naturale tentare di costruire la soluzione esatta relativa al caso generale applicando la medesima legge alla soluzione esatta data da Lubkin nel caso di due sfere [5]. Quest'ultima soluzione si può porre effettivamente nella forma (10). Si ha precisamente

$$\begin{aligned} l_* - l_\tau &= l_\tau \frac{2}{\pi} [k^2 D(k) F(\lambda, \theta) - K(k) E(\lambda, \theta)] \\ m_* - m_\tau &= m_\tau \frac{2}{\pi} [k^2 D(k) F(\lambda, \theta) - K(k) E(\lambda, \theta)] \\ \omega &= G \left\{ \frac{4}{\pi} [K(k) - E(k)] \right\} \end{aligned}$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a_*}{a}, \quad k^2 = 1 - \lambda^2, \quad \text{sen } \theta = \frac{\mu_*}{\mu} \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad \mu_* = \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{a_*^2} \right)^{1/2} \\ \mu &= (k^2 + \lambda^2 \mu_*^2)^{1/2}, \quad G = \frac{3fP\pi\alpha}{8a^2}, \quad D(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2} \end{aligned}$$

$K(k)$  ed  $E(k)$  rappresentando gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie di modulo  $k$  e dove  $F(\lambda, \theta)$  ed  $E(\lambda, \theta)$  sono gli integrali ellittici incompleti di prima e seconda specie di modulo  $\lambda$  e angolo  $\theta$ .

La materiale sostituzione dei valori (12) per  $\lambda, \mu_*, G$  conduce a presumere per il caso generale la seguente soluzione:

$$\begin{aligned} l_* - l_\tau &= l_\tau \frac{2}{\pi} [k^2 D(k) F(\lambda, \theta) - K(k) E(\lambda, \theta)] \\ (13) \quad m_* - m_\tau &= m_\tau \frac{2}{\pi} [k^2 D(k) F(\lambda, \theta) - K(k) E(\lambda, \theta)] \\ \omega &= - \frac{3fP}{\pi^2 b\beta} [K(k) - E(k)] \end{aligned}$$

dove è:

$$\begin{aligned} l_\tau &= \frac{3fP\alpha}{2\pi b^3\beta} \frac{\mu y}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad m_\tau = \frac{3fP}{2\pi a^2 b} \frac{\mu x}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad (2) \\ \lambda &= \frac{a_*}{a} = \frac{b_*}{b}, \quad k = \sqrt{1 - \lambda^2}, \\ \mu_* &= \left( 1 - \frac{x^2}{a_*^2} - \frac{y^2}{b_*^2} \right)^{1/2}, \quad \mu = \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}, \\ \text{sen } \theta &= \frac{\mu_*}{\mu} \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad F(\lambda, \theta) = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \varphi}} \end{aligned}$$

(2)  $\alpha$  e  $\beta$  hanno ancora il significato (4) e (5).

$$E(\lambda, \theta) = \int_0^\theta \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad D(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2}.$$

Si può controllare facilmente che per  $a = b$  le (13) si riducono alla soluzione relativa al caso di due sfere e, inoltre, che la soluzione così ottenuta differisce dalla soluzione di  $n$ -ma approssimazione ottenuta da Cattaneo a meno di infinitesimi di ordine superiore ad  $n$  in  $1 - \lambda$ . Ciò giustifica in parte le induzioni con cui è stata costruita la (13). Resta ora da effettuare il controllo rigoroso.

### 3. VERIFICA DELLA SOLUZIONE.

Mostreremo con tutto rigore che le  $(13)_1$ ,  $(13)_2$  soddisfano il sistema di equazioni integrodifferenziali (8) purché i semiassi  $a_* = \lambda a$ ,  $b_* = \lambda b$  siano individuati, tramite  $\lambda$ , dalla  $(13)_3$ .

Osserviamo innanzitutto che posto

$$F(x, y; \xi, \eta) = x \frac{l_\tau}{r} - \chi l_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \chi m_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}$$

$$\Phi(x, y; \xi, \eta) = x \frac{m_\tau}{r} - \chi m_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - \chi l_\tau \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}$$

$$\varphi(\xi, \eta; \lambda) = \frac{2}{\pi} [k^2 D(k) F(\lambda, \theta) - K(k) E(\lambda, \theta)]$$

con

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad l_\tau = \frac{3fPz}{2\pi b^3} \frac{\mu(\xi, \eta) \cdot \eta}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad m_\tau = \frac{3fP}{2\pi a^2 b} \frac{\mu(\xi, \eta) \xi}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

e sostituita la soluzione presunta (13) nelle equazioni (8), queste assumono la forma

$$(14) \quad \begin{cases} \int_{\sigma_x} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = - \int_{\sigma} F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta - \omega y \\ \int_{\sigma_x} \varphi(\xi, \eta; \lambda) \Phi(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = - \int_{\sigma} \Phi(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta + \omega x. \end{cases}$$

Effettueremo la verifica solo per la prima delle (14) valendo lo stesso procedimento per la seconda equazione.

Si può facilmente controllare che risulta

$$(15) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \varphi(\xi, \eta; \lambda) = -1$$

$$(16) \quad \varphi(\xi, \eta; \lambda) = 0 \quad \text{per} \quad 1 - \frac{\xi^2}{a_*^2} - \frac{\eta^2}{b_*^2} = 0$$

e che di conseguenza, come verrà mostrato rigorosamente in un più diffuso lavoro, è

$$(17) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = - \int_0^1 F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{\sigma_*(\lambda)} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\lambda = \lambda(\omega)).$$

Ciò premesso, derivando primo e secondo membro della (14)<sub>x</sub> rispetto ad  $\omega$ , risulta

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = -1$$

che, in virtù della (17), è equivalente alla (14)<sub>1</sub>. È sufficiente pertanto verificare la (19). Stante la (18) risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta &= \kappa \alpha \lambda \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma_*(\lambda)} \frac{\mu_*}{r} d\xi d\eta - \\ &- \chi (\alpha + \beta) \lambda \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \int_{\sigma_*(\lambda)} \mu_* \cdot r d\xi d\eta \end{aligned}$$

ed esplicitando i due integrali che compaiono a secondo membro (cfr. [7] pp. 7 e 11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{\sigma_*(\lambda)} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta &= \\ &- \left\{ \kappa (B\alpha - A\beta) + \kappa (B\alpha + A\beta) - 2\chi \frac{Aa^2 - Bb^2}{a^2 - b^2} (\alpha + \beta) \right\} y. \end{aligned}$$

Essendo infine (cfr. [8] p. 31)

$$\kappa (B\alpha + A\beta) - 2\chi \frac{Aa^2 - Bb^2}{a^2 - b^2} (\alpha + \beta) = 0$$

$$\kappa (B\alpha - A\beta) = 1$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \int_{\sigma_*} \varphi(\xi, \eta; \lambda) F(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = -y \quad \text{c. v. d.}$$

Poiché in modo del tutto analogo si può controllare la (14)<sub>a</sub>, resta provato che, nelle ipotesi poste (cfr. I), il quadro (13) fornisce l'esatta soluzione matematica del problema considerato.

# BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. CESÀRO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, Torino, Bocca (1894).
- [2] A. E. LOVE, *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, fourth edition (1934).
- [3] C. CATTANEO, *Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », Cl. Sc. fis. mat. nat., vol. XXVII, serie 6<sup>a</sup>, I sem., fasc. 7 (1938).
- [4] R. D. MINDLIN, *Compliance of Elastic Bodies in Contact*, « Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME », September (1949).
- [5] J. L. LUBKIN, *The Torsion of elastic Spheres in Contact*, « Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME », June (1951).
- [6] C. CATTANEO, *Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. VI, fasc. 1-2 (1952).
- [7] M. PACELLI, *Esame di una successione di potenziali di strato ellittico con applicazione a problemi armonici nello spazio e nel semispazio*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. IX, fasc. 1-2 (1955).
- [8] C. CATTANEO, *Compressione e torsione nel contatto tra corpi elastici di forma qualunque*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. IX, fasc. 1-2 (1955).

**Astronomia** (Astrofisica). — *Sur la durée d'existence des flocculi brillants de la chromosphère solaire*. Nota di COSTANTIN MACRIS, presentata (\*) dal Corrisp. G. RIGHINI.

Pour une première détermination de la durée de vie des flocculi brillants (1) de la chromosphère solaire, nous avons obtenu plusieurs séries d'images en calcium ionisé (Raie  $K_{2,3}$ ) avec la tour solaire de l'Observatoire de Arcetri. Chaque plaque porte un étalonnage photométrique obtenu au moyen d'un échelon de platine placé sur la fente.

Le spectrohéliographe de Arcetri est installé verticalement. Le faisceau solaire lui est reçu par un coelostat et un deuxième miroir qui se trouve au sommet de la tour dont la hauteur est de 25 m.

Le miroir du coelostat a 40 cm de diamètre, suit le mouvement diurne à l'aide d'un contrôle électrique. Le faisceau tombant sur le miroir du coelostat, est réfléchi dans le plan méridien par le deuxième miroir du même diamètre qui le renvoie verticalement sur l'objectif. On peut utiliser deux objectifs astronomiques; l'un a 15 cm d'ouverture et 7 m de distance focale, forme une image solaire de diamètre 63 mm environ; l'autre a 30 cm d'ouverture et 18 m de distance focale, donne une image solaire de 166 mm de diamètre. La distance focale, pour les deux objectifs, varie de 27 mm entre 3900 Å et 6500 Å. Le spectrohéliographe se compose d'une chambre, un collimateur et un organe dispersif qui est un réseau plan ayant 600 traits au millimètre et une sur-

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

1) Nous adopterons ici la terminologie de H. DESLANDRES et nous appellerons ces petites taches isolées et brillantes flocculi en gardant pour les masses compactes et brillantes qui apparaissent dans les zones royales le terme facules chromosphériques.

face striée de 7 cm sur 12 cm. L'objectif du collimateur a 15 cm d'ouverture et 4 m de distance focale. Le spectre donné est stigmatique et la dispersion du spectrographe rejoint 3,3 Å/mm pour la raie  $K_{2,3}$ . Pour les images en H $\alpha$  les deux fentes du spectrographe ont la même largeur de 0,1 mm, tandis que pour la raie K la première fente garde la même largeur et la deuxième fente est de 0,05 mm.

Pour déterminer la durée de vie des flocculi brillants, nous avons utilisé l'objectif de 15 cm, donnant sur la plaque photographique une image du soleil de 63 mm. Un millimètre sur l'image correspond à 31" environ.

Comme il est bien connu la structure d'une image en  $K_{2,3}$  ou en  $K_3$  du calcium ionisé consiste en un réseau de petites taches brillantes qui sont visibles sur tout le disque solaire, de l'équateur jusqu'aux poles. Les petites taches dans les zones royales en montrant un éclat vif, se réunissent en masses et forment les facules chromosphériques.

Toutes les images prises montrent le réseau des flocculi et les filaments le plus étendus. Le spectrohéliographe de Arcetri n'isole que la raie  $K_{2,3}$  ainsi les spectrohéliogrammes obtenus bien que se rapportant à la chromosphère moyenne, sont analogues, en ce qui concerne la structure générale (flocculi et facules chromosphériques) à ceux donnés par  $K_3$ .

Le 31 Juillet de cette année nous avons pris la première série d'images. Cette série est formée par 16 images en  $K_{2,3}$ . L'intervalle de temps entre deux clichés est environ d'une demi heure.

Tous les flocculi mesurés, se trouvent en dehors des régions perturbées. Nous avons choisi trois régions plus au moins calmes. Deux régions sont situées dans les régions polaires entre  $\pm 45^\circ$  et  $90^\circ$ , la troisième contient une zone à l'équateur de  $+10^\circ$  jusqu'à  $-10^\circ$ .

Parmi les 200 flocculi brillants dont nous avons déterminé la durée de vie et simultanément leurs dimensions, 140 de ces flocculi se trouvent dans les régions polaires, tandis que les autres 60 sont situés dans la zone équatoriale.

Nos mesures se rapportent aux flocculi dont le diamètre moyen s'étend de 6" jusqu'à 20". Dans ces flocculi nous avons observé plusieurs fois, sur les belles épreuves, une subdivision composée par des éléments beaucoup plus petits. Nous les avons trouvés compris entre trois ou quatre et plusieurs seconds d'arc. Quelques fois on distingue trois ou quatre petits éléments en chapelet, parmi lesquels un éclat plus faible de ces noyaux remplit les espaces vides entre eux, en formant ainsi un élément de dimensions qui s'étendent de 15" jusqu'à 20".

Les premières mesures nous ont donné les résultats suivants:

- 1) La durée de vie des flocculi des régions polaires est comprise entre 6 heures et 14 heures environ. Leur configuration reste constante mais leurs éclats varient d'une façon bien distincte.

- 2) La durée de vie des flocculi équatoriaux est un peu plus petite mais leurs aspects et leurs éclats changent sensiblement au cours de leur existence. On voit les flocculi se modifier continuellement; leur grandeur et leur éclat subissent des fluctuations considérables à chaque image.

En plus de la série des spectrohéliogrammes du 31 juillet, nous avons pris deux séries encore. La première le 8, 9, 10 Août et l'autre le 20, 21 Août 1956. Des recherches destinées à préciser beaucoup mieux les questions concernant les flocculi du calcium sont en cours et une étude complète apparaîtra prochainement, après l'élaboration du matériel que nous avons obtenu au spectrohéliographe de Arcetri.

Je suis heureux de remercier ici le Professeur G. Abetti, le Professeur G. Righini, Directeur de l'Observatoire d'Arcetri, M. le M. C. Ballario, astronome, pour l'accueil chaleureux et l'aide précieux qu'ils m'ont donnés au cours de ce travail. Beaucoup de travail, en ce qui concerne le développement des plaques et la préparations des positifs nécessaires, a été exécuté par M. B. Romagnoli. Je lui adresse mes remerciements les plus sincères.

### Chimica agraria. — *Specificità d'azione degli anticrittogamici*<sup>(\*)</sup>.

Nota <sup>(\*\*)</sup> di BRUNO CASARINI e ENRICO PUCCI, presentata dal Socio G. B. BONINO.

Le prove di laboratorio hanno una fondamentale importanza nella ricerca di nuovi anticrittogamici in quanto permettono una prima selezione delle sostanze chimiche per le quali non è ancora nota un'azione fungicida, ed è possibile così concentrare su queste sostanze le successive laboriose, costose e spesso aleatorie prove di campo. In altre parole i saggi di laboratorio assolvono fondamentalmente il compito di accelerare i tempi nella fase iniziale della valutazione degli antiparassitari.

In tali prove, però, si utilizzano normalmente, come test, certi micromiceti notevolmente differenti da un punto di vista morfologico non meno che fisiologico — compreso quello della sensibilità alle sostanze chimiche — dai funghi contro i quali i fitofarmaci, in agricoltura, vengono applicati.

Colle ricerche di cui ora riferiremo <sup>(1)</sup> noi abbiamo voluto, appunto, controllare se e quale rapporto vi sia tra i risultati di tossicità rilevati su funghi-test e quelli ottenuti con alcuni funghi fitopatogeni in rapporto alle principali categorie di anticrittogamici che oggi giorno maggiormente richiamano l'attenzione degli studiosi e della industria.

Più precisamente abbiamo preso in considerazione le seguenti sostanze:

Ossicloruro di Cu e Ca al 16% di Cu (come « polvere Caffaro »); Etilenbisditiocarbammato di zinco (come « Aspor »); TMTD (come « Pomarsol »); 2, 4 dicloro-6-(*o*-cloroanilina) 1, 3, 5 triazina al 50% di p. a.; composto ftalimidico (come « SR 406 »); composto mercuriorganico (come « Verdosan »).

(\*) Lavoro eseguito all'Istituto di Patologia vegetale dell'Università di Bologna.

(\*\*) Pervenuta il 17 ottobre 1956.

(1) Con maggiori dettagli l'argomento verrà trattato in una relazione in corso di stampa in altra sede.

Fra i funghi test abbiamo scelto *Alternaria oleracea* e *Macrosporium sarcinaeforme*; fra i fitopatogeni *Cercospora beticola*, *Sclerotinia fructigena*, *Fusicladium dendriticum* e *Plasmopara viticola*.

I mezzi di coltura dei funghi erano i seguenti:

per i funghi test, agar patata glucosato; per *Fusicladium d.*, agar carota; per *Sclerotinia f.*, frutti di melo mantenuti in ambienti condizionati; per *Plasmopara v.* e *Cercospora b.*, piante mantenute in apposite camere di incubazione. Per questi ultimi funghi erano seguiti particolari accorgimenti al fine di ottenere conidi ad alta percentuale di germinabilità.

Il metodo di saggio consisteva nell'effettuare delle diluizioni di anticrittogamico doppie di quelle a cui si effettuava il saggio (166, 55, 18, 6, 2 parti per milione) e di aggiungere, in speciali provette, ad 1 cc di sospensione anticrittogamica, 1 cc di sospensione di spore a concentrazione doppia di quella desiderata, che è di 50.000 spore per cc.

Della sospensione di spore più anticrittogamico venivano poi fatte gocce su appositi vetrini forniti di incisioni anulari.

La lettura delle spore germinate e non germinate veniva effettuata dopo 24 ore di permanenza in camera umida alla temperatura di 25° C per *Cercospora b.* e di 20° C per tutti gli altri funghi.

I dati di inibizione corretti venivano posti su carte logaritmiche di probabilità (Wahrscheinlichkeitsnetz 297 1/2 A 3), determinando per ogni retta il  $X^2$  e la probabilità corrispondente nella tavola del Fisher.

I risultati in parti per milione, espressi come DL 50 delle rette più probabili, sono riportati nella seguente tabella.

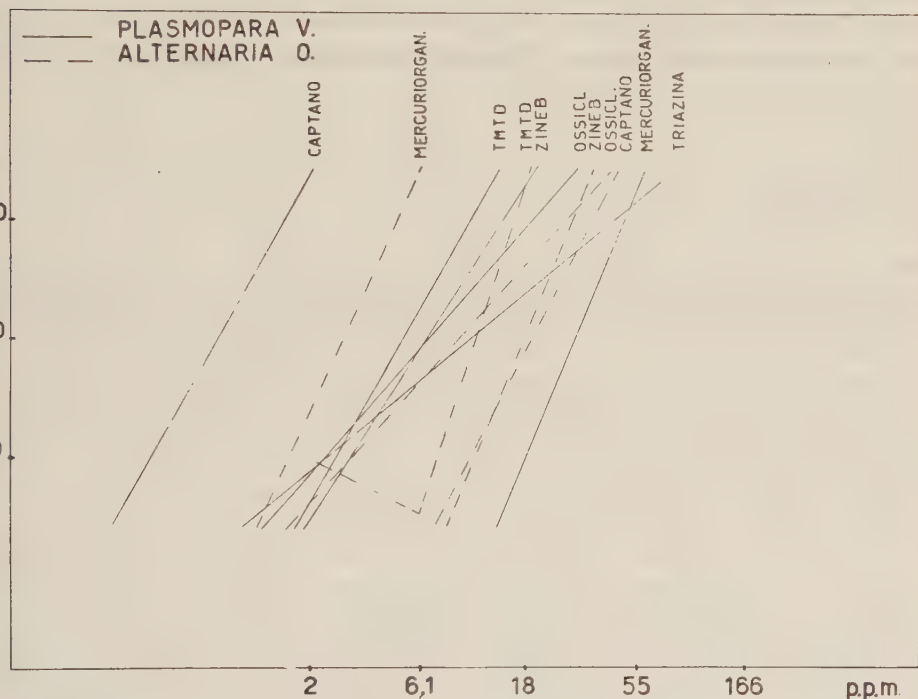
|                                  | Ossicloruro | Zineb | Captano | TMTD | Mercuriorganico | Triazina |
|----------------------------------|-------------|-------|---------|------|-----------------|----------|
| <i>Macrosporium s.</i> . . . . . | 7,6         | 3,7   | 50      | 18   | < 2             | 1,6      |
| <i>Cercospora b.</i> . . . . .   | 23          | 40    | 13      | 6,1  | < 2             | < 2      |
| <i>Sclerotinia f.</i> . . . . .  | 9,2         | 44    | < 2     | 3,3  | 5,7             | < 2      |
| <i>Fusicladium d.</i> . . . . .  | 30          | 3,3   | 1,2     | 4,7  | < 2             | 1,3      |
| <i>Plasmopara v.</i> . . . . .   | 6,5         | 6,3   | 0,8     | 5,1  | 30              | 10       |
| <i>Alternaria o.</i> . . . . .   | 8,8         | 17,5  | 19,1    | 10,9 | 2,8             | < 2      |

Come esempio della diversa sensibilità dei funghi ai vari anticrittogamici si riportano le linee di regressione riguardanti *Plasmopara v.* e *Alternaria o.*

Dalla comparazione dei DL 50 risulta che vi è una certa corrispondenza nella sensibilità agli anticrittogamici fra i funghi test e *Cercospora b.* mentre non vi è la minima corrispondenza fra i suddetti e *Plasmopara v.* (vedi grafico).

L'ossicloruro anche a basso tenore di principio attivo ha dimostrato una buona efficacia contro tutte le specie provate se si eccettua *Fusicladium d.*

Lo Zineb ha dimostrato un'efficacia buona contro *Plasmopara v.*, *Fusicladium d.*, *Macrosporium s.*; discreta contro *Alternaria o.* e *Cercospora b.*; assai scarsa contro *Sclerotinia f.*



Nel grafico sono riportate in ascisse i logaritmi delle concentrazioni in parti per milione (ppm) e in ordinate le inibizioni di germinazione secondo Gaddum (Wahrscheinlichkeitsnetz 297 1/2 A 3).

Il Captano ha dimostrato efficacia ottima contro *Plasmopara v.*, *Fusicladium d.* e *Sclerotinia f.*; scarsa contro *Cercospora b.*, *Macrosporium s.* e *Alternaria o.*

Il TMD ha dimostrato efficacia ottima contro *Sclerotinia f.*; buona contro *Fusicladium d.*, *Plasmopara v.* e *Cercospora b.*; mediocre contro *Macrosporium s.* e *Alternaria o.*

Il mercuriorganico ha un'efficacia ottima contro *Cercospora b.*, *Alternaria o.*, *Fusicladium d.*, *Macrosporium s.*; discreta contro *Sclerotinia f.*; mediocre contro *Plasmopara v.*

Il composto triazinico presenta efficacia ottima contro tutte le specie esclusa *Plasmopara v.*

In conclusione, dalle nostre prove risulta che l'efficacia di un medesimo antiparassitario può risultare anche molto diversa a seconda della specie fungina su cui agisce. Per cui i saggi condotti coi funghi test possono solo indicare grossolanamente ed assai genericamente che una determinata sostanza possiede tossicità verso agenti fungini, ma non forniscono indicazioni attendibili sulla efficacia delle sostanze medesime nei riguardi delle singole crittogame.

Noi riteniamo insomma che la gran parte dei metodi di saggio preliminari dei fungicidi ora in uso, appunto perché basati sull'impiego dei funghi test in vitro, non assolvono che in minima proporzione i compiti loro assegnati; poiché, se da un canto riescono a far superare rapidamente le prime fasi dei controlli, possono d'altro canto richiamare l'attenzione (colla messa in opera quindi dei relativi dispendiosi mezzi sperimentali) su sostanze che non hanno significato per i funghi fitopatogeni e distrarla da altre che invece sarebbe utile mettere in luce.

**Chimica.** — *Un nuovo carotenoide: la micoxantina* (\*). Nota (\*\*)  
di ALDO GAUDIANO, presentata dal Corrisp. D. MAROTTA.

Nel corso delle ricerche, da alcuni anni intraprese, sui pigmenti dei Micobatteri, abbiamo potuto mettere in evidenza, nel *Mycobacterium phlei* [1], un nuovo carotenoide, che designammo provvisoriamente, in base al suo comportamento chimico, « carotenoide acido ».

Successivamente trovammo questo carotenoide in altri Micobatteri (*Myc. marianum* [2, 3] e *Myc. Battaglini* [4]); non lo trovammo in *Myc. minetti* [5, 6], il cui micelio è quasi incolore.

Dato che si tratta di un carotenoide giallo, da noi per la prima volta trovato nei Micobatteri, abbiamo scelto per esso il nome di « micoxantina ».

Questo carotenoide è probabilmente sfuggito ai ricercatori che hanno studiato i carotenoidi micobatterici perché, contrariamente alla maggior parte degli altri, passa nell'insaponificabile solo in determinate condizioni. Se si estrae il micelio con acetone e si saponifica l'estratto come indicato altrove [1], si ottiene un liquido color rosso-arancio, che cede solo in parte il suo colore all'etere di petrolio. Il liquido esaurito con etere di petrolio contiene la micoxantina, che può essere a tal punto estratta con etere o, dopo acidificazione con acido acetico (pH 4-5), con etere di petrolio. Si tratterebbe quindi di un carotenoide a carattere acido (o enolico), che in forma salificata si può estrarre con etere, ma non con etere di petrolio. In forma « acida » è invece estraibile anche con etere di petrolio. È da notare, però, che, se si agita con soluzione di NaOH l'estratto petroletereo, questo non cede all'alcali il suo colore.

La micoxantina si può purificare cromatografandone la soluzione petrol-etera su idrossido o, meglio, su carbonato di calcio; la banda gialla che si

\*) Lavoro eseguito nel laboratorio di Biologia dell'Istituto superiore di Sanità.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1956.

ottiene si può eluire con cloroformio o con etere di petrolio contenente il 10-20 % di metanolo. L'eluizione è più facile dal carbonato di calcio che non dall'idrossido. Questo fatto, unito all'osservazione che la micoxantina nella prova di ripartizione fra etere di petrolio e metanolo a 95 % è ipofasica, mentre con metanolo a 90 % si equiripartisce, indica che non si tratta di un idrocarburo, ma di un composto la cui molecola contiene almeno 1 atomo di ossigeno.

La micoxantina è solubile in etere, etere di petrolio, cloroformio, solfuro di carbonio; è poco solubile in metanolo e in etanolo; praticamente insolubile in etanolo a 95 %.

La soluzione cloroformica dà colorazione azzurra con tricloruro d'antimonio.

Lo spettro d'assorbimento della micoxantina mostra i seguenti massimi:

in etere o etere di petrolio: 385, 406 e 430 m $\mu$ ;

in cloroformio: 390, 415 e 440 m $\mu$ ;

in solfuro di carbonio: 405, 429 e 464 m $\mu$ .

Il massimo d'assorbimento alla lunghezza d'onda intermedia è maggiore degli altri due.

Lo spettro d'assorbimento è tipico dei carotenoidi; dalla posizione dei massimi, che, rispetto agli altri carotenoidi, è spostata verso l'U. V., si può dedurre che la molecola della micoxantina deve contenere un numero relativamente piccolo di doppi legami coniugati o, comunque, un gruppo cromoforo relativamente corto.

Spettro analogo mostra un carotenoide trovato da Turian e Haxo [7] nel *Myc. phlei* coltivato in presenza di difenilammina (massimi d'assorbimento in etere di petrolio a 384, 403, 426 e 454 m $\mu$ ); ma questo carotenoide (probabilmente flavacina) si distingue nettamente dal nostro perché è estraibile dalle soluzioni alcaline con etere di petrolio e perché è epifasico con metanolo a 95 %.

Lo stesso Turian [8] ha isolato dal *Myc. phlei* un pigmento ipofasico che mostra caratteristiche di solubilità analoghe a quelle della micoxantina (il sale di potassio è solubile in etere, ma non in etere di petrolio), ma che ne differisce nettamente per lo spettro (in etere di petrolio un solo massimo d'assorbimento, a 452 m $\mu$ ).

È nostro intendimento estendere ad altri materiali biologici la ricerca della micoxantina e, se potremo disporre di materiale sufficiente, cercare di chiarire la struttura chimica di questo carotenoide.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] PENSO G. e Coll., « Rend. Ist. Sup. San. », 14, 855 (1951).
- [2] PENSO G. e SOEUR MARIE SUZANNE, « Rend. Ist. Sup. San. », 17, 962 (1954).
- [3] PENSO G. e Coll., « Rend. Ist. Sup. San. » (in corso di pubblicazione).
- [4] PENSO G. e Coll., « Rend. Ist. Sup. San. » (in corso di pubblicazione).
- [5] PENSO G. e Coll., questi « Rend. », 12, 108 (1952).
- [6] PENSO G. e Coll., « Rend. Ist. Sup. San. », 15, 491 (1952).
- [7] TURIAN G. e HAXO F., « J. Bacteriol. », 63, 690 (1952).
- [8] TURIAN G., « Helv. Chim. Acta », 33, 1303 (1950).

**Chimica.** — *Ripartizione di radioelementi tra i minerali di alcune lave: contenuto in radio di leuciti recenti* (\*). Nota di CARLO BETTINALI, FRANCO SALVETTI e GIULIO ALBERTI, presentata (\*\*) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Nella presente Nota riportiamo i primi risultati di alcune nostre ricerche dirette a conoscere la ripartizione dei singoli membri delle famiglie radioattive fra le varie fasi che costituiscono alcune rocce effusive. È noto da tempo il frazionamento naturale dei vari membri di una famiglia radioattiva determinato da processi chimici o fisici: così ad esempio lo ionio si concentra nei sedimenti marini, separandosi dall'uranio contenuto nell'acqua del mare [1, 2, 3]; il radio si concentra nei noduli manganesiferi del fondo marino [4, 5]; il radio D (Pb 210) si trova nei minerali di piombo delle fumarole [6]. E così il frazionamento degli elementi delle famiglie radioattive tra le acque minerali e le rocce che esse attraversano, può servire per dare notizia dell'origine e percorso delle acque stesse [7, 8].

La differenza di proprietà chimico-fisiche degli elementi radioattivi presenti nel magma fuso, lascia prevedere che durante il processo di formazione ed accrescimento dei cristalli, alcuni elementi delle famiglie radioattive dell'uranio e del torio vengono accolti separatamente nelle diverse specie di minerali che prendono origine nel consolidamento del magma stesso.

Riportiamo i dati relativi al contenuto di radio e uranio da noi determinato su campioni di leucite che abbiamo isolato da alcune lave di epoca recente e delle rispettive lave *in oto* (comprendenti quindi anche la leucite) (1) e inoltre su campioni di leuciti che abbiamo isolato da lave sufficientemente antiche perché il radio non in equilibrio con l'uranio sia sicuramente decaduto e sulle corrispondenti lave. Per alcune leuciti non è stato possibile procurarsi le lave corrispondenti. I cristalli di leucite sono stati separati meccanicamente dalle lave.

Le lave da noi esaminate sono:

Camp. N. 2 - Lava vesuviana del 1944. Si tratta di una tefrite leucitica a struttura porfirica con fenocristalli di leucite della dimensione di qualche millimetro e più raramente di augite. La massa fondamentale è costituita da un feltro di microliti di plagioclasio e leucite, ambedue in microfenocristalli, augite e magnetite; subordinati: sanidino, nefelina, apatite, biotite.

Camp. N. 4 - Lava vesuviana 1942. Composizione simile al campione precedente.

\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale e Inorganica dell'Università e Centro di Chimica Generale del C.N.R., Roma.

\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

1) La ricerca di uranio e radio è stata fatta sottoponendo all'analisi campioni ottenuti macinando quantitativi di lava di varie centinaia di grammi, in modo da avere un campione rappresentativo.

Camp. N. 6 – Lava vesuviana anteriore al 79 d. C. Si tratta di una tefrite leucitica a struttura porfirica con massa fondamentale cristallina a grana fine. I fenocristalli di dimensione di qualche mm. sono costituiti da augite e leucite ben sviluppati. La massa fondamentale è costituita da plagioclasti bytonnitici, augite, leucite e minerali opachi.

Tali campioni ci sono stati gentilmente inviati dal prof. Parascandola che qui sentitamente ringraziamo.

Camp. N. 8. – Lava di Acquapendente. Tale lava è stata da noi prelevata dalla colata esistente all'uscita dell'abitato di Acquapendente (provincia Viterbo) sul margine della strada statale Cassia. Si tratta di una fonolite leucitica a struttura porfirica con fenocristalli di leucite ben sviluppati della dimensione di parecchi millimetri. Presenti anche fenocristalli di sanidino. La massa fondamentale è costituita da feltro di microliti di sanidino, plagioclastio, pirosseni, minerali opachi, biotite.

Camp. N. 10. – Lava M. Tonocco. Campione da noi prelevato in una cava situata al IV km della strada fra Gradoli e la statale Cassia.

Si tratta di una fonolite leucitica di composizione simile alla precedente.

Il radon è stato determinato sul materiale portato in soluzione previa disgregazione con comuni metodi, mediante la misura del radon fatto accumulare [9], effettuata con la camera di ionizzazione già da noi precedentemente descritta [10].

Il sistema di misura da noi adottato svela qualitativamente e quantitativamente la presenza del radon: qualitativamente perché viene determinata in ogni misura la curva di decadimento caratteristica del radon in equilibrio col deposito attivo, quantitativamente perché confrontando queste curve con quelle di una soluzione standard si può risalire al contenuto in radio del campione in esame.

L'uranio è stato determinato fluofotometricamente con le modalità consigliate da Price e collaboratori [11], impiegando un fluofotometro precedentemente descritto [10].

I risultati delle misure sono raccolti nella tabella I.

Il radio contenuto nella lava appartiene naturalmente anche alla leucite inclusa. Di tale fatto è tenuto conto nelle considerazioni che seguono.

Nelle leuciti e lave recenti è evidente la differenza fra la quantità di uranio realmente riscontrata e la quantità calcolata in base al contenuto in radio.

Nelle leuciti e lave antiche, invece si ha, nei limiti dell'errore del metodo, buon accordo fra i valori dell'uranio trovato con il metodo fluofotometrico e quello calcolato dal radio.

I dati riportati nella tabella I dimostrano che le leuciti recenti contengono più radio di quello corrispondente all'uranio in esse presente.

Le leuciti antiche, e cioè di età superiore a 10 dimezzamenti del radio, sono praticamente prive di radio. Ciò può essere spiegato col naturale decadimento del radio in queste inizialmente contenuto.

TABELLA I.

| CAMPIONI                          |         | RADIO<br>g/g · 10 <sup>-12</sup> | URANIO<br>calcolato<br>dal radio<br>g/ton. | URANIO<br>fluofotome-<br>trico<br>g/ton. |
|-----------------------------------|---------|----------------------------------|--|--|
| Recenti: 1) Leucite vesuviana     | 1944    | 28,2                             | 82   | 7  |
| 2) Lava »                         | 1944    | 6,8                              | 20   | 8  |
| 3) Leucite »                      | 1942    | 40,4                             | 107  | 9  |
| 4) Lava »                         | 1942    | 27,6                             | 81   | 9  |
| 5) Leucite vesuv. Ant.            | 79 D.C. | 14,4                             | 42   | 5  |
| 6) Lava » »                       | 79 D.C. | 3,4                              | 10   | 9  |
| Antichi: 7) Leucite Acquapendente |         | 1,8                              | 5,5  | 4  |
| 8) Lava »                         |         | 16,20                            | 47   | 42                                       |
| 9) Leucite M. Tonocco (Bolsena)   |         | 2                                | 6,8  | 5  |
| 10) Lava »                        |         | 11,70                            | 35   | 38,5                                     |
| 11) Leucite Roccamonfina          |         | 1,36                             | 4  | 3  |

Il contenuto in radio delle leuciti non sembra in relazione col contenuto in radio della roccia in cui le leuciti sono inglobate. Ciò è messo bene in evidenza dal fatto che le lave antiche da noi scelte, pur avendo un contenuto in uranio in equilibrio con il radio tra i più elevati fra le rocce effusive, inglobano delle leuciti che risultano povere sia in radio che in uranio.

La concentrazione del radio in un minerale potassico quale la leucite, va collegata con la somiglianza fra il raggio ionico del radio (1,43 Å) e quello degli elementi di cui è nota la coerenza geochemica nelle rocce effusive, quali il potassio (1,33 Å), bario (1,34 Å) rubidio (1,47 Å), cesio (1,62 Å), piombo (1,20 Å). (12,13).

Sulla ripartizione del radio nei vari minerali potassici delle rocce effusive, come pure sulla possibilità di ripartizione di altri termini delle famiglie radioattive, abbiamo in corso ricerche, le quali sono anche dirette ad esaminare la possibilità di calcolare la data di consolidamento del magma sulla base del constatato disequilibrio analogamente a quanto stato fatto per i sedimenti marini contenenti ionio [14].

Ringraziamo il prof. V. Caglioti per i consigli datici nella impostazione e svolgimento del presente lavoro.

Il presente lavoro è stato eseguito col contributo del Comitato Nazionale di Ricerche Nucleari e dell'Ente Nazionale Idrocarburi. Ai suddetti Enti vanno i nostri sentiti ringraziamenti.

## LETTERATURA.

- [1] FOYN ERNEST et AL., *The radioactivity of seawater*, Goteborg K.g.l. Vetenskops-Vitterhets Samhall Handl Ser B. 6, N. 12 (1939).
- [2] HANS PETTERSON, *Die radioaktiven Elemente in Meere*, «Rapp. proc. verbaux Conseil Perm. Inter. Exploration Mer.», 109, N. 9, pp. 66 (1939).
- [3] PIGGOT C. S. and URRY W.M.D., *Radioactivity of ocean sediments*, II<sup>o</sup> Radioactive relations in ocean water and bottom sediments., «Am. Journal of Science», 293, p. 81 (1941).
- [4] HANS PETTERSON, *The geochronology of the deep ocean bed.*, Tellus I p. I (1949).
- [5] HANS PETTERSON, *Manganese nodules on the geochronology of the ocean floor* - Goteborg K. j. l; vetenskops Vitterhets Samhall Handl B, 6, 2, N. 8 (1943).
- [6] BEGEMANN F. et AL., «Nuovo Cimento», II, 663 (1954).
- [7] IWAJI IWASAKI and FUMIO MATSUDA, *Geochemical investigation of strongly radioactive springs*. Il Radium content of hot springs deposits., «J. Chem. Japan Pure Chem. Sect.», 73, 94, 7 (1951).
- [8] PAUL K. KURODA and YUJI YOKAJAMA (Tokio Univ.), *The lauritzen type fontatoscope and its use in geochemistry*, «Chem. Res.» 3; «In.Chem.», 29, 68; «Eng. Sum.» (1948).
- [9] FINEMANN P. e coll., *The transuranium element*, «NNES», p. 1206.
- [10] C. BETTINALI, F. SALVETTI, *Metodo radon e fluorometrico per la determinazione di radio, torio ed uranio nelle rocce*. «Boll. Soc. Geol. Ital.», V, XXXV, Vol. LXXV (1956).
- [11] PRICE, FERRETTI e coll., «Anal. Chem.», vol. 25 p. 362 (1953).
- [12] AHRENS L. H., *The use of ionisation potentials  $\propto$  ionic radii*. «Geochemica and Cosmochemica Acta», vol. II, p. 155 (1951).
- [13] GOLDSCHMIDT V. N., Oxford ed 1954, «Geochemistry», p. 240-250.
- [14] LANE A.C., *Report of committee of age measurement*, «Nat. Res. Council U.S.A.», Washington, p. 49 (1937).

**Chimica.** — *Misura del potenziale di picco in polarografia oscillografica* (\*). Nota di PAOLO FAVERO e ELIO VIANELLO, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Le curve oscillografiche corrente-tensione che si ottengono con la tecnica a sparpagliamento singolo di potenziale, caratterizzate dalla ben nota forma a picco, sono, in linea di principio, suscettibili di fornire sia la coordinata qualitativa che quella quantitativa di analisi. In pratica tuttavia, mentre il dato quantitativo (altezza del picco di corrente) è facilmente misurabile e facilmente relazionabile alle quantità sperimentali (attraverso l'equazione di Randles-Sevcik [1] [2]), il dato qualitativo (potenziale di picco) è difficilmente rilevabile con sufficiente sensibilità e precisione soprattutto per ragioni di natura strumentale.

Il procedimento sperimentale in genere seguito per la determinazione del potenziale di picco consiste nel calibrare potenziometricamente l'asse

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica e Centro di Polarografia del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

orizzontale dell'oscillografo (asse dei potenziali) e nel riferire a tale asse calibrato l'oscillogramma [1] [2] [3] [4] [5].

Tale metodo però, soprattutto a causa dell'instabilità dei sistemi elettronici, non è suscettibile di fornire una misura molto precisa del potenziale di picco; inoltre costringe lo sperimentatore ad una serie laboriosa di operazioni, è poco immediato e quindi poco pratico.

L'apparecchiatura descritta nella presente Nota è stata studiata allo scopo di aumentare la sensibilità e la precisione della misura, di renderla immediata e più agevole.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Lo schema di principio del dispositivo è riportato in fig. 1. Esso consiste essenzialmente di un discriminatore di tensione di appropriata sensibilità

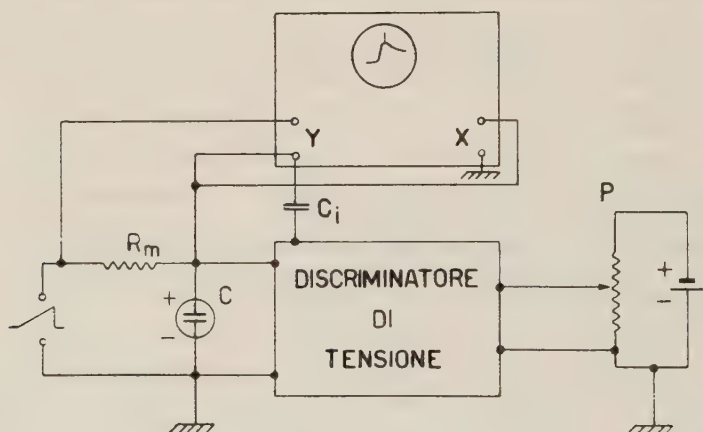


Fig. 1.

in cui vengono confrontate contemporaneamente la tensione applicata ai capi della cella polarografica C e quella fornita da un potenziometro tarato P. Un discriminatore di tensione ha la caratteristica proprietà di fornire una informazione quando due tensioni che vengono in esso confrontate sono uguali; l'informazione viene sotto forma di un impulso di tensione ricavabile da un determinato punto del suo circuito. In base a questa proprietà, dalla fig. 1 è facilmente deducibile il funzionamento del misuratore.

Supponiamo che, per semplicità, la tensione applicata alla cella sia praticamente uguale a quella fornita dal generatore al circuito polarografico  $R_m - C$ . Tale generatore fornisce uno sparpagliamento di tensione ad andamento lineare, di breve durata ( $0,1 \div 2$  sec), con valori generalmente compresi fra 0 e 2 V. Analogamente, la tensione prelevabile dal potenziometro P è compresa fra 0 e 2 V. La tensione applicata alla cella, convenientemente amplificata, alimenta le placche orizzontali dell'oscillografo cosicché esiste una corrispondenza biunivoca fra il valore di questa tensione e la posizione

sull'asse X della traccia oscillografica. L'asse delle Y è invece alimentato dalla caduta di tensione attraverso la resistenza  $R_m$  che è dovuta alla corrente polarografica e che è ovviamente a questa proporzionale.

Sullo schermo oscillografico compare quindi la curva corrente-tensione. Supponiamo ora di fissare un certo valore della tensione prelevata dal potenziometro P in modo che esso sia compreso nell'intervallo di variazione della tensione fornita dal generatore al circuito polarografico. Allora, durante lo sparpagliamento di potenziale, nel momento in cui la tensione ai capi della cella assume lo stesso valore di quella fornita dal potenziometro, il discriminatore di tensione fornirà un impulso. Tramite il condensatore  $C_i$ , questo impulso viene trasferito all'entrata Y e provoca una brusca variazione verticale sulla curva corrente-tensione; date le caratteristiche dell'impulso, esso assume la forma di una marca estremamente stretta come si vede in fig. 2.

Ora è ovvio che, al variare del valore della tensione prelevata dal potenziometro entro il predetto intervallo, la marca così ottenuta assume posizioni variabili entro l'asse X dell'oscillografo. Viene realizzata in tal modo la misura punto a punto del valore della tensione applicata alla cella polarografica, valore che viene letto direttamente sul potenziometro. In particolare il valore della tensione alla quale ha luogo il picco di corrente viene ottenuto facendo coincidere la marca con il picco stesso (fig. 2). Come in polarografia normale, questo valore, corretto per la caduta ohmica, fornisce il potenziale di picco  $\pi_p$  riferito all'elettrodo di confronto usato.

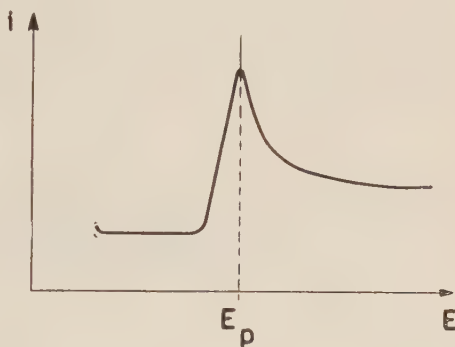


Fig. 2.

Lo schema elettrico del discriminatore è riportato in fig. 3. Esso è costituito da un circuito di Schmitt [6] (tubi  $T_3$  e  $T_4$ ) dotato di una sensibilità dell'ordine di 0,1 V e con una isteresi di circa 1 V. L'impulso viene ricavato dall'anodo di  $T_4$  e, date le caratteristiche dei tubi impiegati, ha un brevissimo tempo di salita; l'impulso ha luogo quando la tensione di griglia controllo di  $T_3$  è uguale, entro 0,1 V, a quella della griglia controllo di  $T_4$  <sup>(1)</sup>. Per assicurare la migliore stabilità possibile, le resistenze impiegate sono tutte a filo e ad alta dissipazione di potenza. La griglia controllo di  $T_3$  è collegata, mediante una resistenza di sicurezza, direttamente all'anodo di  $T_2$  il quale con  $T_1$  costituisce uno stadio amplificatore a differenza [7]. I parametri di questo circuito sono scelti in modo che, quando le tensioni delle due griglie controllo sono uguali, la tensione anodica di  $T_2$  uguagli quella della griglia controllo di  $T_4$ . Dato l'accoppiamento tra  $T_2$  e  $T_3$  questa è la condizione perchè il discriminatore fornisca l'impulso.

(1) Quest'ultima è praticamente determinata dal rapporto delle resistenze  $R_1$  e  $R_2$ .

L'amplificatore a differenza ha un fattore di amplificazione di circa 100 cosicché la sensibilità complessiva risulta dell'ordine del mV (0,1 V/100). La precisione a lungo tempo del complesso è dell'ordine della decina di mV mentre quella a breve tempo non supera in media il mV. Tale precisione dipende essenzialmente dalla stabilità dello stadio a differenza e più precisamente dalla stabilità della tensione sull'anodo di  $T_2$  considerata nella condizione di uguaglianza delle due tensioni di griglia controllo. La deriva della tensione anodica sopraddeita può essere corretta manualmente agendo sui potenziometri  $P_1$  (regolazione grossa) e  $P_2$  (regolazione fine) e modificando perciò leggermente il potenziale del catodo. Questa operazione costituisce la taratura dell'apparecchio e viene fatta precedentemente ad ogni misura

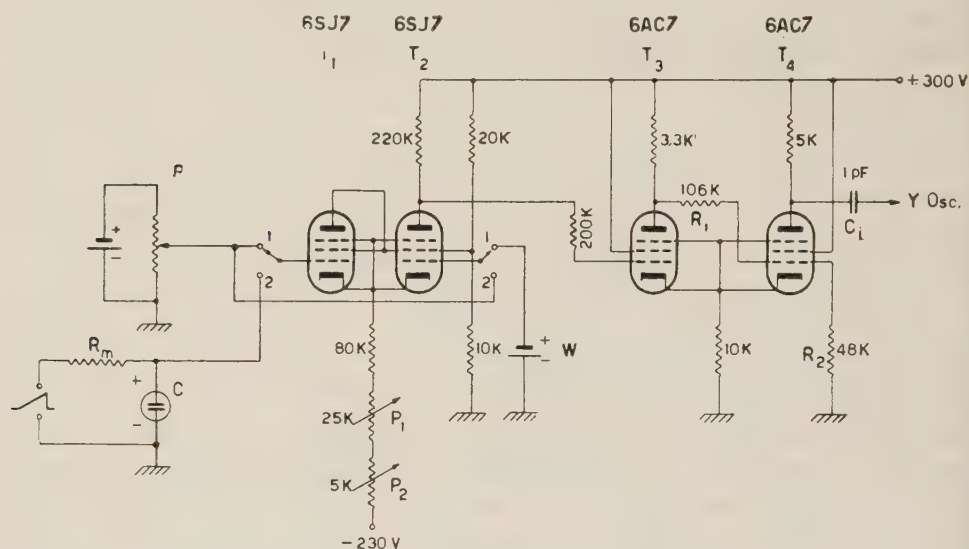


Fig. 3.

quando si voglia ottenere l'ottima prestazione. Per la taratura si procede nel modo seguente: si dispongono i commutatori nella posizione 1 (confronto della tensione fornita da una pila Weston  $W$  con quella del potenziometro  $P$ ) e, operando con la traccia oscillografica ferma, si ricerca il valore della tensione del potenziometro che produce l'impulso. Tale valore sarà in generale diverso da quello della Weston: per successiva regolazione di  $P_1$  e  $P_2$  è possibile far coincidere i due valori e la taratura è effettuata. La misura viene poi eseguita con i commutatori in posizione 2 nella maniera già descritta.

#### RISULTATI SPERIMENTALI.

Per la determinazione delle caratteristiche del misuratore sono stati eseguiti due tipi di misure. In un caso venivano confrontate due tensioni fornite da due potenziometri con una sensibilità di 0,5 mV. Le misure venivano effettuate con tensioni comprese fra 0 e 2 V e venivano ripetute a inter-

valli di tempo regolari. Dai dati così ottenuti risulta che in queste condizioni l'errore assoluto non supera in media il mV. Il secondo tipo di misure è relativo alla precisione della determinazione della tensione di picco  $E_p$ . Allo scopo si è determinata la  $E_p$  per il cadmio in soluzione di KCl 1N; le misure sono state eseguite con anodo interno per rendere minima la resistenza della cella. Veniva usato il metodo precedentemente descritto apprezzando visualmente la coincidenza della marca di tensione con il picco di corrente. Ciò era possibile poiché, data la reversibilità del processo di riduzione, il picco ha una forma particolarmente adatta a questo scopo. Con picchi molto arrotondati ovviamente l'imprecisione aumenta notevolmente e in conseguenza si rende necessaria la determinazione grafica della tensione di picco sulla fotografia dell'oscillogramma. In questo caso si riprendono su uno stesso fotogramma due curve successive sulle quali la marca di tensione sia stata posta rispettivamente al di quà e al di là del picco; assumendo come perfettamente lineare la variazione di tensione compresa fra le due marche e individuato geometricamente il picco, l'interpolazione dà immediatamente il valore di  $E_p$ .

TABELLA.

| $E_p$                                       | $\pi_A$ | $\pi_p$ | $\pi_{1/2}$ |
|---|---------|---------|-------------|
| 0.695                                       | 0.035   | 0.660   | 0.640       |
| 0.696                                       | 0.035   | 0.661   | 0.641       |
| 0.694                                       | 0.035   | 0.659   | 0.639       |
| 0.697                                       | 0.035   | 0.662   | 0.642       |
| 0.695                                       | 0.035   | 0.660   | 0.640       |
| $(\pi_{1/2})_m = 0,640 \pm 0,002 \text{ V}$ |         |         |             |
| letteratura $\pi_{1/2} = 0,642$             |         |         |             |

Nella tabella sono riportati, nella prima colonna i valori della tensione di picco  $E_p$ ; nella seconda e terza colonna sono riportati rispettivamente i valori del potenziale anodico  $\pi_A$  e del potenziale di picco  $\pi_p$  misurati rispetto all'E.C.S. <sup>(2)</sup>.

Nella quarta colonna sono riportati i valori del potenziale di semigradino ottenuti dalla formula

$$\pi_p = \pi_{1/2} + (40/n) \text{ mV } [2].$$

(2) Non si è tenuto conto della correzione per la caduta ohmica in quanto essa è nelle presenti condizioni, trascurabile.

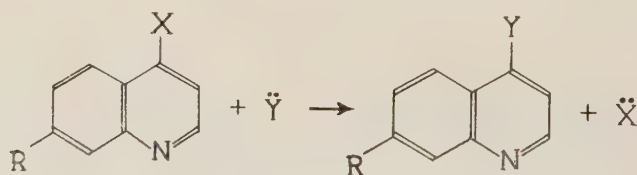
La riproducibilità dei valori è soddisfacente e altrettanto soddisfacente è l'accordo con i dati polarografici della letteratura. A ulteriore conferma è stata eseguita una serie di misure di differenza fra le tensioni di picco del cadmio e del piombo in soluzione di HCl IN contemporaneamente presenti. Il valore ottenuto come media di dieci determinazioni è risultato  $0,203 \pm \pm 0,002$  V in buon accordo con il dato della letteratura che è  $0,20$  (5) V.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] RANGLES J. E. B., « Trans. Faraday Soc. », 44, 327-38 (1948).
- [2] SEVCIK A., « Collection Czechoslov. Chem. Commun. », 13, 349-77 (1948).
- [3] DELAHAY P. e STIEHL G. L., « J. Phys. e Colloid. Chem. », 55, 570-85 (1951).
- [4] SNOWDEN F. C. e PAGE H. T., « Anal. Chem. », 22, 969-81 (1950).
- [5] DAVIS H. M. e SEABORN J. E., « Electronic Eng. », 25, 8 pag. (1953).
- [6] ELMORE W. C. e SANDS M., « Electronics », - McGraw-Hill - New York (1949) p. 202.
- [7] ELMORE W. C. e SANDS M., loc. cit., p. 52.

**Chimica.** — *Cinetica di sostituzione nucleofila con lo ione  $\text{CH}_3\text{O}^-$  nei sistemi aza-naftalenici. Confronto tra gli effetti dei sostituenti Cl e  $p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$  in tre diverse reazioni<sup>(\*)</sup>. Nota di GABRIELLO ILLUMINATI e GIANLORENZO MARINO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. V. CAGLIOTI.*

Nel quadro di uno studio sistematico sulle relazioni tra natura dei sostituenti e cinetica di sostituzione del cloro con lo ione  $\text{CH}_3\text{O}^-$  nei cloroaza-naftaleni (reazione A), di cui si riferirà in successivi lavori, abbiamo raccolto sufficienti dati cinetici con i sostituenti 7-Cl e 7- $p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$  da permettere il confronto della reazione suddetta con le altre due precedentemente esaminate B<sup>(1)</sup> e C<sup>(2)</sup>.



## TIPO DI REAZIONE

A)  $\text{X} = \text{Cl}$  ,  $\ddot{\text{Y}} = \text{CH}_3\text{O}^-$

B)  $\text{X} = \text{Cl}$  ,  $\ddot{\text{Y}} = p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{SH}$

C)  $\text{X} = \text{OH}$  ,  $\ddot{\text{Y}} = p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{SH}$

$\text{R} = 7\text{-Cl}$ ,  $7\text{-}p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$ .

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Inorganica dell'Università di Roma e Centro di Chimica Generale del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) G. GRASSINI e G. ILLUMINATI, « Gazz. Chim. It. », 86, 437 (1956).

(2) G. ILLUMINATI e L. SANTUCCI, « J. Am. Chem. Soc. », 77, 6651 (1955).

Come è facilmente prevedibile da quanto è noto dalla letteratura<sup>(3)</sup> sul meccanismo della reazione A e dai nostri precedenti studi sulle reazioni B e C, delle tre diverse reazioni quella di tipo A è la più facilmente interpretabile in modo diretto dai dati cinetici in termini di struttura elettronica del substrato eterociclico. Le reazioni di tipo B e C sono infatti complicate, in un caso, da autocatalisi acida e, nell'altro, dall'effetto della coniugazione del gruppo uscente OH con il sistema aza-naftalenico o, addirittura, dallo stabilirsi di equilibri tautomeri di tipo cheto-enolico. Il confronto dell'ordine di reattività dei due sostituenti R sopra indicati nelle tre reazioni serve quindi a completare e a meglio illustrare le nostre precedenti interpretazioni date alle reazioni B e C.

I dati cinetici presentati in questo lavoro sono raccolti nella Tabella I che comprende i valori delle costanti bimolecolari di velocità a due temperature e una prima valutazione delle energie di attivazione che saranno più accuratamente determinate in seguito. Per confronto sono stati inclusi i dati relativi alla 4-clorochinolina (R = H).

TABELLA I.

*Costanti cinetiche del 2° ordine ed energie di attivazione per la reazione di alcune 4-clorochinoline con CH<sub>3</sub>O<sup>-</sup> in alcool metilico.*

| Sostituente (R)  | 10 <sup>4</sup> · k <sub>2</sub> (l.moli <sup>-1</sup> sec. <sup>-1</sup> ) |          | Ea (kcal./mole) |
|--|---|----------|-----------------|
|  | a 67,8°   | a 86,3°  |                 |
| H . . . . .  | 1,20  | 7,23     | 23,62           |
| 7-Cl . . . . .   | 11,58 (a)   | 46,0 (a) | 18,15           |
| 7- <i>p</i> -CH <sub>3</sub> C <sub>6</sub> H <sub>4</sub> S . . . . . | 3,00 (a)  | 15,2     | 21,35           |

(a) Media ottenuta da due determinazioni.

PROCEDIMENTO SPERIMENTALE. — L'alcool metilico puro del commercio è stato purificato a ricadere con magnesio e iodio<sup>(4)</sup> e frazionato in una colonna di Fenske con un rapporto di riflusso di circa 10. La soluzione di metilossido di sodio fu preparata sciogliendo sodio metallico in alcool metilico. Per la preparazione e le proprietà delle 4-clorochinoline usate rimandiamo a precedenti lavori<sup>(1,2)</sup>.

(3) N. B. CHAPMAN, The Chem. Soc., London, Spec. Publ. No. 3, 155 (1955).

(4) A. I. VOGEL, *Practical Organic Chemistry*, Longmans, Green and Co., London 1951, p. 168.

TABELLA II.

*Tipiche esperienze cinetiche per la reazione delle 4-clorochinoline con lo ione  $\text{CH}_3\text{O}^-$  in alcool metilico.*

| Composto                 | tempo (min.) | $\text{NH}_4\text{CNS}$ (ml.) | Percento di reazione | $\log (a-x)/(b-x)$ |
|--------------------------|--------------|-------------------------------|----------------------|--------------------|
| 4-Clorochinolina (a)     | 0            | 3,51                          | 0                    | 0,432              |
|                          | 48           | 3,17                          | 24,28                | 0,512              |
|                          | 122          | 2,92                          | 42,14                | 0,597              |
|                          | 177          | 2,75                          | 54,28                | 0,676              |
|                          | 235          | 2,61                          | 64,28                | 0,763              |
|                          | 298          | 2,52                          | 70,00                | 0,826              |
|                          | 364          | 2,43                          | 77,14                | 0,926              |
|                          | 412          | 2,38                          | 80,71                | 0,993              |
|                          | $\infty$     | (2,11) (b)                    | (100) (b)            | —                  |
| 4,7-Diclorochinolina (c) | 0            | 3,50                          | 0                    | 0,301              |
|                          | 20           | 3,31                          | 15,03                | 0,338              |
|                          | 48           | 3,12                          | 29,32                | 0,382              |
|                          | 97           | 2,93                          | 43,60                | 0,443              |
|                          | 156          | 2,79                          | 55,64                | 0,513              |
|                          | 241          | 2,60                          | 64,42                | 0,620              |
|                          | 332          | 2,49                          | 75,94                | 0,714              |
|                          | 419          | 2,36                          | 83,45                | 0,845              |
|                          | $\infty$     | (2,18) (b)                    | (100) (b)            | —                  |

(a) Concentrazioni iniziali:  $[\text{CH}_3\text{ONa}] = a = 0,1246 \text{ M}$ ;  $[4\text{-clorochinolina}] = b = 0,04603 \text{ M}$ . Temperatura:  $86,3^\circ \text{C}$ .

(b) I valori in parentesi sono calcolati; le letture a tempo infinito in tutti i composti esaminati sono risultate coincidenti con i valori calcolati nei limiti degli errori sperimentali.

(c) Concentrazioni iniziali  $[\text{CH}_3\text{ONa}] = a = 0,0876 \text{ M}$ ;  $[4,7\text{-diclorochinolina}] = b = 0,0438 \text{ M}$ . Temperatura:  $67,8^\circ \text{C}$ .

Per l'esame cinetico si sono preparate soluzioni circa 0,04 M rispetto alla 4-clorochinolina in esame e da 0,08 a 0,13 M rispetto al metilossido di sodio mescolando i reagenti in un pallone tarato e portando a volume con il solvente a temperatura ambiente. Ciascuna soluzione così ottenuta è stata quindi rapidamente trasferita nel serbatoio di una pipetta automatica dalla quale sono state prelevate e introdotte in tubi di vetro pirex porzioni da 2 ml. I tubi sono stati quindi saldati alla fiamma e immersi simultaneamente in un termostato ad olio regolato alla temperatura desiderata con una precisione di  $\pm 0,1^\circ \text{C}$ . Le cinetiche sono state seguite prelevando i tubi a regolari

intervalli di tempo e analizzando il contenuto per gli ioni  $\text{Cl}^-$  con il metodo di Volhard, previa rapida filtrazione alla pompa del precipitato di cloruro di argento. Le letture relative al punto zero sono state ottenute da tubi prelevati dal termostato dopo 5 minuti dall'immersione.

Le costanti di velocità sono state valutate per via grafica e corrette per l'espansione termica del solvente alla temperatura corrispondente<sup>(5)</sup>. Dati relativi a due esperienze tipiche sono riportati nella Tabella II. I diagrammi corrispondenti (fig. 1) mostrano che le cinetiche studiate seguono il 2° ordine in modo rigoroso per tutto il corso della reazione.

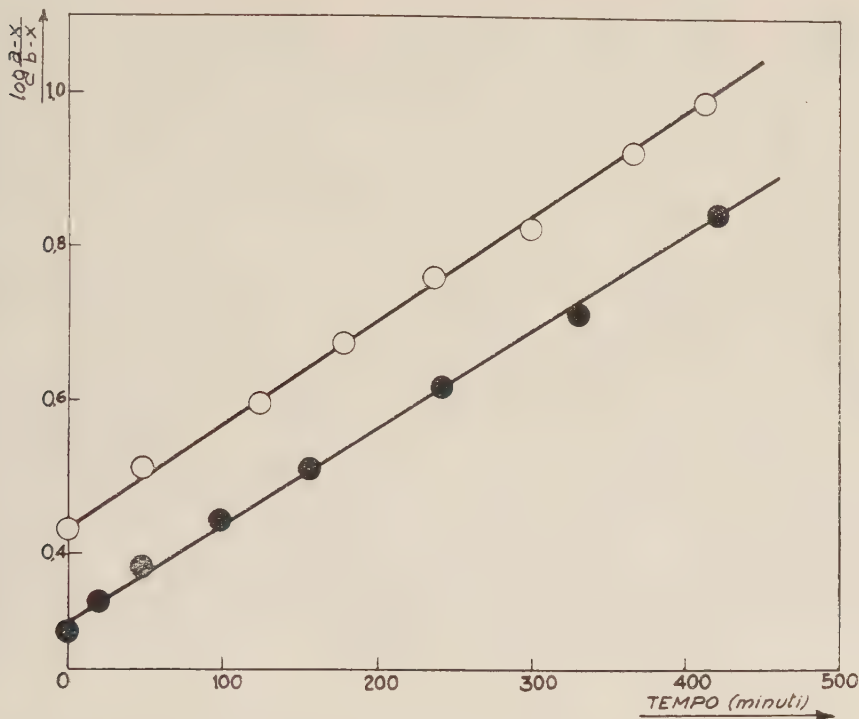


Fig. 1 - Diagrammi del 2° ordine per la reazione della 4-clorochinolina (cerchi vuoti) e della 4,7-diclorochinolina (cerchi pieni) con  $\text{CH}_3\text{O}^-$  in alcool metilico (per le condizioni e i risultati numerici cfr. la Tabella II).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. - Dai dati presentati in questo lavoro si osserva che nella reazione A entrambi i sostituenti 7-Cl e 7-*p*- $\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$  sono attivanti rispetto all'idrogeno, ciò che indica un abbassamento della densità elettronica presso la posizione di attacco nello stato di transizione della reazione. Nel caso del 7-Cl, l'effetto è chiaramente dovuto al prevalere dell'effetto induttivo sull'opposto effetto di coniugazione *p*- $\pi$ . Meno sicura è invece l'interpretazione precisa del giuoco dei deboli effetti elettronici dello

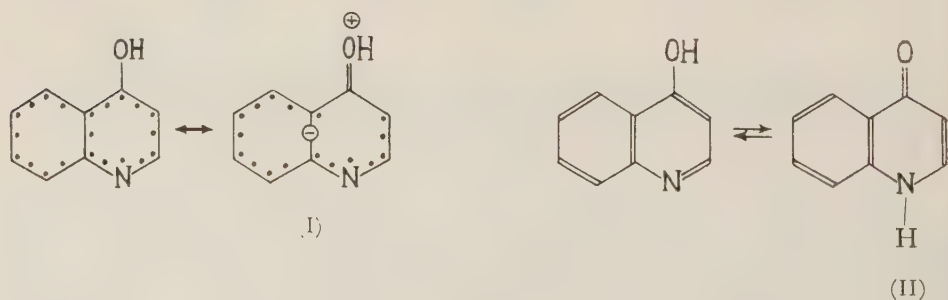
(5) J. TIMMERMANS, *Physico-chemical constants of pure organic compounds*, Elsevier Publ. Co., New York, 1950, p. 393.

zolfo, che sono modificati dal gruppo  $p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4$ ; anche in questo caso tuttavia l'effetto risultante dello zolfo *sul sistema aza-aromatico* appare essere di natura induttiva.

Rimane comunque stabilito che nella reazione A i sostituenti agiscono dalla posizione 7 nell'ordine decrescente di velocità  $\text{Cl} > p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S} > \text{H}$ . Dai valori relativi delle costanti di velocità e dalle energie di attivazione si deduce che tale ordine di reattività si conserva fino a intorno ai  $300^\circ\text{C}$ , cioè entro limiti più ampi di quelli corrispondenti all'intervallo di temperatura di tutte le reazioni qui discusse.

Questi risultati illustrano ulteriormente l'entità degli effetti della autocatalisi acida e di altri fattori concomitanti sulla cinetica di sostituzione del cloro con il tiolo molecolare  $p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{SH}$  (reazione B), descritti recentemente in altra sede <sup>(1)</sup>. Infatti in tal caso l'ordine apparente di reattività era risultato  $\text{Cl} < p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$ , cioè invertito rispetto a quello dipendente dai soli effetti elettronici, in completo accordo con le precedenti interpretazioni riguardo alla reazione B. Si noti anche che l'inversione non è determinata da piccole differenze di velocità poiché nella reazione A (Tabella I) la costante bimolecolare relativa al 7-Cl è oltre 4 volte maggiore di quella relativa al  $p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$ , mentre nella reazione B il *rapporto inverso*, basato sui tempi di vita media, è circa 9.

Quanto alla reazione C, data la più alta temperatura richiesta, disponiamo solo di dati semi-quantitativi a  $200^\circ$  <sup>(2)</sup>. Tuttavia, l'ordine di reattività era stato stabilito in modo netto e conclusivo. Tale ordine risulta lo stesso ( $\text{Cl} > p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$ ) di quello osservato nella reazione A (Tabella I) nonostante che i due tipi di reazione differiscano sia per la natura del gruppo sostituito ( $\text{X} = \text{OH}, \text{Cl}$ ) sia per la natura del reagente attaccante ( $\text{Y} = p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{SH}, \text{CH}_3\text{O}^-$ ). Sembra quindi lecito concludere che l'analogia di comportamento risieda negli effetti elettronici del substrato eterociclico data l'assenza di autocatalisi acida in entrambe le reazioni.



La reazione delle 4-ossichinoline interessa problemi dibattuti ma ancora scarsamente trattati in letteratura. Così non si esclude che il meccanismo di rottura del legame carbonio-ossigeno (reazione C) possa differire da quello di rottura del legame carbonio-cloro (reazione A). Nel primo caso potrebbe infatti avere importanza la coniugazione del gruppo OH con

l'anello <sup>(6)</sup> secondo strutture del tipo I ovvero la presenza di vere e proprie forme tautomere del tipo II in equilibrio cheto-enolico con le corrispondenti forme ossidriliche <sup>(7)</sup>. È interessante osservare che dai nostri dati nulla indica che tali possibilità vengano a modificare i requisiti elettronici presso il centro di reazione da un punto di vista qualitativo. È tuttavia da ritenere che qualsiasi carattere di doppio legame tra carbonio e ossigeno sia responsabile della più alta temperatura alla quale le reazioni C avvengono.

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XIX. *Variazioni sperimentalmente indotte del rapporto AA/DHA e corrispondenti variazioni della crescita e dell'attività respiratoria di segmenti di fusto di Pisello*<sup>(\*)</sup>. Nota II <sup>(\*\*)</sup> di FEDERICA TREZZI, presentata dal Socio S. TONZIG.

Un secondo tipo di esperienze sono state da me eseguite allo scopo di controllare le variazioni relative al contenuto in ascorbico totale, al rapporto AA/DHA, al consumo di ossigeno e all'entità dell'accrescimento, in conseguenza d'un arricchimento d'acido ascorbico per trattamento del materiale con soluzioni d'AA. Queste esperienze sono state fatte in due maniere: 1° trattando per uguale tempo (1 ora) il materiale con soluzione di AA a concentrazioni diverse (0,2 ‰, 0,5 ‰, 1 ‰ e 2 ‰); 2° trattando il materiale con soluzioni alla stessa concentrazione (1 ‰) per periodi di differente durata (2, 4 o 6 ore). In ogni caso il materiale è stato offerto dai consueti segmenti di 3° internodio di fusticino di pisello, segmenti che, dopo il prelievo e prima dell'utilizzazione, venivano fatti permanere in acqua corrente per un ora.

Per quanto si riferisce ai particolari tecnici dell'esperienza, preciso che l'accrescimento è stato, anche questa volta, calcolato come incremento di peso; e che l'AA e il DHA + DKG sono stati determinati con i metodi già più sopra indicati. Il consumo di ossigeno è stato misurato in respirometro di Warburg introducendo i segmenti (in numero di 15 per vaschetta) in soluzione tampone ai fosfati pH 5,5. Per i saggi, nella cavità laterale della vaschetta era introdotta la quantità voluta di soluzione d'AA in soluzione tampone portata a pH 5,5 con NaOH; per i controlli, nella cavità laterale della vaschetta s'introduceva eguale quantità di soluzione tampone. Altre vaschette senza materiale respirante e con solo tampone oppure con soluzione tamponata d'AA servivano rispettivamente come termobarometri oppure per la determinazione del consumo d'ossigeno a causa dell'ossidazione spontanea dell'AA. Il contenuto delle vaschette laterali veniva versato nella cavità principale dopo permanenza di 10 min. pr. delle vaschette nel bagno termostatico a 25° C.; dopo altri 5 min. pr. i manometri

(6) J. F. BUNNETT e R. E. ZAHLE, «Chem. Revs.», 49, 338 (1951).

(7) Cfr. il riferimento <sup>(6)</sup>, p. 293.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1956.

venivano chiusi e le determinazioni venivano iniziate. Le vaschette erano agitate al ritmo di 90 oscillazioni per min. pr. Nelle tabelle III e IV, i valori relativi al consumo di ossigeno sono corretti della quantità di  $O_2$  consumata per autoossidazione dell'AA.

L'esame delle due tabelle mette in evidenza taluni punti la cui interpretazione non può essere tentata se non dopo ulteriori ricerche ma che, per altro, non è essenziale per lo scopo di questo lavoro. Così può apparire singolare quanto appare alla III tabella relativamente al consumo di ossigeno che subisce in tutti i saggi una flessione quasi identica sebbene diverse siano le concentrazioni di AA nel mezzo, diverse siano quelle dell'AA e del DHA nel tessuto e di ben diversa imponenza sia la riduzione dell'accrescimento. Il consumo di ossigeno sembra dunque solo parzialmente dipendente dalle variazioni interne del sistema AA/DHA come solo parzialmente legato alla attività respiratoria sembra essere l'incremento di peso. Bisogna però tener conto dal fatto dimostrato dalla prima esperienza (tabella I) che nella prima ora di esperimento il materiale è tutt'ora in preda ad una crisi d'ambientazione che ne rende eccezionalmente elevato il consumo d'ossigeno soprattutto quando, come in questo caso, il liquido è agitato. Quando invece (tabella IV) l'esperienza viene protratta più a lungo, il consumo di ossigeno diminuisce progressivamente anche se eguale è la concentrazione iniziale d'AA nel mezzo. Altro punto che merita ulteriori indagini è dato dal fatto che, nell'esperienza durata 6 ore con soluzioni esterne ad uguale concentrazione d'AA, il rapporto AA/DHA si trova essere caduto, già alla prima lettura, ad un valore che rimarrà poi costante fino alla fine: fatto questo che potrebbe essere posto in relazione alla progressiva variazione dello stato d'ossido-riduzione dell'ascorbico nel mezzo, come anche all'agitazione del liquido ed al suo effetto - se così può dirsi - auxino-simile manifestantesi, anche nei controlli, con una progressiva e notevole diminuzione del rapporto AA/DHA.

Fatte tali riserve, la cui spiegazione - ripeto - potrà essere oggetto di ricerche ulteriori, i principali risultati che le esperienze si proponevano sono, mi pare, molto ben raggiunti. Il trattamento con AA ha determinato un aumento molto notevole, in entrambe le esperienze ed in tutti i casi, dell'ascorbico totale nell'interno dei pezzetti di fusto; tale aumento interessa sia l'ascorbico ridotto che quello ossidato, per altro assai più quest'ultimo piuttosto che il primo, cosicché il rapporto AA/DHA risulta tanto più abbassato quanto maggiore è la concentrazione dell'AA nel mezzo e più elevato è il suo contenuto totale nei segmenti (tabella III). Nell'esperienza in cui il soggiorno dei segmenti di fusto è stato prolungato per 6 ore in soluzioni di AA a uguale concentrazione, il rapporto AA/DHA cade subito ad un valore che, come poco sopra ho rilevato, rimane poi costante in senso assoluto; in senso relativo ai corrispondenti valori del rapporto nei controlli, tuttavia, esso diminuisce progressivamente perché progressivamente aumenta nei controlli. Ma il fatto che io desidero porre in massimo rilievo è rappresentato dalla parallela diminuzione sia dell'attività respiratoria (come consumo di ossigeno) che dell'accrescimento (aumento di peso).

TABELLA III.

*Comportamento di segmenti del 3° internodio di pianine eziole di pisello trattate per lo stesso tempo con AA a concentrazioni diverse.*

Changes in water uptake, O<sub>2</sub> consumption and in the ascorbic (AA), dehydroascorbic (DHA) and diketogulonic (DKG) acid contents in pea internode segments kept for 1 hour in solution containing AA at different concentrations.

|                      | Incr. % peso | NEI PEZZETTI                                |                           |            |                   |            | NEL LIQUIDO |                   |
|----------------------|--------------|---|---------------------------|------------|-------------------|------------|-------------|-------------------|
|                      |              | O <sub>2</sub> cons.<br>mm <sup>3</sup> /gr | AA + DHA +<br>DKG<br>γ/gr | AA<br>γ/gr | DHA + DKG<br>γ/gr | AA/DHA+DKG | AA<br>γ/cc  | DHA + DKG<br>γ/cc |
| Controllo . . . . .  | 5,5          | 350   | 365                       | 209        | 66                | 4,5        | —           | —                 |
| AA 0,2 o/∞ . . . . . | 4,8          | 285<br>(— 18 o/∞)                           | 456                       | 351        | 105               | 3,3        | 4           | 185               |
| AA 0,5 o/∞ . . . . . | 4,0          | 281<br>(— 19 o/∞)                           | 509                       | 378        | 131               | 2,8        | 13          | 480               |
| AA 1 o/∞ . . . . .   | 3,5          | 290<br>(— 17 o/∞)                           | 562                       | 302        | 170               | 2,3        | 325         | 553               |
| AA 2 o/∞ . . . . .   | 1,3          | 305<br>(— 14 o/∞)                           | 667                       | 348        | 319               | 1,09       | 944         | 544               |

TABELLA IV.

*Comportamento di segmenti del 3° internodio di piantine eziolate di pisello trattati per lo stesso tempo con AA alla stessa concentrazione.*

Changes in water uptake, O<sub>2</sub> consumption and in the ascorbic (AA), dehydroascorbic (DHA) and diketogulonic (DKG) acid contents in pea internode segments kept for 2, 4, 6 hours in an 1% ascorbic acid solution.

|                     | Tempo<br>di esper. | NEI PEZZETTI  |   |                           |            |                   |            | NEL LIQUIDO |                   |
|---------------------|--------------------|---------------|---|---------------------------|------------|-------------------|------------|-------------|-------------------|
|                     |                    | Inscr. % peso | O <sub>2</sub> cons.<br>mm <sup>3</sup> /gr | AA + DHA +<br>DKG<br>γ/gr | AA<br>γ/gr | DHA + DKG<br>γ/gr | AA/DHA+DKG | AA<br>γ/cc  | DHA + DKG<br>γ/cc |
| Controllo . . . . . | 2 ore              | 9,1           | 696   | 484                       | 366        | 118               | 3,1        | —           | —                 |
| AA 1% . . . . .     |                    | 6,2           | 556   | 835                       | 501        | 334               | 1,5        | 100         | 900               |
| Controllo . . . . . | 4 ore              | 17            | 590   | 472                       | 380        | 92                | 4,1        | —           | —                 |
| AA 1% . . . . .     |                    | 13            | 455   | 996                       | 581        | 415               | 1,4        | 60          | 940               |
| Controllo . . . . . | 6 ore              | 26,5          | 563   | 483                       | 427        | 83                | 5          | —           | —                 |
| AA 1% . . . . .     |                    | 18            | 379   | 1047                      | 629        | 418               | 1,5        | 0           | 910               |

## CONCLUSIONI E RIASSUNTO.

I principali risultati di queste ricerche possono essere così riassunti:

1°. Il trattamento con AIA, mentre lascia praticamente immutato il contenuto totale delle varie forme d'ascorbico in segmenti d'internodio di pisello, ne eleva assai sensibilmente il rapporto AA/DHA. La constatazione riveste, a parer mio, grande importanza in quanto è la prima volta che tale fatto viene constatato — *in vivo* — come risposta diretta al trattamento con AIA; e ciò, mentre conferma le conclusioni già in precedenza espresse, secondo le quali l'effetto antiauxinico dell'ascorbico [1, 2, 3, 5] viene esercitato dalla sua forma ossidata, indica in pieno accordo a precedenti lavori che il meccanismo, — o uno dei meccanismi — d'azione dell'AIA possa consistere in una inibizione dell'attività ascorbico-ossidasi. I dati da me ottenuti appaiono quindi favorevoli allo schema secondo il quale, nell'alternativa vicenda d'ossido-riduzioni subita dall'ascorbico nella cellula, l'AIA interverrebbe rallentando il passaggio alla forma ossidata; e l'effetto auxinico sarebbe proprio dovuto al progressivo attenuarsi del contenuto in DHA ed al progressivo accumulo in AA, dunque allo spostamento del loro rapporto verso la forma ridotta senza che il totale subisca necessariamente significative variazioni.

2°. L'aumento del contenuto totale d'ascorbico, indotto per somministrazione dall'esterno di AA, sembra determinare, nella cellula, l'impossibilità di fronteggiare la nuova situazione e di mantenere una certa proporzione tra AA ed DHA. Entrambe le forme partecipano all'aumento ma, sia in senso assoluto che proporzionale, l'aumento è molto maggiore per il DHA in confronto dell'AA cosicché il rapporto AA/DHA va progressivamente abbassandosi. Tale reperto è una riprova di altri dati [4] e sembra confermare le conclusioni tratte da precedenti ricerche, secondo le quali il DHA è capace di una inibizione competitiva nei riguardi dell'AIA, determinando così un progressivo peggioramento della situazione; peggioramento che, in ogni caso, si commisura sulla quantità endocellulare di DHA, non sul contenuto della cellula in ascorbico totale.

3°. Alle variazioni in più o in meno del rapporto AA/DHA conseguono costantemente variazioni in più o in meno di determinate manifestazioni dell'attività cellulare. Di esse sono stati qui considerati l'accrescimento, misurato come incremento di peso per assunzione d'acqua, e la respirazione, misurata come consumo di ossigeno.

Che l'accrescimento sia inibito quando aumenta, nella cellula, il contenuto in ascorbico, era già stato ampiamente documentato dalle nostre precedenti ricerche; con le presenti esperienze, tuttavia, vien dimostrato che l'inibitore vero è il DHA mentre del tutto senza effetto, a questo riguardo, è l'AA; cosicché l'aumento del contenuto in ascorbico totale comincia ad esercitare effetti negativi solo quando, nelle condizioni sperimentali in cui si opera, e date le particolari condizioni del tessuto usato, diviene non più possibile per la cellula di padroneggiare la velocità del passaggio da AA a DHA e da DHA ad AA ed il rapporto AA/DHA, di conseguenza, tende ad abbassarsi.

Non ancora sufficientemente dimostrato, e quindi bisognoso di una ulteriore documentazione, era l'effetto negativo che l'arricchimento d'ascorbico nella cellula induce sulla sua respirazione. La conferma fornita dai miei risultati era, ovviamente, tanto più necessaria in quanto un siffatto fenomeno potrebbe apparire, a tutta prima, inconciliabile con il carattere di composto ossido-riducibile dell'acido ascorbico e con la sua possibilità d'inserirsi in una catena di trasporto d'idrogeno. Anche a questo riguardo le mie esperienze dimostrano che solo al DHA va imputato l'effetto negativo; cosicché, mentre una forte riduzione del consumo di ossigeno è indotto dall'abbassarsi del rapporto AA/DHA, un aumento di questo rapporto implicante un effettivo aumento dell'AA (e provocato per esempio con somministrazione d'AIA) determina un forte aumento del consumo di ossigeno. Ciò che, oltre ad altri problemi, ripropone quello, già parzialmente studiato ed in corso d'ulteriore studio in questo Istituto, del luogo d'azione del DHA (su sistemi deidrogenasici, oltre che sui complessi auxin-proteici) e delle modalità della sua azione (se direttamente o attraverso la formazione di altri e più diretti inibitori).

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] MARRÈ E. e ARRIGONI O., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 18, p. 539 (1955).
- [2] MARRÈ E. e ARRIGONI O., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 19, p. 320 (1955).
- [3] MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 19, p. 460 (1955).
- [4] MARRÈ E. e LAUDI G., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 20, p. 77 (1955).
- [5] ARRIGONI O. e MARRÈ E., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 17, p. 390 (1954).

**Fisiologia.** — *Componenti labirintiche ed estralabirintiche nelle manifestazioni spastiche del Gatto decerebrato e decerebellato*<sup>(\*)</sup>. Nota di CESIRA BATINI, GIUSEPPE MORUZZI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

Le presenti ricerche furono eseguite su 35 Gatti, di cui 21 erano già stati utilizzati anche per osservazioni riportate in altra nota [Batini, Moruzzi e Pompeiano<sup>(1)</sup>]. A questa si rimanda per una descrizione delle tecniche seguite e dei controlli istologici che vennero sistematicamente effettuati alla fine d'ogni esperimento.

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Pisa e Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) C. BATINI, G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. VIII, in corso di stampa.

1° Nel Gatto decerebrato la flaccidità degli arti anteriori, acutamente o cronicamente deafferentati [Sherrington<sup>(2)</sup>], è sostituita da ipertono estensore quando il cervelletto, o anche solo il *lobus anterior*, viene asportato [Stella<sup>(3)</sup>, Terzian e Terzuolo<sup>(4)</sup>]. Abbiamo confermato queste osservazioni ed abbiamo dimostrato, in 6 Gatti, che lo stesso fatto si ha con la distruzione elettrolitica, bilaterale e totale, del nucleo del tetto. Liljestrand e Magnus<sup>(5)</sup>, Stella<sup>(3)</sup> e Terzian e Terzuolo<sup>(4)</sup> hanno d'altra parte dimostrato che identico risultato si ottiene con la sezione postbrachiale del midollo spinale (effetto Schiff-Sherrington).

2° La ricomparsa della rigidità estensoria negli arti anteriori, resi flaccidi dalla deafferentazione, è dovuta a liberazione (*release*) da un'azione tonica inibitrice esercitata da strutture cerebellari (parte vermiana del *lobus anterior* e nucleo del tetto) o spinali (effetto Schiff-Sherrington). L'ipotesi alterna di un fenomeno irritativo è contraddetta dal fatto che ai medesimi risultati si giunge in seguito a raffreddamento [Stella<sup>(6)</sup>] o inattivazione anemica [Pollock e Davis<sup>(7)</sup>, cfr. Stella<sup>(3)</sup>] del *lobus anterior*. Alle stesse conclusioni siamo arrivati noi pure, per altra via, decerebrando 6 Gatti che 2 giorni prima erano stati sottoposti a deafferentazione bilaterale degli arti anteriori e a distruzione, bilaterale e totale, del nucleo del tetto. Si osservò una netta rigidità estensoria, mentre è risaputo che gli arti deafferentati appaiono flaccidi, quando la decerebrazione è preceduta unicamente da radicotomia dorsale cronica [Sherrington<sup>(2)</sup>, Terzian e Terzuolo<sup>(4)</sup>]. D'altra parte la natura non irritativa dell'effetto Schiff-Sherrington è stata da tempo dimostrata [Ruch e Watts<sup>(8)</sup>]; essa venne da noi confermata con esperimenti di sezione cronica del midollo toracico [Batini, Moruzzi e Pompeiano<sup>(1)</sup>].

3° L'inibizione tonica esercitata da neuroni del nucleo del tetto, o dalle strutture cortico-cerebellari che con essi si connettono, e quella dovuta a impulsi ascendenti dai segmenti lombo-sacrali del midollo (effetto Schiff-Sherrington) non sono del tutto equivalenti. È noto che nel preparato decerebrato col metodo classico non si osserva opistotono [Bazett e Penfield<sup>(9)</sup>]. Questo compare solo dopo decerebrazione anemica, che per altro inattiva il *lobus anterior* del cervelletto [Pollock e Davis<sup>(7)</sup>]. In 2 Gatti decerebrati, ma non deafferentati, distruggemmo entrambi i nuclei del tetto: la rigidità aumentò considerevolmente e inoltre comparve opistotono, che permase inalterato per tutto il tempo di sopravvivenza. All'opposto, in 4 Gatti decerebrati 3 giorni dopo la deafferentazione degli arti anteriori, la sezione postbrachiale del midollo spinale fece ricomparire la rigidità estensoria, ma non

2) C. S. SHERRINGTON, « J. Physiol. », XXII, 319 (1898).

(3) G. STELLA, « Atti Soc. med.-chir., Padova », XXIII, 5 (1944).

4) H. TERZIAN e C. TERZUOLO, « Arch. Fisiol. », LIV, 37 (1954).

(5) G. LILJESTRAND u. R. MAGNUS, « Pflügers Arch. », CLXXVI, 168 (1919).

6) G. STELLA, « Atti Soc. med.-chir., Padova », XXIII, 17 (1944).

(7) L. J. POLLOCK a. L. DAVIS, « J. comp. Neurol. », L, 377 (1930).

(8) T. C. RUCH a. J. W. WATTS, « Amer. J. Physiol. », CX, 362 (1934).

(9) H. C. BAZETT a. W. G. PENFIELD, « Brain », XLV, 185 (1922).

fu mai seguita da opistotono. Ed è possibile provare in modo anche più diretto che i fenomeni di liberazione consecutivi a lesioni cerebellari sono diversi da quelli prodotti dalla sezione postbrachiale del midollo spinale. In 2 Gatti decerebrati venne praticata la radicotomia dorsale da  $C_v$  a  $D_{II}$ . Scompare la rigidità negli arti anteriori, a conferma delle classiche osservazioni di Sherrington<sup>(2)</sup>. La rigidità estensoria ricomparve in essi dopo sezione postbrachiale del midollo spinale, ma non fu accompagnata da opistotono. Questo sintomo si fece in modo nettissimo palese solo successivamente, quando entrambi i nuclei del tetto vennero distrutti: fu osservato per tutta la durata della sopravvivenza (3 h), assieme ad una forte accentuazione della rigidità. Dobbiamo pertanto esaminare separatamente la rigidità degli arti deafferentati e l'opistotono. La prima è un fenomeno complesso, legato a liberazione da inibizione cerebellare e spinale ed al giuoco dei riflessi di Magnus. L'opistotono è invece un sintomo di deficienza cerebellare, essendo legato alla soppressione d'influenze toniche inibitrici, esercitate dal nucleo del tetto e dalle aree vermiene che si connettono con questa struttura.

4° Esaminiamo anzitutto la rigidità degli arti anteriori deafferentati. Stella<sup>(10)</sup> ha osservato che la rigidità da decerebrazione del Cane cronicamente decerebellato è abolita negli arti anteriori, quando questi vengono deafferentati, e inoltre che gli arti resi flaccidi non ridiventano rigidi dopo sezione postbrachiale del midollo spinale. Abbiamo confermato la prima ma non la seconda osservazione con esperimenti eseguiti su 19 Gatti. Tali animali vennero decerebrati da 14 a 21 giorni dopo la completa cerebellectomia, quando i fenomeni dinamici erano del tutto dileguati: comparve una nettissima rigidità estensoria, che si dileguò negli arti anteriori in seguito a radicotomia dorsale bilaterale da  $C_v$  a  $D_{II}$ . Questa osservazione è in contrasto solo apparente coi risultati della cerebellectomia acuta. Altre ricerche [Batini, Moruzzi e Pompeiano<sup>(11)</sup>] hanno dimostrato che nell'animale cronicamente cerebellectomizzato entrano in giuoco meccanismi di compenso, che permettono di controllare nuovamente il tono posturale. Da essi dipendono appunto: 1° la scomparsa dei fenomeni dinamici di Luciani nell'animale cronicamente cerebellectomizzato; 2° la scomparsa dell'ipertono estensorio negli arti anteriori, quando tale animale viene decerebrato e sottoposto a radicotomia dorsale bilaterale da  $C_v$  a  $D_{II}$ .

È possibile dimostrare, ed in questo punto i nostri dati divergono da quelli di Stella<sup>(10)</sup>, come tali meccanismi di compenso siano rappresentati dai riflessi estracerebellari inibitori, che sono alla base del fenomeno di Schiff-Sherrington. La sezione postbrachiale del midollo spinale fece costantemente ricomparire la rigidità estensoria negli arti anteriori deafferentati, in tutti i casi (18 su 19) in cui l'esame istologico dimostrò la completa integrità dei nuclei vestibolari d'ambo i lati. In un caso la rigidità comparve solamente in un arto anteriore, ma l'esame istologico rivelò, in corrispondenza del lato atonico, chiara lesione del nucleo di Deiters. È possibile che gli opposti risultati otte-

(10) G. STELLA, « Proc. XVII int. physiol. Congress, Oxford », 97 (1947).

nuti da Stella<sup>(10)</sup> fossero appunto dovuti a lesioni secondarie del tronco dell'encefalo. In ogni caso l'effetto Schiff-Sherrington sugli arti anteriori deafferentati può sicuramente manifestarsi in assenza di tutti i nuclei cerebellari ed anzi di tutto il cervelletto, a differenza di quanto avevano suggerito Stella, Zatti e Sperti<sup>(11,12)</sup>.

5° Sull'origine dell'ipertono degli arti deafferentati i dati sono contrastanti. Secondo Stella<sup>(3)</sup>, nel preparato decerebrato la sezione bilaterale dell'ottavo nervo encefalico produce flaccidità degli arti anteriori acutamente deafferentati, nonostante la sezione postbrachiale, pure acuta, del midollo spinale. Cardin<sup>(13)</sup> invece afferma che se la decerebrazione è eseguita due mesi dopo radicotomia dorsale bilaterale, da C<sub>I</sub> a T<sub>II</sub>, accompagnata da sezione postbrachiale del midollo spinale, la rigidità estensoria compare nonostante la sezione bilaterale acuta del nervo ottavo. Moruzzi<sup>(14)</sup> pensa che i risultati di Cardin siano dovuti alla sensibilizzazione alla Cannon prodotta dalla deafferentazione cronica: ma questa non è spiegazione adeguata. Le nostre ricerche ci hanno permesso infatti di confermare le osservazioni di Cardin<sup>(13)</sup>, e sono pertanto in contrasto con quelle di Stella<sup>(3)</sup>, anche in condizioni sperimentali che escludono del tutto la sensibilizzazione alla Cannon. Abbiamo praticato la distruzione elettrolitica (3 mA per 30 sec) del nervo ottavo a livello del meato acustico interno, messo allo scoperto sollevando leggermente l'emisfero cerebellare. In tal modo si evitava ogni emorragia e l'interruzione avveniva il più lontano possibile dal tronco dell'encefalo. La completezza della lesione veniva dimostrata anatomicamente alla morte dell'animale, e durante l'esperimento essa era controllata accertando la scomparsa di tutte le reazioni prodotte dalla stimolazione galvanica (polarizzazione catodica) del labirinto.

In 6 Gatti la decerebrazione, seguita da sezione postbrachiale del midollo spinale, venne eseguita rispettivamente 2, 3, 3, 5, 7, 8 giorni dopo la deafferentazione bilaterale degli arti anteriori e la distruzione, bilaterale e totale, del nucleo del tetto. La rigidità estensoria fu nettamente presente, anche se la resistenza alla flessione passiva appariva ovviamente ridotta dopo l'interruzione bilaterale del nervo ottavo. In un caso l'animale venne decerebrato 3 giorni dopo la distruzione, pure bilaterale e totale, del nucleo del tetto. L'interruzione bilaterale del nervo ottavo ridusse la rigidità estensoria, ma non la sopprime. Questa scomparve dopo deafferentazione bilaterale acuta da C<sub>V</sub> a D<sub>II</sub>. Gli arti anteriori ridivennero però rigidi (pure presentando una modica resistenza alla flessione passiva), quando venne eseguita la sezione postbrachiale del midollo spinale. Tale rigidità rimase invariata per tutta la durata della sopravvivenza (6 h).

(11) G. STELLA, P. ZATTI a. L. SPERTI, « Proc. XIX int. physiol. Congress, Montreal », 799 (1953).

(12) G. STELLA, P. ZATTI a. L. SPERTI, « Amer. J. Physiol. », CLXXXI, 230 (1955).

(13) A. CARDIN, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVII, 1178 (1951).

(14) G. MORUZZI, « Rass. clin.-scient. », XXX, 175 (1954).

È quindi certo che la rigidità degli arti anteriori deafferentati può essere presente, indipendentemente da fenomeni di sensibilizzazione alla Cannon (deafferentazione acuta o di pochi giorni), dopo sezione bilaterale del nervo ottavo. Ciò naturalmente non significa che tale rigidità estensoria sia di natura autoctona, nel senso dato da Sherrington <sup>(15)</sup> a questa parola, perché nei nostri esperimenti le prime radici dorsali cervicali e il nervo trigemino non vennero sezionati. I risultati degli esperimenti acuti di Stella <sup>(3)</sup> e di Terzian e Terzuolo <sup>(4)</sup> si spiegano forse con una depressione funzionale dei centri del tronco dell'encefalo, più facile ad osservarsi quando un grave intervento acuto s'accoppia a sezione chirurgica prossimale del nervo ottavo. Noi pure abbiamo osservato in 4 Gatti, appartenenti ad altro gruppo d'esperimenti, la scomparsa totale della rigidità in seguito a sezione bilaterale dell'ottavo, effettuata col bisturi. Ma, anche per le ragioni più sopra esposte, i dati positivi ci sembrano di gran lunga più convincenti.

6° I nostri esperimenti confermarono invece appieno i risultati ottenuti da Stella <sup>(3)</sup> con la sezione unilaterale del nervo ottavo. Questo A. aveva osservato che la rigidità degli arti deafferentati scompariva ipsilateralmente alla sezione del nervo ottavo, quando tale intervento veniva messo in atto da un lato solo. Potemmo confermare questa osservazione, sperimentando nelle condizioni descritte nel paragrafo precedente. Il collasso unilaterale della rigidità non era dovuto a fenomeni irritativi, poiché esso poté essere riprodotto in 4 Gatti, reversibilmente e per 3 volte consecutive, mediante iniezione di 0,1-0,2 ml di novocaina all'1 % nella *fissura vestibuli*. Da 2 a 4 min dopo l'iniezione, la rigidità cominciava a decrescere negli arti ipsilaterali; ma dopo 10-12 min ritornava ai livelli normali. Dopo interruzione elettrolitica unilaterale del nervo ottavo l'effetto era invece persistente: bastava però interrompere anche il nervo ottavo dell'altro lato, perché la rigidità ricomparisse nell'arto prima atonico. L'atonia osservata da Stella è quindi legata, almeno in parte, a inibizione riflessa da parte d'impulsi provenienti dai recettori vestibolari del lato opposto. Questa conclusione è in accordo con ricerche elettrofisiologiche di De Vito, Brusa e Arduini <sup>(16)</sup>.

7° Mentre la rigidità degli arti deafferentati non è puramente d'origine vestibolare, altrettanto non può dirsi dell'opistotono. Esso scomparve costantemente dopo interruzione bilaterale del nervo ottavo. L'opistotono va pertanto considerato come dovuto alla liberazione di riflessi tonici labirintici dal freno inibitore del cervelletto. A queste conclusioni erano già giunti Pollock e Davis <sup>(17)</sup>. Le nostre osservazioni permettono di precisare che tale controllo inibitore è principalmente dovuto al nucleo del tetto, a cui arrivano fibre vestibolari [Dow <sup>(18)</sup>] e le cui unità vengono nettamente influenzate dalla stimolazione galvanica del labirinto [Arduini e Pompeiano <sup>(19)</sup>].

(15) C. S. SHERRINGTON, *Man on his nature*. Cambridge, University Press, 1946. Cfr. p. 256.

(16) R. V. DE VITO, A. BRUSA e A. ARDUINI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXI, 458 (1955).

(17) L. J. POLLOCK e L. DAVIS, « Brain », L, 277 (1927).

(18) R. S. DOW, « J. comp. Neurol. », LXIII, 527 (1936).

(19) A. ARDUINI e O. POMPEIANO, « Proc. XX int. physiol. Congress, Bruxelles », 32 (1956).

**Fisiologia.** — *Effetti di lesioni croniche del nucleo del tetto sulle risposte alla stimolazione elettrica della corteccia cerebellare vermiciana del «lobus anterior»* (\*). Nota di GIUSEPPE MORUZZI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata (\*\*) dal Socio G. C. PUPILLI.

Precedenti ricerche [Moruzzi e Pompeiano<sup>(1)</sup>] avevano dimostrato che la stimolazione elettrica (300/sec, 1 msec) della parte vermiciana del *lobus anterior*, in corrispondenza dei lobuli III, IV e V di Larsell<sup>(2)</sup>, aumentava nel Gatto la rigidità da decerebrazione degli arti ipsilaterali, quando la parte rostro-laterale del nucleo del tetto dello stesso lato era stata distrutta selettivamente col metodo stereotassico. Il classico effetto inibitore cerebellare sull'ipertono estensore appariva insomma invertito dalla lesione acuta di una parte ben delimitata del nucleo del tetto. Ricerche successive [Batini e Pompeiano<sup>(3)</sup>] dimostrarono che i neuroni rostro-fastigiali dotati d'azione inibente sul tono dei muscoli antigravitari erano appunto prevalentemente localizzati nella parte rostro-laterale del nucleo del tetto, mentre quelli dotati d'azione aumentatrice erano localizzati nella parte rostro-mediale.

Nelle presenti ricerche ci siamo proposti di eliminare tutti i fattori inerenti ad ogni intervento acuto, decerebrando Gatti che erano stati sottoposti a lesione cronica del nucleo del tetto qualche tempo prima. I limiti della lesione venivano controllati sistematicamente in sezioni istologiche seriate, colorate coi metodi di Nissl e di Weil.

1° Un gruppo di 32 Gatti era stato sottoposto a distruzione cronica (1-48 giorni), bilaterale e totale, del nucleo del tetto, nel corso di ricerche istituite con altro scopo [Pompeiano<sup>(4)</sup>]. Prima di essere uccisi gli animali vennero decerebrati a livello inter- o precolliculare. Non si ottenne alcun effetto sul tono posturale stimolando la parte vermiciana del *lobus anterior* (impulsi rettangolari di 1 msec, a 300/sec), anche con stimoli di 4 Volt, cioè di un voltaggio da 7 a 10 volte superiore alla soglia; per contro la corteccia cerebellare della *pars intermedia* del *lobus anterior* era eccitabile con stimoli d'intensità normale (0,6-1 Volt). Questi dati, in accordo con le osservazioni anatomiche di Jansen e Brodal<sup>(5)</sup>, dimostrano che gli impulsi provenienti dalla corteccia vermiciana sono tutti trasmessi dal nucleo del tetto o almeno da fibre nervose che attraversano questa formazione.

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Pisa e Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXX, 493 (1954).

(2) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », IC, 135 (1953).

(3) C. BATINI e O. POMPEIANO, « Proc. XX int. physiol. Congress, Bruxelles », 71 (1956).

(4) O. POMPEIANO, « Proc. XX int. physiol. Congress, Bruxelles », 735 (1956).

(5) J. JANSEN e A. A. BRODAL, « J. comp. Neurol. », LXXIII, 267 (1940).

2° Altri 32 Gatti erano stati sottoposti a distruzione elettrolitica cronica (1-34 giorni) della sola parte rostro-mediale del nucleo del tetto d'entrambi i lati: anche questi esperimenti erano stati utilizzati nel corso di ricerche istituite con altri scopi [Pompeiano<sup>(4)</sup>]. Quando gli animali vennero decerebrati, si osservò che era possibile ottenere i classici effetti inibitori sull'ipertono estensorio, stimolando la superficie vermiana del *lobus anterior* in corrispondenza dei lobuli IV e V di Larsell<sup>(2)</sup>: i parametri della stimolazione (300/sec, 1 msec, 0,6-0,8 Volt) erano pressoché normali. Pertanto dobbiamo concludere che gli effetti inibitori sulla rigidità da decerebrazione sussistono, pressoché inalterati, dopo lesione completa della parte rostro-mediale del nucleo del tetto.

3° In un gruppo di 5 animali venne effettuata infine la distruzione bilaterale e simmetrica della parte rostro-laterale del nucleo del tetto: dopo 2-6 giorni gli animali vennero decerebrati. La rigidità da decerebrazione risultò intensa e simmetrica [cfr. Batini e Pompeiano<sup>(3)</sup>]; ciò nonostante, la stimolazione della parte vermiana del *lobus anterior* (300/sec, 1 msec, 0,5-0,8 Volt) produsse solo effetti aumentatori sull'ipertono estensore. Dobbiamo pertanto concludere che effetti aumentatori sul tono dei muscoli antigravitari sono del tutto compatibili con la lesione totale della parte rostro-laterale del nucleo del tetto, ed anzi vengono in luce per tale intervento. La interruzione delle vie che trasmettono gli effetti inibitori, rivela verosimilmente la esistenza di componenti aumentatrici della risposta cerebellare, che normalmente sono nascoste dall'effetto soverchiante dell'inibizione.

**Fisiologia.** — *Ricerche elettroforetiche intorno ai costituenti proteici solubili a debole forza ionica contenuti nel miocardio ventricolare, in quello atriale e nel tessuto nodale di Cane, Bue e Cavallo*<sup>(\*)</sup>. Nota di PAOLO CREPAX e PIER LUIGI PARMEGGIANI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

Le indagini svolte in questi ultimi quindici anni intorno al problema della contrazione muscolare, hanno dimostrato che la contrazione del muscolo è il risultato, macroscopicamente rilevabile, delle modificazioni di stato delle proteine miofibrillari (actina e miosina) prodotte dall'ATP. Nelle opportune condizioni, le molecole filamentose dell'actomiosina passano, per azione dell'ATP, dalla configurazione distesa a quella raccorciata.

Lo studio della reazione tra le proteine miofibrillari e l'ATP, la quale costituisce certamente il processo fondamentale della contrazione di tutti i muscoli, striati e lisci, ci fa per altro vedere come alcune proprietà funzio-

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

nali di diversi muscoli siano affatto indipendenti dalla reazione medesima. Tale studio può farsi, nelle migliori condizioni, in preparati allestiti col procedimento suggerito da Szent-Györgyi <sup>(1)</sup> e poi assai largamente usato e perfezionato [A. Weber e H. H. Weber <sup>(2)</sup>; Korey <sup>(3)</sup>]: il muscolo viene immerso in una soluzione di glicerolo al 50 % e ivi mantenuto a bassa temperatura (— 20° C). Le fibre muscolari così trattate (« modelli di fibre » secondo Weber) non reagiscono ad alcun stimolo che non sia l'ATP (o altro composto contenente, come l'acido inosintrifosforico, un legame fosforico ad alto potenziale): in presenza di ATP esse si contraggono e appunto lo studio comparativo dei caratteri di tale contrazione (grado e velocità di raccorciamento) nei diversi muscoli e nei rispettivi modelli di fibre, dovrebbe tornar utile per intendere il sostrato strutturale delle differenti proprietà funzionali che contraddistinguono i diversi tipi di tessuto contrattile.

I diversi muscoli contraendosi si raccorciano in misura assai varia: il raccorciamento massimo possibile è compreso tra il 30 % circa della lunghezza iniziale, come si osserva in alcuni muscoli scheletrici, e l'80 % come nella maggior parte dei muscoli lisci. Le differenze tra i diversi muscoli scompaiono nei rispettivi modelli di fibre, il cui raccorciamento raggiunge senza eccezioni il valore dell'80 %. [H. H. Weber e Portzehl <sup>(4)</sup>].

Lo stesso accade per la velocità di raccorciamento che molto differisce nei diversi muscoli e che è all'incirca la medesima nei rispettivi modelli di fibre. Per ciò che riguarda le proprietà ora considerate, i modelli contrattili differiscono quindi profondamente dai muscoli viventi; e poiché nei modelli la reazione tra ATP e proteine miofibrillari si svolge in condizioni paragonabili a quelle osservabili *in vivo*, si deve concludere che la velocità e il grado di raccorciamento sono determinati *in vivo* da cause di altra natura. Ora lo studio comparativo della costituzione proteica di muscoli dotati di diverse proprietà morfologiche e funzionali ha permesso di stabilire una relazione tra la velocità di contrazione del muscolo e la sua composizione in proteine solubili a deboli forze ioniche [Crepax <sup>(5)</sup>]. Come infatti risulta dai tracciati elettroforetici, gli estratti proteici totali di muscoli bianchi <sup>(5,6)</sup>, di muscoli rossi <sup>(5,7)</sup>, di miocardio <sup>(5,8)</sup> e di utero <sup>(5,9)</sup> presentano, nell'ordine, un aumento progressivo del contenuto di mioalbumina, a cui fa riscontro una diminuzione pure progressiva dei miogeni: corrispondentemente, l'analisi funzionale dimostra che nei muscoli anzidetti la velocità di contrazione

(1) A. SZENT-GYÖRGYI, « Biol. Bull. », XCVI, 140 (1949).

(2) A. u. H. H. WEBER, « Biochim. biophys. Acta », VII, 339 (1951).

(3) S. KOREY, « Biochim. biophys. Acta », IV, 58 (1950).

(4) H. H. WEBER u. H. PORTZEHL, « Erg. Physiol. », XLVII, 369 (1952).

(5) P. CREPAX, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVII, 10 (1951); « Biochim. biophys. Acta », IX, 385 (1952).

(6) P. CREPAX, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVI, 1487 (1950).

(7) P. CREPAX, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVI, 1492 (1950).

(8) P. CREPAX, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Classe Sci. fis., mat. nat., serie 8<sup>a</sup>, X, 169 (1951).

(9) P. CREPAX, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXVI, 1557 (1950).

decrebbe nell'ordine medesimo. La mioalbumina predomina altresì a scapito dei miogeni nei muscoli fetali <sup>(9)</sup>, nei quali sono ben manifeste le proprietà toniche [Duce e Pupilli <sup>(10)</sup>], e nel muscolo scheletrico denervato <sup>(11)</sup>, in cui per effetto della denervazione si nota un rallentamento progressivo delle diverse fasi del fenomeno contrattile [De Caro <sup>(12)</sup>].

Con le presenti ricerche abbiamo esaminato i costituenti proteici solubili a debole forza ionica contenuti nelle diverse parti anatomiche del cuore, essendo note le differenze che presentano le più importanti proprietà funzionali delle medesime.

Le nostre ricerche sono state eseguite su cuori di Cane, di Cavallo e di Bue.

La preparazione degli estratti comprendeva le seguenti fasi: 1° pulitura dei pezzi di miocardio, con asportazione dei frammenti di tessuto adiposo e connettivale; 2° tritatura, mediante tritacarne di conveniente modello, del tessuto mondato; 3° pesata del tessuto tritato e addizione di 2 ml per g di tessuto di una soluzione avente la seguente composizione:  $\text{Na}_2\text{HPO}_4$  0,032 M;  $\text{NaH}_2\text{PO}_4$  0,004 M (pH  $\simeq$  7,5;  $\mu$  0,10); 4° rimescolamento della pappa ottenuta per un tempo di 30-60 min, alla temperatura di 2° C; 5° centrifugazione della pappa per 10 min a 13000 giri/min; 6° dialisi in tubo di cellophane, per la durata di 24-48 h, dell'estratto separato dalla polpa mediante centrifugazione, contro la stessa soluzione impiegata per l'estrazione (e rinnovata per tre volte, nella quantità di litri 2 per volta); 7° centrifugazione dell'estratto dializzato, per 10 min a 13000 giri/min; 8° filtrazione attraverso lana di vetro.

Si è proceduto alla dissezione macroscopica del tessuto cardiaco, avendo presenti alcune particolarità della struttura istologica dell'organo. Così i frammenti di miocardio ventricolare venivano prelevati nello spessore della parete dei ventricoli, a fine di evitare ch'essi contenessero cospicue ramificazioni del tessuto nodale. Dalle sottili pareti atriali prelevavamo frammenti a tutto spessore in regioni topograficamente definite (auricole, setto interatriale): essi, previa mondatura dei tessuti non muscolari, venivano estratti *in toto*. Del setto interatriale prelevavamo il tessuto della regione posta al di sopra della fossa ovale, fuorché quello della parte anteriore della parete stessa, nella quale possono trovarsi alcune diramazioni del sistema nodale.

Abbiamo eseguito la dissezione del sistema di conduzione, attenendoci alle indicazioni riportate da Tawara <sup>(13)</sup>, Chiodi <sup>(14)</sup> e Bortolami <sup>(15)</sup>. In ogni caso esaminavamo istologicamente alcuni frustoli delle parti disseccate e utilizzate per l'allestimento degli estratti, per accertarci di avere effettivamente

(10) V. DUCE e G. C. PUPILLI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XVIII, 255 (1943).

(11) P. CREPAX, « Arch. Sci. biol. », XXXIII, 362 (1949); XXXVII, 419 (1953).

(12) L. DE CARO, « Arch. Sci. biol. », VIII, 140 (1926).

(13) S. TAWARA, *Das Reizleitungssystem des Säugetierherzens*. Jena. G. Fischer (1906).

(14) V. CHIODI, « Clin. vet. », LV, 689 (1932).

(15) R. BORTOLAMI, « Arch. vet. it. », IV, 299 (1953).

isolato frammenti di tessuto nodale e stabilire in quale misura fosse presente nelle parti stesse miocardio comune.

Gli estratti allestiti col procedimento sopra descritto venivano analizzati mediante l'apparecchio di Tiselius fabbricato dalla Klett Co. di New York. Impiegavamo celle analitiche della capacità di  $\simeq 12$  ml (sezione: mm  $25 \times 3$ ).

Le proporzioni relative dei diversi costituenti sono state calcolate mediante la misurazione planimetrica delle superfici dei diversi gradienti, eseguendo la misurazione stessa su immagini più volte ingrandite. Ci si è attenuti al criterio di confrontare tra loro le immagini ottenute con un egual tempo di migrazione elettroforetica, a parità di campo elettrico e di concentrazione proteica totale; e il raffronto è stato fatto considerando lo sviluppo complessivo del gradiente lento, in cui si raccolgono in fasi iniziali di migrazione elettroforetica i costituenti del gruppo dei miogeni (gradiente M, che col procedere della migrazione si risolve nei gradienti secondari  $n$ ,  $m$  e  $l$ ), e del gradiente rapido ( $h$ ) corrispondente alla mioalbumina, e principalmente il valore del rapporto miogeni/mioalbumina, valore che nei diversi tipi di tessuto muscolare si è visto variare nello stesso senso della velocità di contrazione [Crepax <sup>(5)</sup>].

Nelle diverse parti del cuore di Cane che abbiamo esaminate, il rapporto (M/ $h$ ) tra le percentuali medie di miogeni e mioalbumina riscontrate in tutti gli esperimenti eseguiti, ha i seguenti valori: ventricolo sinistro: 2,51; ventricolo destro: 2,48; miocardio atriale, senza distinzione di parti: 1,52. Non esistono quindi differenze apprezzabili tra ventricolo sinistro e ventricolo destro; le differenze esistenti nello sviluppo relativo dei diversi gradienti tra miocardio ventricolare e miocardio atriale sono illustrate dalla fig. 1 A, B.

Nelle varie parti del cuore di Bue (fig. 1 C, D, E), M/ $h$  ha i seguenti valori: ventricolo sinistro: 2,94; ventricolo destro: 2,23; auricola sinistra: 1,36; setto interatriale: 1,12; auricola destra: 0,68; nodo atrio-ventricolare e fascio di His: 0,69.

Nelle diverse parti del cuore di Cavallo (fig. 1, F, G, H), M/ $h$  ha questi valori: ventricolo sinistro: 4,13; ventricolo destro: 3,46; setto interatriale: 2,87; auricola sinistra: 2,71; auricola destra: 2,44; nodo atrio-ventricolare e fascio di His: 1,42; nodo del seno: 1,10.

Per ciò che si riferisce al tessuto nodale, si nota che i valori di M/ $h$  sono alquanto più elevati nel Cavallo che nel Bue. A tale proposito giova rammentare che: 1° la separazione del tessuto nodale dal miocardio comune è più difficile nel cuore di Cavallo che in quello di Bue; 2° nel Bue, il nodo del seno e quello atrio-ventricolare sono copiosamente attornati da miocardio che presenta caratteri intermedi tra il tessuto nodale e il miocardio comune, mentre nel Cavallo questi elementi di transizione si ritrovano solo nelle immediate vicinanze del nodo del seno e di quello atrio-ventricolare; 3° in alcuni esperimenti, mediante una dissezione particolarmente accurata, il tessuto nodale di Bue ha potuto essere separato in modo quasi completo dal tessuto ad elementi di transizione (controllo istologico!); l'analisi elettro-

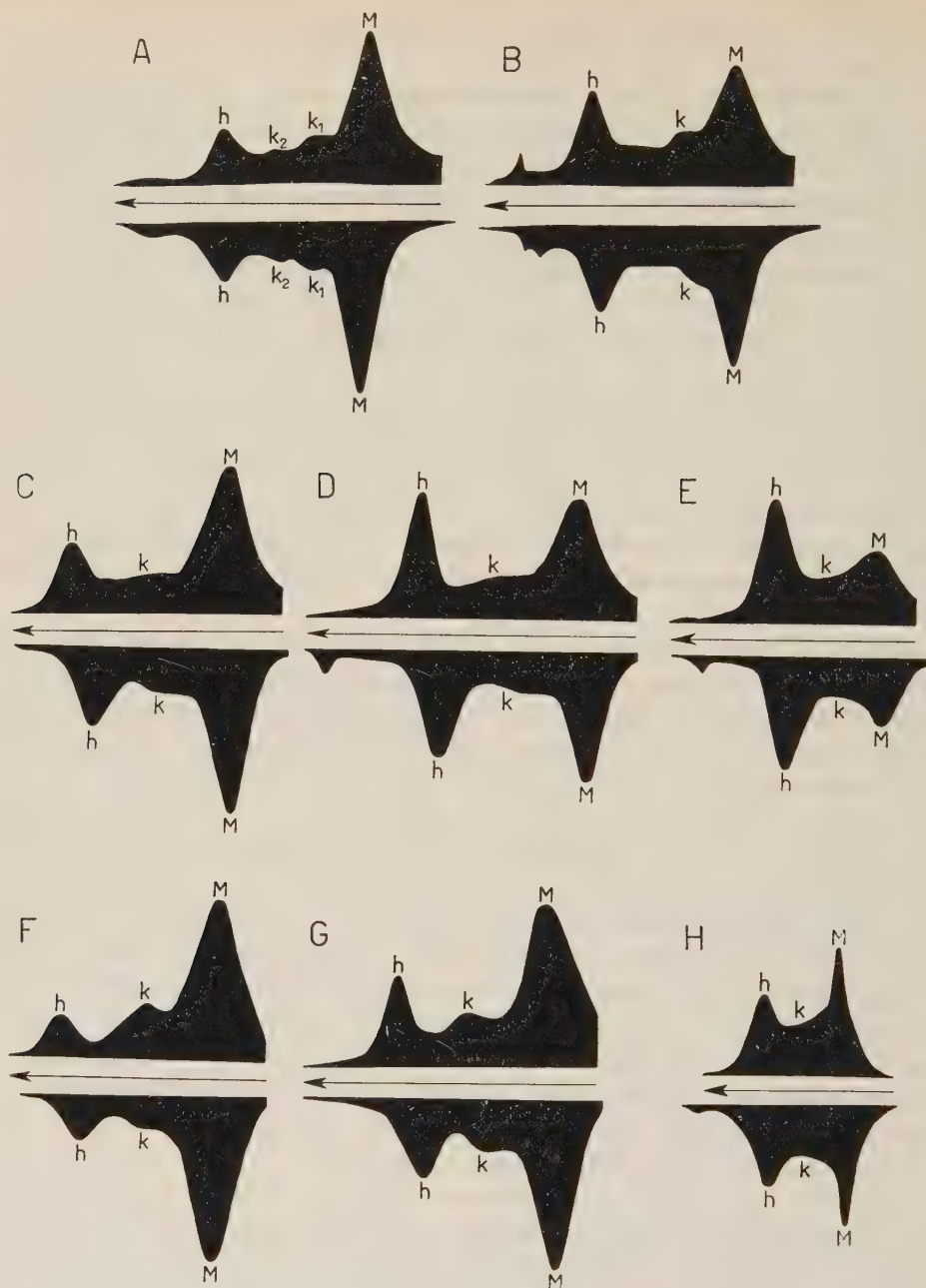


Fig. 1. - Proteingrammi elettroforetici di estratti totali ottenuti a debole forza ionica dal miocardio di Cane, di Bue e di Cavallo ed esaminati in fasi comparabili di migrazione.

A) Ventricolo destro di Cane: 284 min di elettroforesi a 1,25 V/cm; pH 7,36;  $\mu$  0,10. B) Miocardio atriale di Cane senza distinzione di parti: 297 min di elettroforesi a 1,24 V/cm; pH 7,35;  $\mu$  0,10. C) Ventricolo sinistro di Bue: 331 min di elettroforesi a 1,23 V/cm; pH 7,45;  $\mu$  0,10. D) Setto interatriale di Bue: 331 min di elettroforesi a 1,24 V/cm; pH 7,95;  $\mu$  0,10. E) Nodo atrio-ventricolare e fascio di His di Bue: 332 min di elettroforesi a 0,80 V/cm; pH 7,45;  $\mu$  0,10. F) Ventricolo sinistro di Cavallo: 315 min di elettroforesi a 1,22 V/cm; pH 7,48;  $\mu$  0,10. G) Setto interatriale di Cavallo: 330 min di elettroforesi a 1,20 V/cm; pH 7,45;  $\mu$  0,10. H) Nodo atrio-ventricolare e fascio di His di Cavallo: 339 min di elettroforesi a 0,51 V/cm; pH 7,48;  $\mu$  0,10.

foretica degli estratti rispettivi mostra come nel tessuto nodale miogeni e mioalbumina si trovino in proporzioni non dissimili da quelle riscontrate negli estratti allestiti con frustoli di tessuto prelevato con la tecnica consueta e nei quali al tessuto nodale vero e proprio è commisto miocardio a elementi di transizione.

Si può in sostanza ritenere che i valori di  $M/h$  trovati nelle diverse parti del sistema di conduzione del Cavallo non corrispondono a quelli del tessuto nodale proprio della specie, giacché la presenza di miocardio comune nei frammenti di tessuto sottoposti a estrazione (controllo istologico!) viene a diminuire relativamente la quantità di mioalbumina e ad aumentare quella dei miogeni.

La relazione che si può stabilire nel Coniglio tra la velocità di contrazione dei diversi tipi di tessuto muscolare e la rispettiva composizione in proteine solubili a deboli forze ioniche [Crepax<sup>(5)</sup>] sembra verificarsi nel miocardio, quando con Rijlant<sup>(16)</sup> si distinguano nel cuore due tessuti fondamentali, il miocardio comune e quello specifico, ciascuno dotato di caratteristiche proprie di eccitabilità, di contrattilità e di conduttività e si ammetta che la costituzione proteica del miocardio ventricolare e delle parti del sistema di conduzione da noi esaminate, e contraddistinte la prima da un valore massimo e la seconda da un valore minimo del rapporto miogeni/mioalbumina, corrisponda rispettivamente a quella del miocardio comune e del miocardio specifico.

Si può rilevare che al valore, rispettivamente massimo e minimo, del rapporto miogeni/mioalbumina nel miocardio ventricolare e nel tessuto nodale, fa riscontro una velocità di conduzione dell'eccitamento<sup>(17)</sup> rispettivamente di 4 m/sec nel miocardio comune e di 2 m/sec nel miocardio specifico. I valori intermedi di  $M/h$  trovati nelle diverse parti del miocardio atriale, corrispondono verosimilmente al variare delle quantità relative dei due tessuti costitutivi in ciascuna di esse: mancano tuttavia gli elementi per decidere se anche in questo caso sussista una corrispondenza tra i valori stessi e le proprietà funzionali delle rispettive parti dell'atrio.

(16) P. RIJLANT, « Arch. internat. Physiol. », XXXIII, 325 (1931).

(17) Poiché i dati concernenti la durata della contrazione dell'atrio e del ventricolo *in toto* non forniscono nessuna indicazione riguardo alla velocità di contrazione delle rispettive fibre costitutive, sia per la complessa disposizione anatomica delle medesime, sia per le diverse condizioni meccaniche in cui la contrazione avviene negli atri e nei ventricoli, la comparazione tra le diverse parti del cuore conviene fare riferendosi alla velocità di conduzione dell'eccitamento piuttosto che alla velocità di contrazione. Si può infatti dire che, in prima approssimazione, le due grandezze variano in maniera corrispondente [FENN, « Handbuch der normalen und pathologischen Physiologie », vol. VII/1. J. Springer, Berlin (1927)].

**Biologia.** — *Esemplari di «Dugesia lugubris» come «test» biologico nell'esame della tossicità degli estratti embrionali di anfibî anurî («Bufo vulgaris»)* (\*). Nota di CARLO BONDI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

In un precedente lavoro <sup>(1)</sup> saggiando separatamente, su embrioni di Urodeli (*Triton taeniatus* e *Axolotl*), l'azione degli estratti di materiali vitellini e quella di materiali propriamente embrionali di *Rana esculenta* allo stadio di bottone codale, avevo rilevato come gli embrioni di Urodeli venissero molto più rapidamente a morte quando posti a contatto con la parte embrionale. Comparando questi risultati con quelli della letteratura ed in modo, particolare con quelli ottenuti da Spirito <sup>(2)</sup> nei trapianti di abbozzi oculari di *Triton taeniatus* su parti isolate di embrioni di *Rana esculenta*, giunsi a concludere indicando l'opportunità di separare nettamente ciò che può mettersi in evidenza con il metodo dei trapianti e con i metodi simili e ciò che, invece, si mette in risalto con il metodo degli estratti: nel primo caso si evidenziano processi di incompatibilità biochimica tra differenti protoplasmi viventi mentre nel secondo caso si manifestano unicamente processi di tossicità venendo a contatto un protoplasma vivente ed un materiale avulso ormai dalle strutture cellulari e funzionante quindi unicamente in virtù delle sostanze più o meno tossiche in esso presenti.

In alcune prove non riferite nel mio citato lavoro usai anche, come specie atta a rilevare la tossicità o meno degli estratti in parola, la specie *Dugesia lugubris* turbellario che sapevo ben sensibile a varie sostanze tossiche. Ottenni infatti risultati molto chiari nel senso che la tossicità o meno degli estratti risultava evidentissima in *Dugesia*, vi era anzi un perfetto parallelismo con quanti si rilevava in *Triton taeniatus* ed in *Axolotl*. Queste prime osservazioni mi confermarono innanzitutto nella convinzione che gli estratti in parola agivano proprio in virtù delle sostanze tossiche in essi contenute. Si aveva inoltre la possibilità, non certo trascurabile, di poter seguire molto chiaramente e comodamente l'andamento del fenomeno giacché le sostanze tossiche agiscono in *Dugesia* inducendo un processo di citolisi, il quale, secondo i ben noti schemi del Child, comincia, quando le concentrazioni del tossico sono relativamente forti, dall'estremità cefalica e dall'estremità caudale.

Ho creduto opportuno estendere queste indagini essenzialmente con lo scopo di potere giungere a più precise affermazioni in merito al fatto che gli estratti agissero unicamente per il loro contenuto in sostanze tossiche; ne

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia Generale dell'Università di Perugia.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) C. BONDI, « Riv. di Biol. » 47, 405 (1955).

(2) A. SPIRITO, « Roux'Archiv », 127, 61 (1932).

avrei avuto infatti una precisa conferma qualora avessi visto attenuata la loro azione aggiungendovi sostanze antitossiche.

Tra gli Anuri una specie che ha gli embrioni molto ricchi di sostanze tossiche è il *Bufo vulgaris* e mi sono pertanto servito proprio di embrioni di questa specie, naturalmente con queste esperienze non intendo estendere la portata dei risultati anche ad altri Anuri e soprattutto agli embrioni di *Rana esculenta*: altre esperienze saranno fatte in seguito con esemplari di questa ultima specie che, pur nella sua elevata tossicità, non raggiunge certamente quella degli esemplari di *Bufo*.

Come materiale *test* di tale tossicità mi sono servito di esemplari di *Dugesia lugubris* conducendo esperienze parallele su giovani embrioni di *Triton* e di *Axolotl* per poter inquadrare i risultati nel campo della incompatibilità e della tossicità degli anfibî ed i risultati ottenuti hanno mostrato che gli estratti di embrioni di *Bufo vulgaris* portano a morte rapida sia gli embrioni di Urodeli che gli esemplari di *Dugesia lugubris* posti in essi.

Sulla base di questi risultati – d'altra parte prevedibili – ho impiantato nuove esperienze con l'uso di sostanze antitossiche: ho usato per primo del siero di sangue, precisamente di coniglio, è nota infatti tra le proprietà del siero, quella, riferibile con ogni probabilità alla struttura colloidale, di adsorbire in parte alcuni veleni e di immobilizzarli comportandosi pertanto come antitossico<sup>(3)</sup>. Oltre al siero di coniglio normale ho voluto saggiare anche del siero di coniglio preventivamente trattato con poltiglie di *Bufo* per via sottocutanea, secondo la corrente tecnica per la preparazione di anticorpi<sup>(4)</sup>.

Il siero di coniglio, in prove preventive, si è dimostrato senza nessuna azione nociva su *Dugesia*, almeno entro limiti di tempo molto ampi.

Una poltiglia ottenuta pestando accuratamente in un mortaio 50 embrioni di *Bufo vulgaris*, allo stadio di bottone codale, è stata diluita con 10 cc di acqua di fonte e quindi centrifugata per 10' a 2000 giri, al supernatante è stata aggiunta ancora acqua di fonte nelle quantità indicate nella Tabella I. A tali sospensioni di poltiglie si sono uniti esemplari di *Dugesia* scelti della stessa grandezza. La prova avveniva a temperatura ambiente tra i 16°–18° in recipienti di vetro. La resistenza dopo due ore e dopo sei ore degli esemplari di *Dugesia* risulta dalla Tabella I.

Scartate le concentrazioni di poltiglia elevate le quali già dopo 2 ore uccidono tutti o quasi tutti gli esemplari di *Dugesia*, si è presa in esame, per la ulteriore prova, la concentrazione inferiore. La Tabella II illustra come è stata condotta questa seconda prova nella quale, alle poltiglie di *Bufo*, si è unito, in quantità crescente, siero di coniglio trattato o siero di coniglio nor-

(3) J. BORDET, *Traité de l'immunité dans les maladies infectieuses*, p. 39, Masson, Paris (1939).

(4) Una prova per determinare la concentrazione degli anticorpi ha rivelato la fissazione totale del complemento ancora per diluizioni del siero 1 a 40. Altra prova atta a determinare la totale neutralizzazione dell'antigene ad opera del siero ha indicato in 8 a 1 il minimo rapporto siero antigene.

male. Dopo l'aggiunta di siero le poltiglie sono state poste in termostato a 37° per 1 ora indi, riportate a temperatura ambiente, si è aggiunta ad esse acqua di fonte nelle quantità indicate nella Tabella II.

TABELLA I.

| poltiglia centrifugata<br>di <i>Bufo vulgaris</i><br>cc | acqua di fonte<br>cc | specie test<br>e n. esempl. | dopo 2 ore | dopo 6 ore |
|---|----------------------|-----------------------------|------------|------------|
| 0,5   | 9,5                  | 5 planarie                  | vive, lese | morte      |
| 1,0   | 9                    | » »                         | 1 viva     | morte      |
| 2   | 8                    | » »                         | morte      | —          |
| 3   | 7                    | » »                         | morte      | —          |
| 4   | 6                    | » »                         | morte      | —          |

TABELLA II.

| poltiglia<br>di <i>Bufo</i><br>cc | siero<br>coniglio<br>trattato<br>cc | siero<br>coniglio<br>normale<br>cc | acqua<br>di fonte<br>cc | animali<br>test<br>n. | dopo<br>6 ore | dopo<br>16 ore | dopo<br>24 ore | dopo<br>40 ore | dopo<br>72 ore |
|-----------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------------------|-----------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0,5                               | —                                   | —                                  | 9,5                     | 10 planarie           | morte         | —              | —              | —              | —              |
| 0,5                               | 0,5                                 | —                                  | 9                       | »                     | vive          | morte          | —              | —              | —              |
| 0,5                               | 1                                   | —                                  | 8,5                     | »                     | vive          | vive           | morte          | —              | —              |
| 0,5                               | 2                                   | —                                  | 7,5                     | »                     | vive          | vive           | vive           | morte          | —              |
| 0,5                               | 4                                   | —                                  | 5,5                     | »                     | vive          | vive           | vive           | vive           | morte          |
| 0,5                               | —                                   | 0,5                                | 9                       | »                     | vive          | morte          | —              | —              | —              |
| 0,5                               | —                                   | 1                                  | 8,5                     | »                     | vive          | vive           | morte          | —              | —              |
| 0,5                               | —                                   | 2                                  | 7,5                     | »                     | vive          | vive           | 5 vive         | morte          | —              |
| 0,5                               | —                                   | 4                                  | 5,5                     | »                     | vive          | vive           | vive           | morte          | —              |

Risulta in modo chiaro, dalla Tabella II, l'azione protettiva del siero sulla *Dugesia* e si vede inoltre come tale azione sia via via crescente col crescere della quantità del siero sino a raggiungere un massimo quando la proporzione siero poltiglia sia 8 a 1. Il siero ottenuto dal coniglio sottoposto al trattamento con poltiglie di *Bufo* esplica ovviamente un'azione protettiva ancora più accentuata del siero normale.

L'azione che esplica il siero è quella di agglutinare le sostanze tossiche e va, a questo proposito, tenuto presente che «l'agglutinazione è un fenomeno che può essere prodotto, indipendentemente da reazioni immunitarie specifiche, anche da sierî normali»<sup>(5)</sup> ed in quest'ultimo caso, di agglutinazione fisiologica, va precisato che essa si manifesta, di regola, soltanto a titoli di siero molto bassi, come appunto nei casi da me riferiti.

L'azione protettiva del siero è, a mio avviso, una chiara conferma del fatto che le poltiglie agiscono unicamente in virtù delle sostanze tossiche in esse contenute e che quindi col loro uso si evidenziano fenomeni del tutto diversi da quelli di incompatibilità biochimica con i quali finora erano stati confusi.

## COMMEMORAZIONI

### Commemorazione del Socio Carlo Somigliana

Tenuta (\*) dal Socio ANTONIO SIGNORINI

Già molti mesi sono trascorsi dalla morte di Carlo Somigliana: l'eccezionale vigore della sua fibra gli aveva permesso di raggiungere e sorpassare i novantaquattro anni in piena integrità fisica e lucidità di mente, ma ormai sentiva la solitudine creata attorno a lui dall'essere l'un dopo l'altro scomparsi tanti suoi cari colleghi ed amici, e quando vennero improvvisamente a mancargli anche l'affetto e le cure della sorella con cui da molto tempo conviveva, le sue forze di colpo si affievolirono, fino ad estinguersi il 20 giugno dell'anno passato.

Era di gran lunga il più anziano dei Soci di questa Accademia (di cui divenne Corrispondente nel 1898, Socio Nazionale nel 1908) e insieme ne era uno dei Soci più autorevoli, per meriti scientifici e per qualità di carattere.

Con lui l'Accademia ha perduto l'ultimo superstite di coloro che fin dagli ultimi decenni del secolo scorso a tanto prestigio fecero assurgere gli studi di Fisica matematica in Italia.

\* \* \*

Nacque a Como il 20 settembre 1860 dal nobile dott. Cesare Somigliana e da Teresa Volta, nipote diretta del grande fisico comasco.

Fece a Pavia i primi anni di Università, passò quindi a Pisa dove si laureò in Matematica nel 1881, e fino al 1883 seguì dei corsi di perfezionamento alla Scuola Normale.

(5) V. PUNTONI, *Microbiologia medica*, p. 202, Studio editoriale degli istituti universitari, Roma (1949).

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

A Pavia ebbe tra i suoi Maestri Eugenio Beltrami; a Pisa Enrico Betti e Ulisse Dini; e alla dimora pisana risaliva pure la così stretta amicizia con Vito Volterra, suo compagno di studi in quell'Università e alla Normale.

Iniziò la carriera didattica a Pavia, nel 1887, come assistente di Calcolo infinitesimale, ma nel '91 già aveva l'incarico dell'insegnamento di Fisica matematica e nel '92 diventò titolare della cattedra che tanto aveva illustrata il Beltrami, cattedra che tenne per undici anni.

Col primo dicembre 1903, sempre quale professore di Fisica matematica, da Pavia si trasferì a Torino, ove poi insegnò fin quando raggiunse i limiti di età, cioè per ben trentadue anni.

In rapporto a una così lunga, e feconda, attività didattica, va qui fatta parola di un discorso sulla preparazione matematica degli allievi ingegneri tenuto al primo congresso della S.I.P.S. (il congresso del 1907 a Parma) e di un'acuta relazione sull'ordinamento degli studi di matematica nel primo biennio universitario in Italia, da lui scritta quale membro della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico.

*Scienza e applicazione* fu il titolo di un suo discorso inaugurale alla Università di Torino.

\* \* \*

Vasta, profonda e ricca di originalità è l'opera scientifica di Carlo Somigliana. Da Memorie ormai classiche di Elasticità e di teoria del potenziale, da importanti risultati in altri campi della Fisica matematica, essa si estende alla Geodesia e alla Geofisica, compresa la Glaciologia, in riflesso alla viva passione ch'egli aveva per l'alpinismo. Neppure devono restare ignorati i suoi studi di indole storica sulla vita e le opere di Alessandro Volta, studi che furono pure oggetto di un discorso inaugurale all'Accademia delle Scienze di Torino, e si abbinarono a un vivo e meritorio interesse per l'edizione nazionale di tutti gli scritti del sommo fisico.

Nel 1935, all'atto del suo collocamento a riposo, colleghi, discepoli, ammiratori fecero raccogliere in un grosso volume, dal titolo «Memorie scelte», una quarantina delle più importanti pubblicazioni di Somigliana.

«Questo volume — è detto nella prefazione — mentre riassume l'opera passata di Lui, sia augurio affettuoso di ulteriore lunga e proficua attività a questa simpatica figura di Scienziato, Maestro e Alpinista, sempre ugualmente pronto a indagare i fenomeni della natura, a gustare le suggestive bellezze delle nostre Alpi, a studiarne e percorrerne i ghiacciai, a salirne le vette più eccelse!».

\* \* \*

L'augurio affettuoso si realizzò in pieno. Trasferitosi nello stesso anno a Milano, continuò un'efficace attività scientifica, continuò a partecipare attivamente alla vita dei tanti sodalizi di cui faceva parte.

Fra il '35 e il '43 tenne varie, lucidissime conferenze al Seminario di Milano, a quello di Torino, al congresso della U.M.I. a Bologna. Suo fu anche

il discorso inaugurale dell'anno accademico 1939-40 all'Istituto lombardo, sul tema « Ipotesi e discussioni cosmogoniche ».

Quel discorso può ben considerarsi come un modello di prosa scientifica, al pari della commemorazione di Vito Volterra letta da Somigliana all'Accademia Pontificia nel '41. Egli profondamente sentiva tutto ciò che è bello e nobile, onde in ogni suo scritto era portato a cercare anche una classica perfezione di forma.

Oltre che a questa Accademia, all'Accademia di Torino, all'Istituto lombardo, all'Accademia Pontificia, apparteneva alla Società italiana dei XL, all'Accademia d'Italia, all'Istituto veneto, all'Accademia di Padova, all'Accademia svizzera di Scienze naturali.

Era presidente del Comitato glaciologico italiano, come lo era stato del Comitato nazionale geofisico e della S.I.P.S.

Era membro amatissimo e apprezzatissimo della Commissione geodetica italiana, era socio, socio fondatore, della Società italiana di Fisica.

\* \* \*

Nel '43 fu distrutta da bombardamenti aerei la sua casa di Milano, insieme a molti dei libri che gli erano cari.

Si ritirò allora a Casanova Lanza, nella « casa dei Someliana », ma neppure un tale isolamento, a un'età così avanzata, valse a troncargli la sua multiforme attività.

È del '46 una Memoria sugli sviluppi in serie delle espressioni della gravità e la determinazione gravimetrica delle costanti del geoide, nonché la commemorazione di T. Levi-Civita e V. Volterra al Seminario di Milano; del '47 (in collaborazione con B. Finzi e C. Cattaneo) una relazione all'Accademia Pontificia sulla Meccanica razionale e la Fisica matematica nell'Italia settentrionale e in Svizzera dal '39 al '45; del '49 una conferenza a Milano sulle oscillazioni sismiche e le onde di Rayleigh.

L'ultima sua conferenza è del 28 aprile 1952 (quand'egli già si avviava ai novantadue anni) eppure approfondisce un ordine di questioni di cui prima nemmeno si era mai specificamente occupato: una teoria del Milankovitch che tende a spiegare le evoluzioni del clima terrestre nelle varie ere geologiche mediante le variazioni secolari e millenarie del moto kepleriano della Terra prodotte dall'azione gravitazionale degli altri pianeti.

\* \* \*

Tutta l'opera scientifica di Somigliana è improntata alle vedute classiche della Fisica matematica. Qualche suo scritto riguarda la trasformazione di Lorentz, la variabilità della massa, la teoria dei quanta, però la posizione assunta da Somigliana di fronte alla teoria della Relatività e alla moderna Fisica teorica fu nettamente negativa. Anche in private conversazioni appariva chiaro che per lui si sarebbero potuti mantenere invariati i

principii fondamentali della Fisica classica, salvo modificare l'espressione matematica di qualche ente - ad esempio l'espressione dell'azione hamiltoniana - in guisa da ridurla atta a fornire con procedimenti classici risultati conformi ai nuovi dati d'esperienza.

Forse ciò trova una spiegazione nel fatto che le nuove teorie fisiche, pur avendo avuto origine nel primo lustro del nostro secolo, s'imposero alla considerazione dei fisici matematici italiani solo assai più tardi, quando Somigliana già si avvicinava alla vecchiaia ma ancora si sentiva capace, ancora era capace, di efficaci iniziative personali nell'ambito della Fisica classica.

Come bene ha detto B. Finzi commemorando Somigliana all'Istituto lombardo, si può dare un giudizio sintetico sul carattere della sua opera scientifica ripetendo per lui testualmente quanto egli disse commemorando il Volterra: « è un classico puro, che è sempre rimasto fedele alla scuola di Betti e di Beltrami nella quale era cresciuto. La sua Fisica matematica, pur tanto ricca di originalità, è affine a quella di Helmholtz, di Lord Kelvin, di Kirchhoff ».

\* \* \*

È ormai tempo che io passi a qualche considerazione più particolareggiata sulla sua produzione scientifica.

La prima Memoria, pubblicata nel 1885, riguarda l'integrazione delle equazioni dell'Elastostatica per corpi omogenei e isotropi. Ivi già si ravvisa una particolare attitudine a risolvere questioni che allora, nell'indirizzo di Betti, molto venivano studiate in Italia. Tale attitudine doveva eccellere tre anni dopo con la deduzione delle formule ormai universalmente note come « formule di Somigliana ».

Spetta proprio a lui il merito di avere resa palese la possibilità di estendere alla Elastostatica certi metodi precedentemente in uso nella sola teoria del potenziale: le formule di Somigliana corrispondono, nella Elastostatica dei corpi omogenei e isotropi, alla celebre formula di Green.

Tre speciali, ben determinate deformazioni, prendono il posto del potenziale newtoniano elementare e per ciascuna delle componenti dello spostamento elastico si viene ad avere un'efficace espressione mediante le forze di massa, le forze superficiali e gli spostamenti in superficie (in parallelo alle espressioni assegnate da Betti per la dilatazione cubica e le componenti della rotazione locale). Naturalmente caso per caso si deve far fronte all'esuberanza delle condizioni al contorno con procedimenti ispirati al metodo della funzione di Green.

Quasi in contrapposto, si riferisce al metodo delle soluzioni semplici una Memoria del '91 dove Somigliana mostra come tale metodo possa essere codificato per una vasta categoria di sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine, completati da opportune condizioni al contorno. Sono i sistemi da lui detti *simmetrici*, pei quali sussiste un teorema di reciprocità del tipo del teorema di Betti: sistemi ch'egli poi studiò anche sotto altro aspetto, in relazione a problemi elastici bidimensionali.

\* \* \*

Di importanza ben paragonabile a quella delle « formule di Somigliana » sono i suoi contributi alla teoria delle distorsioni elastiche, a cominciare da quanto egli espose in un congresso ove tanto si affermò il prestigio della matematica italiana: il congresso internazionale di matematica del 1908, qui a Roma, anzi proprio in questa sede.

Si tratta, come è ben noto, delle piccole deformazioni attinenti alla infiltrazione o soppressione di un sottilissimo strato di materia in un corpo elastico, lungo un taglio che non ne interrompa la connessione. Per primo le aveva prese in esame, in una Nota lineea del 1901, un Socio straniero dell'Accademia, il Weingarten; supponendo continue, in tutto il corpo, tutte le caratteristiche di deformazione. Le aveva poi magistralmente analizzate il Volterra, nel 1906, supponendo incondizionatamente continue anche le derivate prime e seconde delle caratteristiche di deformazione.

Le ipotesi di Volterra dànno luogo a brillanti sviluppi, ma certo risultano assai restrittive, perché portano a escludere il caso pur tanto interessante dei corpi semplicemente connessi, e insieme impongono che lo spostamento relativo delle due facce del taglio sia rigido, sia immune da leggere deformazioni delle due facce.

Fin dal 1908 Somigliana rese tangibile l'esistenza di distorsioni di Weingarten che non sono distorsioni di Volterra, mediante un esempio concreto inerente a un taglio piano in un corpo semplicemente connesso, esempio dove su tutto il taglio rimane arbitraria la componente normale dello spostamento relativo delle due facce. Sono di epoca posteriore altri sostanziali contributi alla teoria delle distorsioni, quale l'accertamento del fatto che risultano un po' restrittive anche le ipotesi di Weingarten: in realtà importa solo che siano direttamente opposti gli sforzi relativi alle due facce del taglio.

\* \* \*

Uno dei problemi di Fisica matematica più dibattuti verso la fine del secolo scorso era quello di spiegare in termini meccanici gli sforzi maxwelliani di un campo elettromagnetico, come sforzi elastici del cosiddetto « etere cosmico »: se ne era ripetutamente occupato anche il Beltrami.

Somigliana comincia col mostrare la possibilità di sostituire sforzi elastici agli sforzi maxwelliani dipendenti da forze elettriche. Successivamente, per comprendere i campi magnetici, istituisce un'estensione della teoria linearizzata dell'elasticità dove intervengono reazioni elastiche alle rotazioni di ogni elemento di massa. In essa, come nell'estensione della teoria linearizzata discussa in questi ultimi anni per tutt'altro scopo, il potenziale elastico viene a essere una forma quadratica in *nove* variabili: alle sei caratteristiche di deformazione vengono ad aggiungersi le tre componenti della rotazione locale.

Valore certo più duraturo ha la Memoria sul potenziale della teoria classica per corpi anisotropi: mediante procedimenti di estrema eleganza Somigliana determina tutte le speciali forme che possono essere imposte al potenziale

da proprietà di simmetria del corpo anisotropo, con l'espressivo risultato che esse e solo esse si uniformano alla cosiddetta legge di razionalità degli indici per i cristalli.

Altre Memorie riguardano, sempre per corpi anisotropi, l'effettiva soluzione di particolari problemi di Elastostatica. È di Voigt la soluzione del problema che per un cilindro cristallino fa riscontro al problema di de Saint-Venant, è di Somigliana la soluzione del problema complementare del problema di Voigt, dove le forze s'intendono tutte ripartite sulla superficie laterale del cilindro. Tale indagine costituisce solo la prima parte di una vasta Memoria riguardante anche fenomeni piezoelettrici.

Altrove è dimostrato e variamente applicato un teorema che può considerarsi come equivalente al principio delle immagini di Lord Kelvin rispetto alle equazioni classiche dell'Elastostatica, nel caso di corpi anche anisotropi limitati da piani.

\* \* \*

A un'attività così efficace in tanti settori dell'Elastostatica fanno riscontro svariate e importanti ricerche di Elastodinamica.

Risale al 1892 una semplice e completa dimostrazione del teorema di Clebsch relativo alla decomposizione di qualsiasi moto oscillatorio di un mezzo isotropo in un moto longitudinale e un moto trasversale.

In una Nota del 1905 Somigliana introduce i *potenziali ritardati di secondo ordine* (aventi come laplaciano un ordinario potenziale ritardato) e mostra come tali funzioni si prestino a esprimere nel modo più semplice gli integrali del moto prodotto in un mezzo isotropo indefinito da forze arbitrariamente date in uno spazio finito.

Della stessa epoca è il gruppo di Note sopra alcune formule fondamentali della Dinamica dei mezzi isotropi, dove, fra l'altro, vengono estese alla Elastodinamica le formule integrali della prima Memoria di Elastostatica, la Memoria del 1885, utilizzando poi il concetto di potenziale ritardato di secondo ordine per dare ai risultati la forma più opportuna.

Speciale menzione va fatta delle ricerche sulle onde sismiche e le onde di Rayleigh: certo esse contribuirono a quello sviluppo della Sismologia che può oggi darci i migliori indizi sulla costituzione interna della Terra.

Si tratta propriamente di onde propagantisi in un suolo elastico piano, illimitato e infinitamente profondo. La velocità di propagazione delle onde superficiali di Rayleigh è determinata da una delle tre radici (la più piccola) di una certa equazione di terzo grado. Somigliana mette in luce che alle altre due radici di tale equazione, fino allora trascurate, corrispondono coppie di onde piane, l'una longitudinale, l'altra trasversale, e inclinate fra loro in modo da dar luogo a un'identica velocità di propagazione sulla superficie libera del suolo.

Queste coppie di onde vengono così a sovrapporsi in superficie, senza possibilità di interferire causa l'ortogonalità delle loro oscillazioni. È quindi da presumere che proprio esse diano luogo agli effetti superficiali più sensi-

bili, portino insomma un contributo essenziale alle cosiddette *onde lunghe*. Anche numericamente i valori che si ottengono per le velocità di propagazione sono in sufficiente accordo con quelli osservati.

\* \* \*

Allievo di Betti, fin dagli inizi della sua attività scientifica Somigliana si occupò, con successo, anche di teoria del potenziale; e continuò poi sempre a occuparsene.

È del 1887 una sua Nota sulla funzione potenziale logaritmica di una circonferenza non omogenea; del 1911 uno studio diretto delle funzioni armoniche ellissoidali di Morera; del 1931 la determinazione, mediante uno sviluppo in serie di funzioni sferiche, delle linee di forza dei campi newtoniani simmetrici attorno ad un asse; del 1934 una conferenza sulle funzioni di Lamé.

Negli ultimi anni della sua residenza a Pavia aveva avuto l'incarico dell'insegnamento di Geodesia. Forse furono le reminiscenze di quei corsi ad avviarlo, nel 1926, quando già non era lontano dai settant'anni, a risultati di importanza capitale per la Geodesia e la Geofisica.

Da quasi due secoli la famosa relazione di Clairaut era considerata come il punto centrale della teoria della gravitazione terrestre e della applicazione dei metodi gravimetrici alla determinazione della figura della Terra.

Somigliana è il primo ad accorgersi che una certa forma del potenziale di gravità indicata da Paolo Pizzetti fin dal 1894 si prestava a fornire un numero illimitato di relazioni analoghe a quella di Clairaut, e così apre la via alla trattazione di un problema che prima di lui nessuno si era mai posto, il problema della effettiva determinazione di tutti i parametri geometrici del geoide con sole misure di gravità.

Sopra un geoide di forma qualunque, fra i valori della gravità in due punti qualsiasi e il quadrato della velocità angolare esiste una relazione lineare omogenea i cui coefficienti unicamente dipendono dalle coordinate dei due punti e dai parametri geometrici del geoide. Insieme Somigliana dimostra che qualunque possa essere la forma del geoide, i valori della gravità in *tre* punti sono sempre legati da una relazione lineare omogenea i cui coefficienti hanno esclusivamente significato geometrico.

Quest'ultima relazione, nel caso del geoide ellissoidico di rotazione, viene in definitiva a dire che tre valori qualsiasi della gravità (a latitudini note e diverse) determinano in modo unico l'eccentricità dell'ellissoide, mediante un'equazione biquadratica; e assai espressiva risulta anche nel caso del geoide ellissoidico a tre assi.

La stessa relazione ha tante altre conseguenze notevoli, veramente notevoli sia dal punto di vista teorico, sia dal punto di vista pratico. Basterà ricordare quella formula della gravità normale che nel 1930, in un congresso a Stoccolma, fu accettata dalla Associazione geodetica internazionale e perciò è detta formula internazionale.

\* \* \*

Nell'opera scientifica di Somigliana, che a Pisa aveva avuto fra i suoi Maestri pure il Dini, non mancano nemmeno ricerche di Analisi pura, a partire da una Nota del 1888 su alcune rappresentazioni delle funzioni per integrali definiti. Della stessa epoca sono due ampie Memorie degli Annali di Matematica sopra una certa equazione alle derivate parziali del quarto ordine e sulla trasformazione delle equazioni alle derivate parziali lineari omogenee a coefficienti costanti.

Più tardi il problema di stabilità nell'equilibrio di un liquido pesante di densità variabile dall'uno all'altro dei suoi strati orizzontali porta Somigliana a definire e acutamente analizzare la *funzione ordinata* di una data funzione di variabile reale; argomento di cui poi si occupò anche il Volterra.

Pure di Somigliana è un criterio di classificazione dei massimi e dei minimi delle funzioni di più variabili, suggeritogli da proprietà delle linee di cresta e delle linee di valle di una regione montuosa che comprenda diversi bacini idrografici.

\* \* \*

Il mio sunto fugace lascia ancor fuori numerose Note riguardanti la Termologia, l'Idrodinamica, le unità elettromagnetiche, l'induzione magnetica, l'Ottica geometrica, nonché molti scritti di Glaciologia, e in particolare quelli sulla profondità dei ghiacciai, resi così belli ed efficaci da una diretta conoscenza dei fenomeni di scorrimento che con essa stanno in rapporto.

Per fare il rilievo del fondo di un ghiacciaio occorre conoscerne la profondità in corrispondenza a molti punti della superficie libera, ma una determinazione diretta delle varie profondità mediante trapanazioni è praticamente ineffettuabile. Bisogna ricorrere a qualche procedimento indiretto, che riporti a misure più agevoli.

Le misure di velocità superficiale già apparivano adatte allo scopo, ma troppo semplicista era l'ipotesi che in corrispondenza ai singoli punti della superficie libera la profondità non dipendesse altro che dal valore *locale* della velocità. Assurgendo a un punto di vista funzionale, Somigliana si prefigge di collegare l'intero profilo di una sezione del ghiacciaio con tutti i valori della velocità lungo la linea superficiale della sezione.

Un'opportuna semplificazione delle equazioni del moto di un liquido pesante viscoso gli permette in definitiva di ridursi a un problema al contorno integrabile in termini finiti, e così resta acquisita la possibilità di un vero rilievo del fondo di un ghiacciaio in base alla sola conoscenza degli spostamenti in superficie.

Propriamente nelle formule compare il coefficiente d'attrito interno del ghiaccio di ghiacciaio, la cui determinazione sperimentale presenta notevoli difficoltà, però Somigliana arriva a trarne dei limiti abbastanza ristretti dalla sua stessa teoria, approfittando di una fortunata circostanza verificatasi durante le misure eseguite per circa un quarantennio sul ghiacciaio del Rodano dalla Società Elvetica di Scienze Naturali: *dopo* eseguite le misure di

velocità superficiale, in seguito a ritiro del ghiacciaio il fondo di alcune sue zone era rimasto allo scoperto, e così se ne era potuto effettuare un diretto rilievo topografico.

\* \* \*

Somigliana era uomo di grande dirittura morale e di estrema franchezza, magari un po' rude, ma sempre generosa e volta a fin di bene.

Non tollerava ingiustizie nè compromessi, istintivamente rifuggiva da ogni azione men che limpida e leale. Non serbava rancore con nessuno e dopo la più violenta sfuriata era pronto a stendere la mano a chi lo aveva fatto inquietare. Non lesinava lodi, non risparmiava biasimi. Grande e fattivo era il suo interessamento per i giovani, pur quando seguivano indirizzi di studio ben diversi da quelli che a lui erano abituali.

La sua libertà di giudizio, se talvolta lo portò anche a contrasti assai aspri, sempre gli valeva il rispetto degli avversari e l'affettuosa devozione degli amici.

Indubbiamente poderosa è l'opera scientifica di Carlo Somigliana, ma altrettanto viva permarrà in noi un'estrema deferenza per le sue qualità di carattere.

#### PUBBLICAZIONI DI CARLO SOMIGLIANA

Un elenco completo, redatto dal prof. A. M. PRATELLI, già figura in appendice alla commemorazione tenuta da B. FINZI all'Istituto lombardo [« Rend. Ist. lombardo », Parte gen. e Atti uff., 89 (1956) pp. 16-23].

#### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica la dolorosa notizia della morte dei Soci Nazionali: Dante De Blasi (decaduto il 10 luglio 1956). Pietro Rondoni (decaduto il 4 novembre 1956) e Carmelo Ciaccio (decaduto il 1° settembre 1956), tutti della Categoria V, Sezione Patologia; Giuseppe Gola (decaduto il 26 luglio 1956) della Categoria V, Sezione Botanica; e del Socio Corrispondente Luigi Fantappiè (decaduto il 29 luglio 1956) della Categoria I, Sezione Matematica.

Alla memoria dei cari scomparsi, il prof. Giordani eleva un pensiero di reverente omaggio, ricordando con particolare affetto le figure del Segretario Accademico De Blasi, al quale era legato da profondi vincoli di amicizia, e del Socio Rondoni, che egli ebbe l'onore di conoscere quando insegnava alla Università di Napoli e che fu Maestro insigne per l'ammirevole operosità e l'altissimo livello spirituale.

Il Presidente informa la Classe che hanno ringraziato, per la nomina, i Soci Nazionali Luigi Amoroso (Categoria I - Sezione Meccanica), Giovanni Boaga (Categoria II - Sezione Geodesia e Geofisica), Vittorio Puntoni (Categoria V - Sezione Patologia) e i Soci Corrispondenti Giuseppe Imbò (Categoria II - Sezione Geodesia e Geofisica), Giordano Giacomello e Gino Bozza (Categoria III - Sezione Chimica), Livio Trevisan (Categoria IV - Sezione Geologia e Paleontologia), Gaetano Bompiani e Massimo Aloisi (Categoria

V - Sezione Patologia) e i Soci Stranieri: John von Neuman e Carlo Ludovico Siegel (Categoria I).

Il prof. Giordani, prima di dare la parola al Collega Signorini, incaricato di commemorare il compianto Socio Carlo Somigliana, che fu per molti anni il decano dell'Accademia, ne ricorda la fervida attività e la grande vivacità dell'ingegno che gli hanno consentito, fino alla più tarda età, di partecipare ai lavori dell'Accademia. Purtroppo, quest'uomo d'eccezione, che sembrava veramente immortale, ha dovuto cedere anch'esso all'attacco del tempo e l'Accademia, che ora si accinge a commemorarlo, ne sente vivissima la mancanza. Alla commemorazione hanno aderito con un telegramma il Socio Umberto D'Ancona e Signora.

Il Socio Signorini rievoca, con commosse parole, la figura e l'opera del valoroso scienziato scomparso.

Il Presidente ringrazia il Collega Signorini ed esprime ai familiari del compianto Socio, presenti alla seduta, i sentimenti del più vivo cordoglio dell'Accademia.

Il Socio Sansone informa la Classe che il Collega Mineo, impossibilitato ad intervenire alla seduta a causa delle sue condizioni di salute che, quantunque migliorate, non gli hanno ancora consentito di affrontare il lungo viaggio, lo ha pregato di scusarlo presso il Presidente e di porgere il suo saluto ai Colleghi.

Il Presidente ringrazia, riservandosi di inviare al Socio Mineo un messaggio di augurio.

Il prof. Giordani ricorda poi che sono previste, nel corrente anno accademico, numerose commemorazioni di Soci. Nelle sedute di dicembre, di gennaio e di febbraio, il Socio Sansone, lo stesso Presidente Giordani e il Socio Aloisi, commemoreranno i proff. Cipolla, Scarpa e Vernoni, mentre, per le sedute di aprile e di maggio, sono previste le commemorazioni dei proff. De Blasi e Gola, che saranno tenute rispettivamente dai Soci Puntoni e Negri. Nella seduta di giugno il prof. Rondoni sarà commemorato dal Collega Califano, il quale si è anche impegnato a rievocare, in una delle prime sedute del prossimo anno accademico, il prof. Ciaccio. Per la commemorazione del prof. Miolati, che dovrebbe aver luogo nella seduta del marzo 1957, è stato officiato il Socio Sandonnini, mentre non si è ancora scelto l'oratore per la commemorazione del Socio Fantappiè.

Per quest'ultima commemorazione la Classe dà mandato al Presidente di interpellare il Socio Severi.

Il prof. Giordani informa che sono ancora sospese alcune commemorazioni di Soci morti in data non recente e, in considerazione del fatto che, a causa delle numerose perdite che hanno purtroppo colpito l'Accademia in questi ultimi mesi, non vi è seduta per la quale non sia prevista una commemorazione, chiede alla Classe se sia d'avviso che le commemorazioni dei Colleghi, morti in anni ormai lontani, siano direttamente pubblicate, a meno che alcuno dei Soci non desideri espressamente tenerle in seduta pubblica.

La proposta del Presidente è approvata all'unanimità.

## PLICHI SUGGELLATI

Vengono presentati i seguenti Plichi suggellati:

1° Prof. Riccardo Cestari — « L'ultimo teorema di Fermat dimostrato in tutti i suoi casi con metodo unico ». Depositato il 19 settembre c. a.

2° Dott. Maurizio Mariotti — « Il terreno ormonico nel determinismo della infezione tetanica ».

« Contribution à l'étude théorique de la glande adipeuse insulaire cervicale de Pende ou cholestérinique ou de la léthargie Hibernale ».

« Ipotesi di lavoro per l'eziopatogenesi del cancro ». Comunicazione dei dottori Lorenzini Riccardo e Mariotti Maurizio. Pervenuto il 20 settembre c. a.

3° Dott. Cesare Buratti. — « Il processo termodirelettrico e la termopila ». Pervenuto il 21 settembre c. a.

4° Rev. Don Augusto Dalla Valle — Plico contenente una descrizione scientifica. Presentato il 22 settembre c. a.

5° Ing. Narciso Desirello. — « Una velata comunicazione e copia di varie scoperte teoriche nucleari atomiche ». Pervenuto il 24 settembre c. a.

6° Dott. Renato Tosetti. — « Proposta per un tentativo di correzione chirurgica delle Leucosi Leucemiche croniche mediante anastomosi artero-venosa polmonare ». Pervenuto il 29 settembre c. a.

7° Sig. Lucio Saffaro. — « I postulati di invarianza e le loro conseguenze ». Pervenuto il 22 ottobre c. a.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, dispone che i plichi di cui trattasi siano trasmessi all'archivio accademico a disposizione degli interessati.

## CONGRESSI

Il Presidente riferisce brevemente sulla riunione, tenuta a Milano il 26 ottobre u. s., dalla Commissione incaricata di organizzare, in collaborazione con l'E.N.I., il Convegno Internazionale sui giacimenti gassiferi d'Europa e, mentre assicura che i lavori per l'organizzazione di tale Convegno sono già in corso, si riserva di dare ai Colleghi informazioni più particolari, non appena possibile.

Il prof. Giordani, riferendosi ad un invito indirizzato all'Accademia per la partecipazione al V Congresso Internazionale INQUA, che avrà luogo a Madrid e a Barcellona nel settembre e nell'ottobre del 1957, chiede se qualche Collega intenda parteciparvi.

Il Socio G. B. Dal Piaz informa la Classe che, con ogni probabilità, prenderà parte al suddetto Convegno il prof. Trevisan e il Presidente si riserva di interpellare in proposito il citato Socio.

Il Socio Sergi riferisce sul Congresso per il centenario della scoperta dell'Uomo di Neandertal, tenuto a Düsseldorf dal 26 al 30 agosto c. a., al

quale egli ha partecipato in rappresentanza dell'Accademia con le seguenti parole:

« Il Congresso di Düsseldorf, nel quale ho avuto l'onore di rappresentare la nostra Accademia, fu organizzato da un Comitato costituito da v. Koenigswald, prof. a Utrecht, Gieseler, prof. a Tübingen, e da Horst Sieloff, direttore del Löbbecke Museum di Düsseldorf, con il concorso della Wenner-Gren Foundation for Anthropological Research di New-York.

« A 12 Km. da Düsseldorf, si incontra la località di Neandertal dove furono trovate, nell'agosto del 1856, i resti scheletrici del tipo umano estinto che prese il nome del luogo del loro rinvenimento. Con il Congresso si è voluto rievocare, a distanza di un secolo, la storia della scoperta e porre in rilievo, con le relazioni presentate da studiosi specialisti, quanto è valso ad approfondire fino ad oggi le conoscenze sull'antichità dell'uomo. È stata, quindi, un'esaltazione dei pionieri che per primi riconobbero l'alto significato della scoperta di Neandertal, sanzionata e glorificata dall'inventario dei memorabili rinvenimenti, seguiti più tardi ed in tempi successivi. Con questi si è data non solo la dimostrazione della grande distribuzione spaziale delle popolazioni neandertaliane nel pleistocene, ma si è anche riconosciuta l'esistenza di altri tipi umani molto più remoti che risalgono fino all'alba del quaternario.

« Il Congresso fu inaugurato con un discorso di v. Koenigswald, lo scopritore dei pitecantropi di Giava. Nello stesso giorno fu compiuta la visita a Neandertal là dove si trova, sulla roccia, detta di Rabenstein, una piccola lapide a ricordo del famoso rinvenimento e in memoria di Fuhlrott che primo lo identificò. La grotta dove furono trovate le reliquie di Neandertal è oggi scomparsa perché tutta la regione ha subito profonde distruzioni determinate dai lavori di sterramento, eseguiti per ragioni economiche. A fianco della lapide fu deposta una corona di alloro adorna di nastri che recavano i nomi delle località da cui provengono i reperti umani antichi più famosi, tra cui quelli di Saccopastore e di Monte Circeo. È stata una consacrazione simbolica di una grande conquista della scienza con la quale oggi si sono dissipati i forti contrasti che per lungo tempo avevano diviso il campo degli studiosi ed è stata l'apoteosi di Fuhlrott, il modesto insegnante di matematica e di storia naturale del ginnasio di Elberfeld che, affiancato da Schaaffhausen, anatomico di Bonn, tanto aveva combattuto per il riconoscimento del relitto.

« Tra i partecipanti al Congresso, in numero di 130, noveriamo: Adam (Stuttgart), Alcobè (Barcellona), Bay (Basel), Behm-Blancke (Weimar), Bergounioux (Toulouse), Blanc (Roma), Breitinger (Frankfurt a. M.), Breuil (Paris), Cardini (Firenze), Fischer (Freiburg i. Br.), Gieseler (Tübingen), Heberer (Göttingen), Hofer (Giessen), Howell (Chicago), Huizinga (Utrecht), Jacobshagen (Marburg), Kälén (Freiburg. Svizzera), Leonardi (Ferrara), v. Koenigswald (Utrecht), Mc. Burney (Cambridge), Oakley (London), Patte (Poitiers), Rust (Ahrensburg), Sergi (Roma), Singer (Cape Town), Twiesselmann (Bruxelles), Weninger (Wien), Woldstedt (Bonn), Zeuner (London).

«Geologi, paleontologi, antropologi e paleontologi hanno passato in rassegna tutti i rinvenimenti di un secolo al vaglio dei più moderni metodi di indagine. In questo quadro hanno avuto il loro posto gli uomini di Saccopastore e del Monte Circeo, oggi riconosciuti tra i più fondamentali documenti della fase paleantropica della ominazione in Europa, come già ho avuto la ventura di dimostrare con le mie ricerche che sono state l'oggetto della relazione sintetica da me svolta al Convegno di Düsseldorf».

Su invito del Presidente, il Socio Segre riferisce intorno al 4° Congresso dei Matematici romeni, svoltosi a Bucarest dal 27 maggio al 4 giugno 1956, al quale egli ha partecipato rappresentandovi l'Accademia dei Lincei.

Questo Congresso matematico, il primo ad aver luogo in Romania da qualche decennio, è assurto ad importanza internazionale per i contributi di scienziati convenuti a Bucarest da una ventina di Paesi, e per la rassegna fattavi dei più importanti risultati conseguiti dai matematici romeni nell'ultimo sedicennio. Splendide le accoglienze ricevute e mirabile l'organizzazione del Congresso, a cura dell'Accademia della Repubblica Popolare Romana, attorno alla quale gravita quasi tutta la vita scientifica del Paese. Particolarmente notevoli sono apparsi l'entusiasmo dei giovani ricercatori, e l'ammirazione e l'affetto in cui Roma e l'Italia sono ivi tenute in tutti i campi, ma particolarmente in quello matematico, ove da tempo si erano venuti stabilendo con noi legami profondi. Il Socio Segre termina il suo dire auspicando che l'iniziata ripresa di tali legami non abbia ad esser turbata da avvenimenti politici e possa arrecare frutti sempre migliori.

Il Presidente ringrazia i Soci Sergi e Segre e comunica che l'Accademia è stata invitata ad inviare suoi delegati al Convegno Nazionale per gli sviluppi dell'istruzione tecnica e della formazione professionale nel quadro del piano Vanoni, che avrà luogo a Rovigo, per iniziativa di quella Camera di Commercio, nei giorni 17 e 18 novembre c. a. I Colleghi delle Scienze Morali saranno rappresentati dai Soci Fanno e Cessi. Viene scelto, per la Classe di Scienze Fisiche, il Socio Semerano.

Il Presidente, infine, invita la Classe a nominare un suo rappresentante al Convegno sulla ricerca operativa che l'Unione Industriale di Torino ha indetto per i giorni 5-6 dicembre p. v.

La Classe designa il Socio Colonnetti.

## TEMI PER DISCUSSIONI

Il Presidente comunica che il Socio Califano, d'accordo con i Colleghi della Categoria V, ha proposto i seguenti temi per la discussione sulle ossidazioni biologiche:

a) Il meccanismo delle ossidazioni biologiche dal punto di vista chimico-fisico. Verrà interpellato il prof. Cambi, per pregarlo di assumere il compito di relatore.

b) I fermenti delle ossidazioni biologiche. Relatore prof. Rossi Fanelli.

c) Le ossido-riduzioni del tessuto muscolare. Relatore prof. Margaria.

d) L'ossidazione batterica del glucosio. Relatore prof. Califano.

e) L'acido ascorbico nei processi ossido-riduttivi delle piante. Relatore prof. Tonzig.

f) I tossici delle ossidazioni. Relatore prof. Meneghetti, che potrà associarsi un correlatore.

La Classe approva all'unanimità.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente ricorda che l'Accademia è stata invitata a proporre candidati per il 2° Premio Internazionale Saint Vincent di L. 10.000.000 per le Scienze Mediche, promosso dall'Accademia di Medicina di Torino e che, in data 8 agosto c. a., tutti i Soci Nazionali delle Sezioni Fisiologia e Patologia sono stati invitati dal Presidente stesso a formulare le loro proposte. In considerazione del fatto che, con la sola eccezione del Socio Benedicenti, non risulta pervenuta finora alcuna risposta da parte dei Soci suddetti, il Presidente ritiene opportuno che gli uffici provvedano a rinnovare l'invito, estendendolo anche ai Corrispondenti delle due Sezioni.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Sansone presenta il volume «Equazioni differenziali non lineari» redatto da lui e dal prof. Roberto Conti con le seguenti parole:

«Questioni teoriche e problemi della meccanica e sui circuiti elettrici hanno impegnato in quest'ultimo trentennio i matematici nello studio di vaste classi di equazioni differenziali non lineari.

«A fondamento di questo studio stanno le mirabili ricerche topologiche ed analitiche disseminate nelle memorie sulle equazioni differenziali di H. Poincaré, una celebre memoria di A. Liapounoff sulla stabilità del movimento e i classici risultati di George D. Birkhoff sui problemi della dinamica.

«Studiosi di alta fama hanno approfondito la teoria delle equazioni differenziali in più direzioni. Ricordo I. Bendixson che ha dato un primo assetto alla teoria nel campo reale ed O. Perron, al quale si debbono i primi studi sistematici sul comportamento asintotico delle soluzioni e l'analisi dei punti singolari.

«Dal 1930 in poi è avuta una notevole fioritura di ricerche e, per renderle accessibili agli studiosi, nè è derivata la necessità di preparare delle Monografie o dei Trattati.

«Desidero qui indicare i motivi che hanno ispirato la nostra Monografia: classificare, ordinare e ricondurre a pochi filoni una quantità enorme di ricerche fino alle più recenti; approfondire, attraverso l'esame di particolari

casi concreti, la configurazione delle caratteristiche legate ai punti singolari relativi alle equazioni ed ai sistemi differenziali autonomi; descrivere i metodi fin qui elaborati per stabilire l'esistenza di soluzioni periodiche; esporre in maniera sintetica e nello stesso tempo facilmente accessibile le più delicate acquisizioni nello studio asintotico delle soluzioni e sulla stabilità delle soluzioni stesse.

«Noi abbiamo lavorato col fermo proposito di dare alla teoria un carattere unitario e ci ha sorretto la speranza di rendere contemporaneamente un servizio alla matematica pura ed a quella applicata. Il lettore troverà il volume aggiornato a tutto il 1955 e troverà anche indicazioni su alcuni lavori apparsi nei primi mesi del 1956.

«È doveroso, concludendo, che anche a nome del prof. Conti, io rivolga un sentito grazie al Consiglio Nazionale delle Ricerche e al suo Comitato per le Monografie matematiche per aver accolto questo volume nella Collezione, e un particolare grazie va pure all'editore dott. Paolo Cremonese che con tanta passione ha posto la sua Casa editrice a servizio della matematica».

Il Socio Tonzig presenta, illustrandolo brevemente, il volume II dei suoi «Elementi di Botanica» dedicato alla sistematica.

Il Socio Tonolo presenta il 1° volume delle «Opere» di Ricci-Curbastro con le seguenti parole:

«Ho l'onore di presentare all'Accademia il primo Volume delle «Opere» di Ricci-Curbastro. Esso contiene i lavori matematici del Ricci che vanno dal 1877 al 1895; sono preceduti dalla Commemorazione fatta di Lui dal Levi-Civita in questa Classe, nella Seduta del 3 gennaio 1926. Dopo una Memoria di Analisi pura ed un gruppo di Note di carattere fisico-matematico, l'orientamento scientifico del Ricci è reso manifesto dalle tre Memorie fondamentali del 1884, 1886, 1887 (numeri VII, IX, XII); nella prima è contenuto uno studio dettagliato sulle quadriche differenziali nell'indirizzo di Christoffel-Lipschitz, nella seconda si espone un metodo generale per la ricerca degli invarianti e dei parametri differenziali associati ad una quadrica differenziale, e nella terza viene ampiamente studiato il problema della ricerca dei sistemi ortogonali di ipersuperfici negli spazi riemanniani, generalizzando così una questione trattata dal Darboux per gli spazi euclidei riferiti a coordinate cartesiane ortogonali.

«Questo orientamento si concreta con la creazione di quel Calcolo, che Egli chiamò differenziale assoluto, ma che Schouten denominò senz'altro Calcolo di Ricci già dal 1924. La tecnica di questi metodi è tutta contenuta nei lavori che vanno dal 1888 al 1892 (numeri XIII, XIV, XV, XVI). Seguono poi molteplici applicazioni di questo Calcolo, con speciale riguardo alle quadriche binarie, ai sistemi di funzioni in due variabili e alla teoria intrinseca delle superficie, le quali applicazioni culminano nella poderosa Memoria sui  $ds^2$  riducibili alla forma di Liouville.

«La pubblicazione del Volume è stata curata da Angelo Tonolo, diretto discepolo del Ricci, con la collaborazione di Enrico Bompiani e dei suoi discepoli Carmelo Longo e Vittorio Dalla Volta, di Bruno Finzi e di Maria Pastori

e dei loro discepoli Emilio Clauser, Franca Graiff, Giuseppe Peretti, Aldo Pratelli, Bartolomeo Todeschini, Guido Gotusso.

«Ai Membri del Comitato e ai loro collaboratori, l'Unione Matematica Italiana rinnova il suo pubblico grazie.

«Oltre al generoso concorso del Consiglio Nazionale delle Ricerche, hanno largamente contribuito alle spese di stampa del presente Volume: la Famiglia Ricci-Curbastro, l'Università di Padova, l'Istituto Veneto, la Provincia di Padova, i Comuni di Padova e Lugo di Romagna, la Banca Popolare di Padova, la Cassa di Risparmio di Padova, la Società Adriatica di Elettricità, la Società Telefonica delle Venezie.

«Il Comitato rinnova alla Famiglia e agli Enti, anche da parte della Unione matematica italiana, i più vivi ringraziamenti».

Il Socio G. B. Dal Piaz, anche a nome del Collega Bianchi, presenta il volume XIX (1955-56) delle «Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova», diretto da lui stesso e dal Collega Bianchi. Tale volume contiene nove importanti lavori di studiosi italiani e stranieri ed è stato pubblicato grazie ai contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche, dell'Università di Padova, dell'Associazione Nazionale Imprese Produttrici e Distributrici di Energia Elettrica (ANIDEL) e dell'AGIP Mineraria.

Il Socio Signorini presenta una raccolta di opere del fisico matematico Orazio Tedone con le seguenti parole:

«Ho l'onore di presentare una raccolta di opere del fisico matematico Orazio Tedone, antico Socio dell'Accademia scomparso fin dal 1922, per un tragico incidente alla stazione di Pisa che forse qui molti ancora ricordano.

«Nel trentennale della morte, la sua Facoltà, cioè la Facoltà di Scienze di Genova, prese l'iniziativa della pubblicazione di questo volume, fornendo una parte molto notevole dei mezzi necessari per la stampa.

«L'iniziativa fu poi posta sotto gli auspici di un Comitato d'onore presieduto da C. Somigliana e per sovrintendere alla sua attuazione venne costituito un Comitato esecutivo di cui io mi trovai a essere il presidente. Ma la redazione del volume è stata tutta curata, affettuosamente curata, dal figlio di Tedone, il prof. Giuseppe Tedone.

«Il volume si apre con un ricordo della vita e delle opere di Orazio Tedone tratto da scritti di Somigliana e di Vito Volterra, e comprende ben ventisette delle più significative sue Memorie in tanti campi della Fisica matematica e dell'Analisi pura; in particolare le Memorie che, in Italia e all'Estero, fin dai primi del secolo avevano posto il Tedone in prima linea tra i cultori della Teoria dell'Elasticità.

«In questa occasione mi sia permesso di rinnovare i ringraziamenti del Comitato esecutivo a tutti gli Enti e ai privati che hanno voluto contribuire alle spese di stampa».

Il Socio Picone presenta un estratto del volume IV del «Journal d'analyse mathématique» di Gerusalemme e, mettendo in evidenza l'importanza di tale «Giornale», propone che si stabilisca un cambio con le pubblicazioni accademiche.

Il Presidente assicura che si provvederà al riguardo.

Il prof. Giordani presenta, poi, i due volumi dell'opera «La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni», dei proff. Fubini e Albenga, facendo osservare che tali volumi dovevano essere presentati dal Socio Albenga, il quale, però, è assente. Se il predetto Professore riterrà di procedere ad una più particolare presentazione in una prossima seduta, la Classe ne sarà lieta.

Il Presidente presenta, infine, il volume VIII (PS-STO) della «Enciclopedia Medica Italiana», della quale fu presidente il compianto Collega De Blasi, e che è edita dalla «Sansoni - Edizioni Scientifiche».

Il prof. Giordani ringrazia quindi i Soci che hanno offerto opere in omaggio.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci: Nobile, Semerano, Segre (anche a nome del Collega E. Bompiani), Tonzig, Caglioti, Signorini, Bonino, Cotronei, Quilico, Pupilli, Picone, Armellini, Puntoni, Righini.

Il Socio Carobbi presenta una Memoria di Probo Comucci e Fiorenzo Mazzi dal titolo «Le vulcaniti della Dancalia».

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Carobbi e dal Collega Bianchi.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

ARNESE G. — Contributo al problema delle funzioni quasi continue composte (pres. dal Socio M. PICONE).

BATINI C., MORUZZI G. e POMPEIANO O. — Origine e meccanismi di compensazione dei fenomeni dinamici di Luciani (pres. dal Socio G. C. PUPILLI).

BIOCCA E. — Schema di classificazione dei protozoi e proposta di una nuova classe (pres. dal Socio V. PUNTONI).

BIOCCA E. e BENETTI M. P. — *Opisthorchis starkovi* n. sp. parassita di *Felis serval* (pres. dal Socio V. PUNTONI).

CAPRIOLI G. e GIALANELLA G. — Osservazioni fotografiche del Pianeta Marte eseguite, in occasione della grande opposizione del settembre 1956, all'Osservatorio astronomico di Roma su Monte Mario. Nota I (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

GIANNUZZI M. A. — Un nuovo metodo per la determinazione delle orbite fotometrica delle stelle variabili ad eclisse. Nota I (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

MACRIS C. — Sur la grandeur et la vie moyenne des spicules en projection sur le disque solaire (pres. dal Corrisp. G. RIGHINI).

MARRÈ E., FORTI G. e ARRIGONI O. — Sui rapporti di interdipendenza tra alcuni effetti precoci dell'auxina (pres. dal Socio S. TONZIG).

MARTINELLI E. — Sulla varietà kähleriane dotate di isotropia caratteristica (pres. dal Socio B. SEGRE).

OSSICINI A. — Sulla convergenza di serie multiple (pres. dal Socio M. PICONE).

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 novembre 1956

- ALBENGA Giuseppe. — Vedi: FUBINI Guido e ALBENGA Giuseppe.
- BLAGODARNYJ Ja. A. — *Ukusy Karakurta*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Kraevoj Patologii, 1956. Pp. 103, in-8°, con figg.
- BODLAK Karel. — Vedi: BOUŠKA Jan a BODLAK Karel.
- BOUŠKA Jan a BODLAK Karel. — *Výsledky geomagnetických měření na Observatoři Průhonice u Prahy za Rok 1954*. Praha, Československá Akademie Věd, 1956. Pp. 107, in-8°, con figg.
- BRUNI Giordano. — *Catalisi e similcrescita in piante e animali*. Estr. da « Rivista Italiana Essenze, Profumi, Piante Officiali, Olii Vegetali, Saponi », 1955, luglio.
- *Il coesile critico dell'ossigeno è isostero a quello del metano*. Estr. da « Metano », 1952, aprile.
- *Condurre l'indagine fisico-chimica sulla giusta strada*. Estr. da « Il Monitore Tecnico » e « Metano e Ricostruzione », 1956, gennaio-febbraio.
- *Il macrocosmo*. Parma, Tip. S.T.E.P., 1952. Pp. 177, in-8°, con figg.
- *L'opera scientifica italiana ignorata al Congresso dei fisici a Como*. Estr. da « Eco del Lavoro », 1948, gennaio.
- CAPALDO Alfredo. — Vedi: TRIPODO Cesare e CAPALDO Alfredo.
- CLERICI Carlo. — *Il sistema solare e proposta di aggiornamento del modello o descrizione data dal Copernico. Il sole, le radiazioni, la luce, la visione*. Milano, Scuola Tip. « Figli della Provvidenza », 1956. Pp. 31, in-8°.
- CONTI Roberto. — Vedi: SANSONE Giovanni e CONTI Roberto.
- CORPUT (van der) J. G. — *Asymptotic developments I. Fundamental theorems of asymptotics*. Estr. da « Journal d'Analyse Mathématique », vol. IV, 1954-56.
- DARČIJA Š. P. — *Fluorescencija rastenij pri oblučenii svetom raznoj dliny volny*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1950. Pp. 115, in-8°, con figg.
- DE MARCO Gaetano. — *Il calcolo dell'infinitamente grande*. Vol. II: *Sulle orme di Wallis ed oltre*. Napoli, Tip. « La Floridiana », 1956. Pp. 126, in-8°, con figg.
- DE MAYOLA Ernesto. — *Appendice of the unpublished book « Analytical Crystallography »*. Estr. da « Revista de la Facultad de Química », vol. VIII, 1956, n. 1.
- DE PIETRI-TONELLI Pietro. — *Metodi biologici per la determinazione dei residui di insetticidi*. Montecatini, Società Generale per l'Industria Mineraria e Chimica, 1956. Pp. 21, in-8°.
- DI GUARDI N. — Vedi: FUMAROLA D. e DI GUARDI N.
- DOBRUNOV L. G. — *Fiziologičeskije izmenenija v ontogeneze rastenij*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Botaniki, 1956. Pp. 251, in-8°, con figg.
- Enciclopedia Medica Italiana*. Vol. VIII: *Ps-Sio*. Firenze, Sansoni, 1956.
- Flora Kazachstana*. I. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Botaniki, 1956. Pp. XVIII-354, in-8°, con tavv.
- FUBINI Guido e ALBENGA Giuseppe. — *La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni*. Bologna, Zanichelli, 1949-54. Voll. 2, in-8°, con figg.
- FUMAROLA D. e DI GUARDI N. — *Rilievi trombelastografici dopo occlusione sperimentale del coledoco*. Estr. da « Atti e Relazioni dell'Accademia Pugliese delle Scienze », n. s., vol. XIII, 1955, p. 2<sup>a</sup>.
- FUMAROLA D. e LI MOLI S. — *Rilievi trombelastografici nel bambino normale*. Estr. da « Atti e Relazioni dell'Accademia Pugliese delle Scienze », n. s., vol. XIII, 1955, p. 2<sup>a</sup>.
- GALUZO I. G. — *Osnovnye perenosiki raznyh boleznej sel'skohozjajstvennyh životnyh i bor'ba s nimi*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Zoologii, 1956. Pp. 108, in-8°, con figg.

- GARCÍA Godofredo y ROSENBLATT Alfred. — *Análisis algebraico*. Números reales. Conjuntos. Sucesiones infinitas. Series y productos infinitos. Lima, s. e., 1955. Pp. 252, in-8°.
- GRAF A. — *Das Problem der Schweremessung auf See mit Gravimetern*. Estr. da «Zeitschrift für Geophysik».
- ISAAKIDÈS Constantin A. — *La lutte contre la mouche des olives. Les parasites du dacus*. Estr. da «Praktika tēs Akadēmias Athēnōn», t. XXXI, 1956.
- ISTITUTO DI MEDICINA SOCIALE. ROMA. — *L'azione della Medicina Sociale per la rinascita delle aree depresse*. Roma, 1956. Pp. 292, in-8°, con tavv. (Atti del II Convegno Nazionale. Ferrara, 11-12-13 giugno 1955).
- IVŠIN N. K. — *Verhnekembrijskie trilobity Kazachstana*. I. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Geologičeskij Nauk, 1956. Pp. 119, in-8°, con tavv.
- KOZLOVSKIJ M. T. — *Rtut' i amal'gamy elektrohimičeskij metodah analiza*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1956. Pp. 186, in-8°, con figg.
- LERNER Walter. — *Determinações morfológicas em topázio de Congo Socco, Pouso Alegre, Minas Gerais*. Estr. da «Summa Brasiliensis Geologiae», a. II, vol. I, 1947, fasc. 5.
- LI MOLI S. — Vedi: FUMAROLA D. e LI MOLI S.
- LO CURTO Leonardo. — *Realizzazione effettuata all'estero di un particolare sistema di governo della nave*. Memoria presentata al VI Convegno Nazionale di Tecnica Navale. Trieste, 16-18 giugno 1956.
- *Su di un particolare sistema di governo della nave*. (Congresso Internazionale di Tecnica della Nave e della Navigazione. Napoli, 26 settembre-1 ottobre 1954. Sez. I, Architettura Navale).
- Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova*. Vol. XIX, 1955-56.
- NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES. NATIONAL RESEARCH COUNCIL. — *The biological effects of atomic radiation*. A report to the public. Washington, 1956. Pp. 40, in-8°.
- *The biological effects of atomic radiation*. Summary Reports. Washington, 1956. Pp. XIV + 108, in-8°.
- PARASKIV K. P. — *Presmykajuščiesja Kazachstana*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Zoologii, 1956. Pp. 228, in-8°, con figg.
- PASQUALI Umberto. — *L'attrazione terrena e cosmica spiegata secondo la scoperta della nuova legge astronomica del Matematico Dott. U. Pasquali basata sul movimento*. Udine, Tip. «Arti Grafiche Friulane», 1956. Pp. 23, in-8°.
- PEDERSON Johannes. — *The Carlsberg Foundation*. Copenhagen, 1956. Pp. 95, in-8°, con figg. e tavv.
- PFLANZESCHUTZ-KONGRESS. BERLIN 11. BIS 16. JULI 1955. — *Kongressbericht*. Berlin, Deutsche Akademie der Landwirtschaftswissenschaften, 1956. Pp. 256, in-8°, con figg.
- POLSKA AKADEMIA NAUK. — *Biologia wirusów*. Materiały sesji problemowej Komitetu Mikrobiologicznego P.A.N. (Warszawa, 7-8 grudnia 1954 r.). Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1956. Pp. 279, in-8°, con figg. (Zeszyty Problemowe Nauki Polskiej, VII).
- *Zagospodarowanie gleb lekkich*. Materiały z i problemowej sesji rolniczej P.A.N. Warszawa, 25-27. XI. 1954. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1956. Pp. 370, in-8°, con figg. e tavv. (Zeszyty Problemowe Nauki Polskiej, VI).
- Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 1947-1948*. Vol. III: *Physics and Chemistry*, fasc. 3; vol. IV: *Bottom Investigations*, fasc. 2; vol. V: *Sediment Cores from the East Pacific*, fasc. 2 (special Contributions); vol. VI: *Sediment Cores from the West Pacific*, fasc. 2. Göteborg, K. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhälle, 1956. Voll. 4, in-4°, con tavv.
- RESTORI Vasco. — *La teoria einsteiniana della relatività tenta sostituire una falsa scienza alla vera; illusorie apparenze alla realtà: è un insieme di equivoci e di assurde supposizioni, chiamate intuizioni!* Gorizia, Tip. Sociale, 1956. Pp. 61, in-8°.
- RICCI Giovanni. — *Einstein battuto da Newton. Moto assoluto*. Reggio Emilia, Tip. Morini, 1956. Pp. 21, in-8°.
- RICCI-CURBASTRO Gregorio. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I: *Note e Memorie*. Roma, Edizione Cremonese, 1956. Pp. XI-441, in-8°.

- ROLLA Primo G. — *La verità dell'intuizione euclidea*. Firenze, Orbis, 1956. Pp. 17, in-4°, con figg. (In ciclostile).
- ROSENBLATT Alfred. — Vedi: GARCÍA Godofredo y ROSENBLATT Alfred.
- SALDAANHA DA GAMA Reynaldo. — *Considerações sobre a magnesita da Serra das Eguas*. Estr. da « Summa Brasiliensis Geologiae », a. I, vol. I, 1946, fasc. 2.
- SANSONE Giovanni e CONTI Roberto. — *Equazioni differenziali non lineari*. Roma, Edizioni Cremonese, 1956. Pp. VIII-647, in-8°, con figg.
- ŠEVČENKO V. V. — *Opredelitel' slepnej Kazahstana*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Zoologii, 1956. Pp. 103, in-8°, con figg.
- Simpósio sobre secreção celular*. Belo Horizonte, Universidad de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia, 1955. Pp. 135, in-8°, con tavv.
- SLUDSKIJ A. A. — *Kaban*. (Morfologija, Ekologija, Hozjajstvennoe i Epizootologičeskoe Značenie, Promysel). Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Zoologii, 1956, Pp. 220, in-8°, con figg.
- SOKOLOV A. A. — *Značenie doždevykh červej v počvoobrazovanii*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Počvoedenija, 1956. Pp. 263, in-8°, con tavv.
- SOLARINO Giuseppe. — *Discorso in onore del prof. Carmelo Ciaccio*. [Messina, 14 maggio 1955]. Estr. da « Atti della Reale Accademia Peloritana », vol. LV, 1954-55.
- *Elettroshock e poteri immunitari*. Estr. da « Atti del VI Congresso Internazionale di Microbiologia », vol. II, 1953, sez. VI-VII.
- *Vitamine, ormoni cortocotrofici e poteri immunitari*. Estr. da « Atti del VI Congresso Internazionale di Microbiologia », vol. II, 1953, sez. VI-VII.
- *Vitamine e poteri immunitari*. Estr. da « Acta Vitaminologica », a. VIII, 1954, fasc. 4.
- SOLARINO Giuseppe e TRIPODO Cesare. — *Plasmocitosi sperimentale da DDT e reazioni immuno-biologiche*. Nota I: *Comportamento degli anticorpi serici e del potere complementare*. Estr. da « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese », vol. XXXIII, 1954, n. 4.
- *Plasmocitosi sperimentale da DDT e reazioni immuno-biologiche*. Nota II: *Comportamento del quadro proteico elettroforetico*. Estr. da « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese », vol. XXXIII, 1954, n. 5.
- SOLARINO Giuseppe e TRIPODO Cesare. — *Il quadro proteico elettroforetico del sangue di animali immunizzati e sottoposti a prolungato trattamento con azoifriti*. Estr. da « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese », vol. XXXIII, 1954, n. 4.
- STEPANOV B. I. — *Ljuminescencija složnykh molekul*. I. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, 1955. Pp. 326, in-8°, con figg.
- ŠTICH Zdeněk. — *Assistenza sanitaria in Cecoslovacchia*. Praha, « Orbis », 1954. Pp. 71, in-8°, con figg. e tavv.
- Struktura Związów nieorganicznych*. II Konferencja teoretyczna chemików Polskich. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1956. Pp. 549, in-8°, con figg.
- TAKASU Tsurusaburo. — *A fact, which is fatal to the theory of General Relativity of A. Einstein*. Pp. 3 (Dattiloscritte).
- *Non-Conjectural Theory of Relativity as a Non-Holonomic Laguerre Geometry realized in the Three-Dimensional Teleparallelismically Torsioned Cartesian Space fibered with Non-Holonomic Actions*. Estr. da « The Yokohama Mathematical Journal », vol. III, 1955.
- TECHNISCHE UNIVERSITÄT. BERLIN — CHARLOTTENBURG. — *Akademische Feier der Fakultät für Landbau in der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg am 26. januar 1956 aus Anlass des 75-jährigen Bestehens des Landbau-Hochschulstudiums in Berlin*. S. n. t. Pp. 52, in-8°.
- TEDONE Orazio. — *Opere scelte*. Edite per iniziativa dell'Università di Genova. Roma, Edizioni Cremonese, 1956. Pp. XXII-478, in-8°.
- TONZIG Sergio. — *Elementi di botanica per gli studiosi di biologia, scienze agrarie e scienze naturali*. Vol. II. Milano, Casa ed. Ambrosiana, 1956. Pp. XV-1402, in-8°, con figg.
- TRIPODO Cesare. — *Comportamento degli anticorpi serici a seguito del trattamento prolungato con azoifriti*. Estr. da « Bollettino dell'Istituto Sieroterapico Milanese », vol. XXXIII, 1954.
- *Plasmocitosi sperimentale da DDT e reazioni immuno-biologiche*. IV. *Comportamento della plasmalipasi tributirrinica*.

- Estr. da « Archivio di Scienze Biologiche », vol. XXXIX, 1955.
- TRIPODO Cesare e CAPALDO Alfredo. — *Comportamento del tempo di protrombina, del fattore VII e del tempo di ricalcificazione a seguito del trattamento prolungato con azopiriti*. Estr. da « Haematologica », vol. XXXVIII, 1954.
- *Plasmocitosi sperimentale da DDT e reazioni immuno-biologiche*. III. *Comportamento di alcuni fattori della coagulazione*. Estr. da « Archivio di Scienze Biologiche », vol. XXXIX, 1955.
- TRIPODO Cesare. — Vedi: SOLARINO Giuseppe e TRIPODO Cesare.
- Trudy Konferencii po melioracii i osvoeniju bolotnyh i zaboločennyh pozv (15-19 aprelja 1955 g.)*. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, 1956. Pp. 472, in-8°, con figg.
- VILLAR G. E. — *Energia atomica para la paz*. Estr. da « Revista de Ingeniería », nn. 571, 572, 573, 574.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 15 dicembre 1956*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Chimica.** — *Sulla struttura cristallina del polipropilene isotattico* <sup>(\*)</sup>. Nota di GIULIO NATTA, PAOLO CORRADINI, MARCO CESARI presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. NATTA.

In una Memoria presentata a questa Accademia nella seduta dell'11 dicembre 1954 avevamo comunicato alcuni risultati preliminari sullo studio roentgenografico del polipropilene isotattico, riguardanti la forma della catena e l'ordinamento delle molecole nel reticolo cristallino [1].

Successivamente abbiamo affrontato lo studio del polistirolo [2] e del poli-alfa-butene [3] per i quali siamo pervenuti ad analoghi risultati per quanto riguarda l'architettura delle singole macromolecole ed inoltre alla completa risoluzione della struttura reticolare.

Riferiamo in questa Nota sulle ulteriori ricerche, da noi svolte per completare la conoscenza della struttura reticolare del polipropilene, che hanno incontrato maggiori difficoltà in confronto cogli altri polimeri isotattici da noi studiati.

CELLA ELEMENTARE <sup>(1)</sup>. — Fin dall'inizio delle nostre ricerche è apparsa evidente l'impossibilità di ordinare i riflessi del polipropilene in un reticolo a simmetria ortorombica o superiore. Nella nostra prima Nota era stato

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) Alla determinazione della cella elementare ha collaborato in un primo tempo anche il dr. I. W. Bassi.

affermato che la proiezione della cella elementare lungo  $c$  (asse delle fibre) corrisponde a delle costanti minime  $a' = 6,56 \pm 0,05 \text{ \AA}$ ,  $b' = 10,92 \pm 0,1 \text{ \AA}$ ,  $\gamma' = 106^\circ 30'$  e che l'asse  $c$  è inclinato con un angolo diverso da  $90^\circ$  e prossimo ai  $100^\circ$  sul piano  $ab$ . Come vedremo, la cella minima, per la quale è possibile

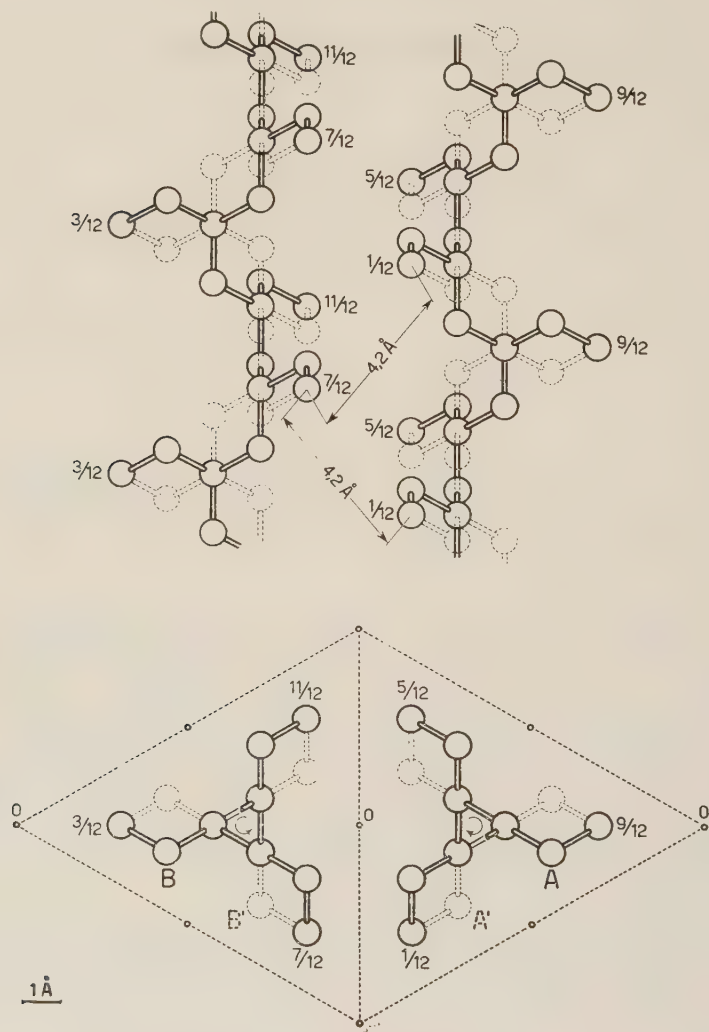


Fig. 1. - Modello schematico di due molecole affaccianti nel poli-alfa-butene (A).

rendere conto della posizione ed intensità di tutti i riflessi, non si discosta dai valori allora proposti. Abbiamo tuttavia preferito successivamente riferirci ad una diversa rappresentazione della cella, che presenta una simmetria più alta.

Sulla base dei riflessi equatoriali, è infatti possibile costruire, ponendo  $a' = 6,56 \text{ \AA}$ ,  $b'' = 2b' \sin \gamma'$ , un reticolo reciproco, con assi a  $90^\circ$ , per il quale vengono a mancare sistematicamente i riflessi  $(hko)$  con  $h + k = 2n$ .

La proiezione sul piano  $ab$  di tale cella risulta centrata. Per quanto riguarda l'inclinazione di  $c$  rispetto al piano  $ab$ , se si suppone che il reticolo sia monoclino,  $c$  deve risultare normale ad uno dei due assi. In realtà, se si suppone  $c$  normale a  $b$  ed inclinato di circa  $100^\circ$  su  $a$ , è possibile senza ambiguità assegnare indici a tutti i riflessi degli strati superiori. Mancano sistematicamente i riflessi ( $hkl$ ) con  $h + k = 2n$ . Una ulteriore precisazione del reticolo e della sua simmetria non può tuttavia prescindere (nel caso dei polimeri costituiti da grandi molecole e da cristalli non isolabili) anche da considerazioni strutturalistiche, date le ambiguità che possono permanere anche dopo una ricostruzione, numericamente perfetta, del reticolo reciproco.

**CONSIDERAZIONI STRUTTURISTICHE.** — Come abbiamo esposto in una precedente comunicazione [3] relativa al poli-alfa-butene, si può ammettere che nel reticolo cristallino di questo polimero isotattico siano presenti in quantità uguale molecole ad elica destra ed a elica sinistra. Si può anche ammettere che nello stesso sito si presentino statisticamente catene, aventi ciascuna tutti i legami  $\text{CH}-(\text{C}_2\text{H}_5)$  tra loro *isoclini*, ossia tutti inclinati di un angolo  $\varphi < 90^\circ$ , rispetto ad una direzione prefissata dell'asse  $c$  (catene *anacline*) oppure catene isomorfe, aventi tali legami tutti inclinati di un angolo  $180^\circ - \varphi$  rispetto alla stessa direzione (catene *catacline*, ossia *anticline* nei riguardi delle precedenti). Tale ipotesi è stata confermata dall'accordo ottenuto tra intensità sperimentali e calcolate.

Quanto è stato trovato per il poli-alfa-butene può essere esteso ad altri polimeri isotattici. Nel reticolo di un polimero isotattico, data una catena destra riferibile ad assi ortogonali  $x, y, z$ , con  $z$  coincidente con l'asse della catena e con i legami  $\text{CH}-\text{R}$  isoclini, deve essere presente anche la catena enantiomorfa (riferibile ad assi  $\bar{x}, y, z$ ) (sinistra) e le corrispondenti

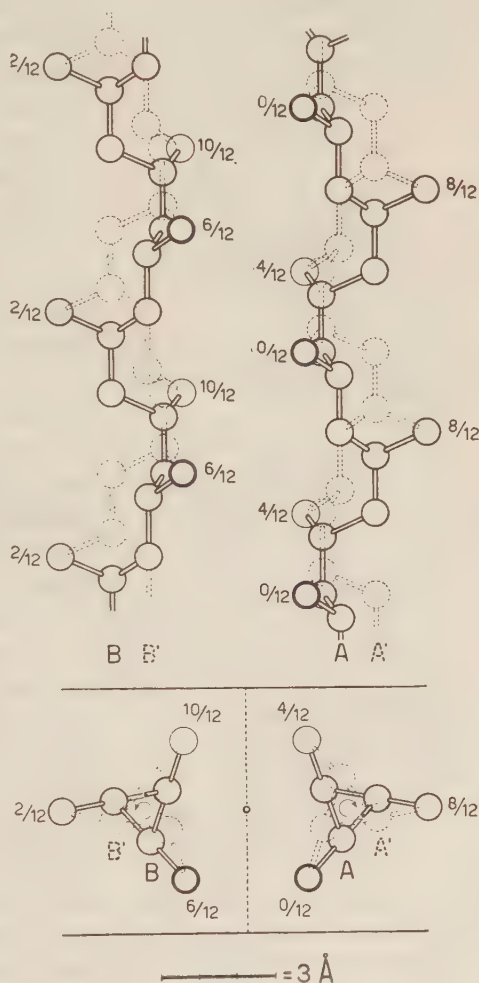
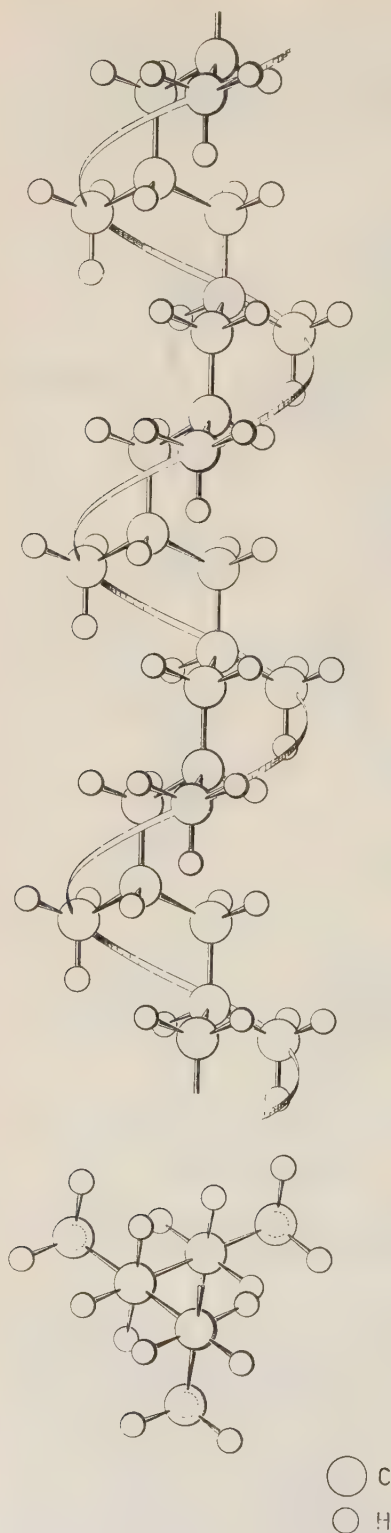


Fig. 1. — Modello schematico di due molecole affiancanti nel polipropilene (B).



catene ottenibili per rotazione di  $180^\circ$  attorno ad una retta ortogonale a  $z$  ( $x, \bar{y}, \bar{z}$ : destra;  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ : sinistra) anticline rispetto alle precedenti. Catene destre, sinistre ed anticline possono eventualmente coincidere tra loro nei polimeri non isotattici o vicariarsi statisticamente se presentano un equivalente ingombro sterico nello stesso sito del cristallo. Nel caso del poli- $\alpha$ -butene si era trovato che eliche destre e sinistre occupano posizioni distinte, ma che, nelle posizioni occupate da ciascun tipo di elica, possono distribuirsi statisticamente catene anacline o catacline, le cui interazioni steriche nei riguardi delle molecole vicine sono praticamente le stesse.

Nel reticolo cristallino del poli- $\alpha$ -butene questa situazione viene realizzata con la combinazione di un centro di simmetria con un piano di simmetria con traslazione lungo  $c$  (fig. 1). Abbiamo supposto pertanto che un'analogia situazione si verifichi anche per il polipropilene con coppie di macromolecole spiralizzate enantiomorfe affacciate nei nodi ed al centro della cella elementare monoclinica precedentemente proposta.

Semplici considerazioni sul possibile impaccettamento dei metili permettono di precisare le costanti della cella monoclinica a faccie centrate in  $a = 6,65 \text{ \AA}$ ,  $b = 20,96 \text{ \AA}$ ,  $c = 6,50 \text{ \AA}$ ,  $\beta = 99^\circ 20'$ .

Il volume della cella elementare, contenente 12 unità monomeriche, è di  $894 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ , la densità calcolata 0,936. Gruppo spaziale  $C_{2h}^6$ .

**STRUTTURA DEL POLIPROPILENE.** - Dal modello da noi precedentemente proposto per la catena del polipropilene (fig. 2) e dalle considerazioni sopra esposte deriva un modello reticolare, a cui corrisponde un buon accordo tra intensità sperimentali e calcolate. La catena presenta un angolo  $C-C-C = 114^\circ$  ed obbedisce al principio del

Fig. 2. - Modello della catena del polipropilene.

massimo allontanamento dei legami semplici. Per l'angolo C—C—CH<sub>3</sub> il migliore accordo si ottiene supponendo che esso sia di 110°. Il valore medio dell'indice di attendibilità (reliability index)  $R = \frac{\sum |F_c - F_o|}{\sum |F_o|}$ , comprendente anche i riflessi non osservati per tutti gli strati ( $hk0$ ,  $hk1$ ,  $hk2$ ), risulta molto buono e uguale a 0,24.

Nella fig. 3 è riportato un modello dell'impacchettamento risultante.

Nella tabella I sono forniti i valori scelti delle coordinate degli atomi, e nella fig. 4 è mostrato l'accordo tra fattori di struttura sperimentali e fattori di struttura calcolati.

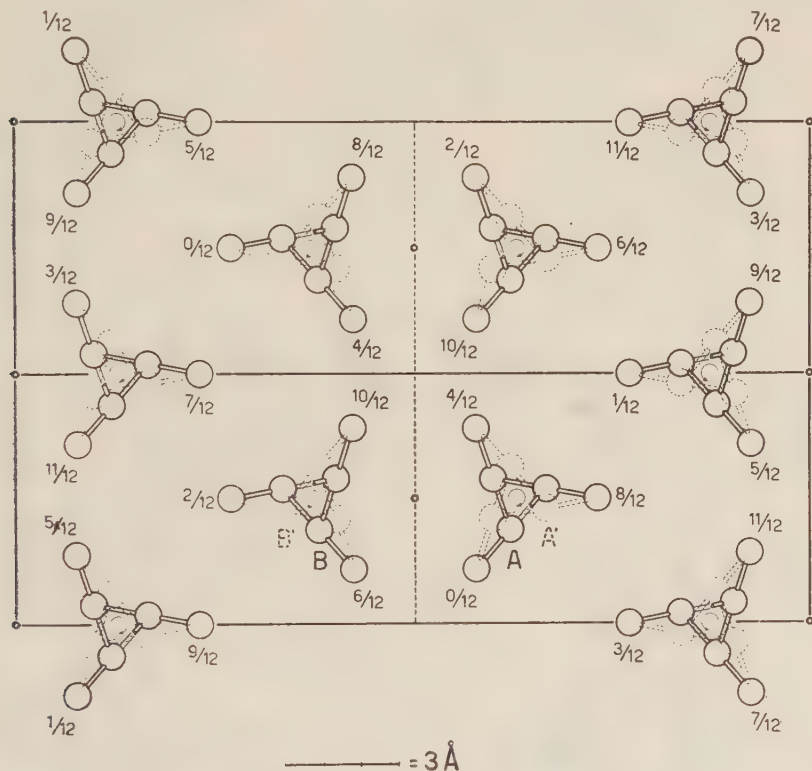


Fig. 3. — Modello dell'impacchettamento nel polipropilene. Nello stesso sito si possono vicariare molecole isomorfe anticline tra loro: anaciline (a tratto pieno), catacline (tratteggiate).

**DISCUSSIONE DELLA STRUTTURA.** — La struttura del polipropilene presenta molte caratteristiche degne di nota, per la forma della catena, per la regolarità delle distanze interatomiche e per la distribuzione statistica di molecole anticline.

La forma della catena obbedisce ai due principi, che riteniamo di validità generale per gli alti polimeri, quello del massimo allontanamento dei legami semplici e quello del massimo allontanamento degli atomi non collegati da legami adiacenti [4].

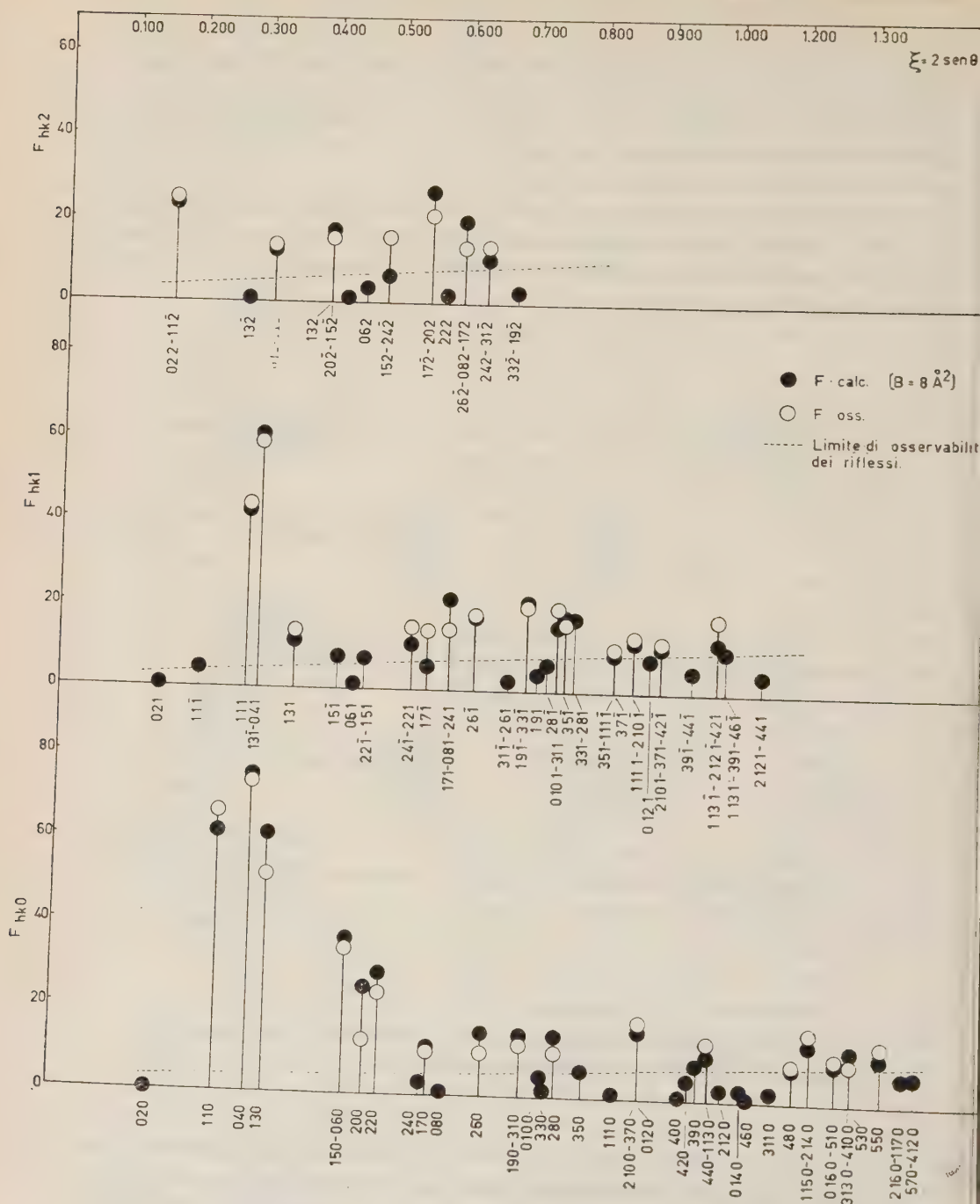


Fig. 4. - Grafico dell'accordo tra  $F_{\text{calc}}$  e  $F_{\text{oss}}$ .

A parte la diversa simmetria del reticolo, l'impacchettamento delle molecole del polipropilene assomiglia a quello realizzato dalle catene di eguale simmetria del poli-alfa-butene e del polistirolo (fig. 5), se ne differenzia perchè l'asse ternario elicogiro presente nella catena non è più elemento di

simmetria del cristallo. D'altronde una struttura romboedrica come quella del poli-alfa-butene non è probabile nel polipropilene, in quanto darebbe luogo ad una struttura molto meno densa.

Gli accostamenti di Van der Waals tra catene differenti si riducono a due soli tipi: metile-metile ( $4,35 \text{ \AA}$ ) e metile-metilene ( $4,0 \text{ \AA}$ ). I contatti

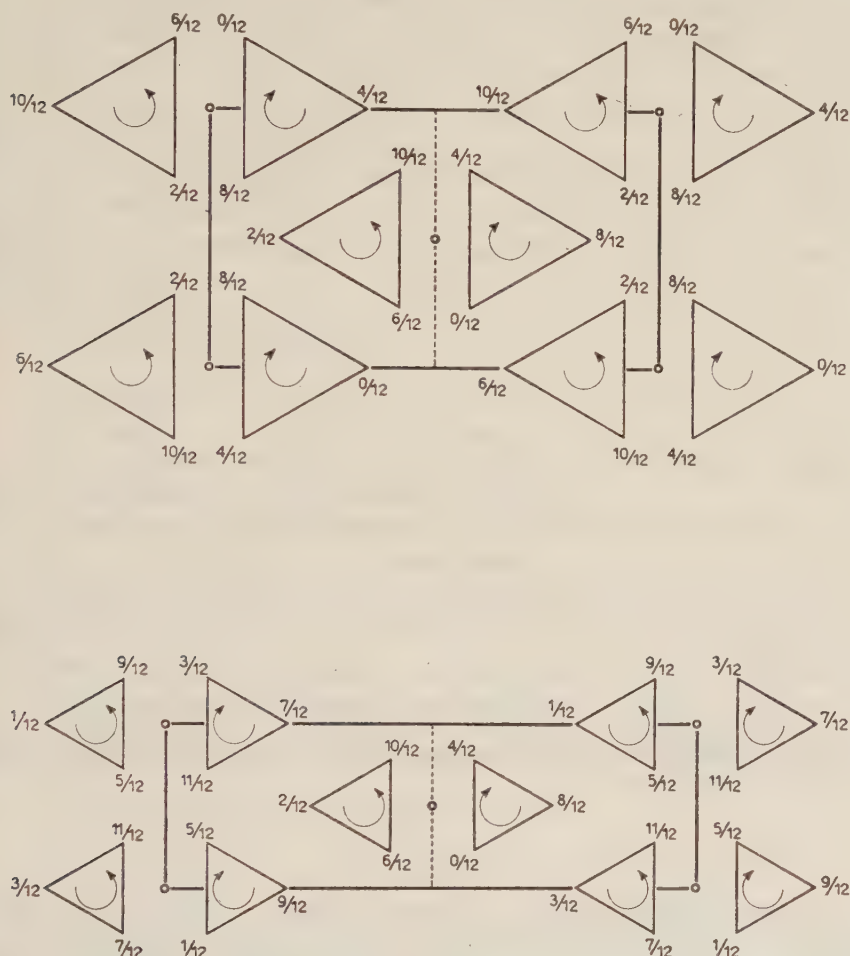


Fig. 5. - Confronto schematico del modo di impacchettamento nel poli-alfa-butene e nel polipropilene.

metile-metile avvengono prevalentemente lungo  $a$ , mentre i più ravvicinati contatti metile-metilene avvengono lungo  $b$ . Tale asse è quello lungo il quale la dilatazione termica è maggiore. Questa osservazione ha aiutato in qualche caso, dal confronto di distanze reticolari a temperature diverse, nell'assegnare indici ai riflessi, dove non era possibile altrimenti decidere, a causa di sovrapposizioni. Suggeriamo tale metodo come un criterio generale per assegnare gli indici, nei casi dubbi, a riflessi di polimeri. Alla distribuzione statistica, e pertanto poco densa, delle molecole dovrebbe corrispondere una

minore entropia di fusione del polipropilene e ciò potrebbe giustificare la più elevata temperatura di fusione del polipropilene isotattico rispetto a quella del polietilene.

TABELLA I.

| Atomi di carbonio        | Coordinate degli atomi nella cella (Gr. Sp. $C_{2h}^6$ ) |       |       |
|--------------------------|--|-------|-------|
|                          | $x$  | $y$   | $z$   |
| C <sub>1</sub> . . . . . | 0,711  | 0,075 | 0,035 |
| C <sub>2</sub> . . . . . | ,917   | ,099  | ,153  |
| C <sub>3</sub> . . . . . | ,917   | ,099  | ,387  |
| C <sub>4</sub> . . . . . | ,289   | ,075  | ,470  |
| C <sub>5</sub> . . . . . | ,118   | ,121  | ,518  |
| C <sub>6</sub> . . . . . | ,118   | ,121  | ,755  |
| C <sub>7</sub> . . . . . | 0  | ,233  | ,774  |
| C <sub>8</sub> . . . . . | ,958   | ,164  | ,826  |
| C <sub>9</sub> . . . . . | ,958   | ,164  | ,063  |

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. NATTA e P. CORRADINI, «Atti Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. IV, Sez. 2<sup>a</sup>, fasc. 5 p. 673 (1955).
- [2] G. NATTA e P. CORRADINI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. XVIII, fasc. 1 p. 19 (1955). G. NATTA e P. CORRADINI, «Makrom. Chemie», 16, 77 (1955).
- [3] G. NATTA, P. CORRADINI e I. W. BASSI, «Makrom. Chemie», 21, 240 (1956).
- [4] G. NATTA, *Conferenza in corso di pubblicazione tenuta a Varenna nell'agosto 1956* (Convegno di strutturistica).

**Chimica inorganica.** — *Cianuri cobalto dipiridilici e fenantrolinici*<sup>(\*)</sup>. Nota di LIVIO CAMBI e di ERNESTINA PAGLIA, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. CAMBI.

Le ricerche riferite in questa Nota si collegano a quelle di L. Cambi e A. Cagnasso sui complessi dipiridilici e fenantrolinici (sali di F. Blau) degli alogenuri dei metalli della 1<sup>a</sup> serie di transizione<sup>(1)</sup>, riprendendo l'argomento dei complessi derivati dal cianuro di cobalto  $\text{Co}(\text{CN})_2$  e dalle predette basi<sup>(2)</sup>.

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R. dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

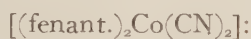
(1) Questi «Rendiconti», 19, 458 (1934).

(2) L. CAMBI e A. CAGNASSO, «Rend. R. Ist. Lombardo», 67, 741 (1934).

I complessi derivati dai cianuri di cobalto presentano in generale nuovo interesse per il loro intervento in alcune sostanze a funzione biologica, come è noto.

1. CIANURO  $\text{Co}^{\text{II}}$  FENANTROLINICO. — La revisione e l'estensione delle attuali nostre ricerche riguardano il cianuro già descritto nel 1935 corrispondente alla composizione  $(\text{fenant.})_{2,5} \cdot \text{Co}(\text{CN})_2$  che presentava alta stabilità, con paramagnetismo equivalente a 1,7 M.B. per 1 Co a  $25^\circ\text{C}$ , corrispondente cioè ad 1 elettrone spin, da attribuirsi alla partecipazione di due elettroni  $3d$ , di  $\text{Co}^{2+}$ , alle valenze coordinative.

La ricerca, allora, rimase sospesa. Quella odierna ha dimostrato che qualunque sale di  $\text{Co}^{\text{II}}$ , e molti sali di  $\text{Co}^{\text{III}}$ , anche complessi in presenza di o,o-fenantrolina, reagiscono con i cianuri alcalini per generare il termine stabile comune:



$$\chi_{\text{Co}} \cdot 10^6 = 1310 \quad ; \quad \mu_{\text{eff.}} = 1,75 \quad \text{per 1 Co a } 20^\circ\text{C}.$$

I dati numerici risultano dalla media delle determinazioni concordanti eseguite sui prodotti di preparazioni diverse.

Al complesso potrebbe attribuirsi la distribuzione ottaedrica corrispondente ad 1 elettrone spin.

Il cianuro anidro è igroscopico, in atmosfera umida assorbe fino a 3 mol. di  $\text{H}_2\text{O}$  per 1 Co. senza variazioni della  $\chi_{\text{Co}}$ . Nel vuoto il sale ritorna anidro.

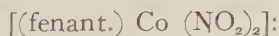
2. CIANURO  $\text{Co}^{\text{II}}$  DIPIRIDILICO. — Abbiamo operato con l' $\alpha$ ,  $\alpha$ -dipiridile in condizioni analoghe a quelle su accennate, ed ottenemmo il sale



$$\chi_{\text{Co}} \cdot 10^6 = 1180 \quad ; \quad \mu_{\text{eff.}} = 1,67 \text{ M. B. per 1 Co a } 20^\circ\text{C}.$$

Cioè, anche per questo sale risulta l'intervento degli elettroni  $3d$  di  $\text{Co}^{2+}$  negli orbitali delle valenze coordinative, con la coordinazione 4, e si dovrebbe attribuirgli la distribuzione planare.

3. NITRITO  $\text{Co}^{\text{III}}$  FENANTROLINICO. — Abbiamo osservato che l'azione della o,o-fenantrolina su diversi sali di cobalto in presenza di nitrito alcalino e sul cobaltinitrito di sodio, porta al sale



$$\chi_{\text{Co}} \cdot 10^6 = 1228 \quad ; \quad \mu_{\text{eff.}} = 1,71 \text{ M. B. per 1 Co a } 20^\circ\text{C}.$$

Cioè, con l'anione nitroso si ripete il tipo del cianuro mono-dipiridilico.

COMMENTO. — Gli alogenuri di  $\text{Co}^{\text{II}}$  fenantrolinici e dipiridilici compresi i solfocianuri (complessi di Blau) presentano tutti  $\chi_{\text{Co}}$  corrispondente a 4,5–5,5 M. B. cioè coincidente o vicina a quella di  $\text{Co}^{2+}$ . Invece, le nostre attuali esperienze indicano che il cianuro ed il nitrito sono complessi non ionizzati, con una suscettività di 1,7 M. B. corrispondente cioè ad 1 elettrone spin.

Si presentano due serie distinte dei complessi in questione, nettamente differenziate dal comportamento magnetico: l'una del tipo generale detto dei complessi polari, l'altra del tipo dei cosiddetti complessi di compenetrazione.

La netta distinzione fra le due serie è illustrata nella tabella seguente:

| I Serie  | $\chi_{\text{Co}} \times 10^6$<br>a 20°C | $\mu_{\text{eff.}}$ in M. B.<br>per 1 Co |
|--|--|--|
| 1) $[\text{Co}(\text{fenantrolina})_3] \text{Br}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$              | 11.300                                   | 5,18                                     |
| 2) $[\text{Co}(\text{fenantrolina})_3] (\text{CNS})_2$                                     | 9.600                                    | 4,83                                     |
| 3) $[\text{Co}(\text{fenantrolina})_2] (\text{CNS})_2$                                     | 11.140                                   | 5,14                                     |
| 4) $[\text{Co}(\text{fenantrolina})] (\text{CNS})_2$                                       | 8.680                                    | 4,53                                     |
| II Serie   |  |  |
| 5) $[\text{Co}(\text{fenant.})_2(\text{CN})_2] \cdot 0,5 \text{ fenant.}$                  | 1.375                                    | 1,79                                     |
| 6) $[\text{Co}(\text{fenantrolina})_2 (\text{CN})_2]$                                      | 1.310                                    | 1,75                                     |
| 7) $[\text{Co}(\text{dipiridile}) (\text{CN})_2] \cdot 1,5 \text{ C}_2\text{H}_5\text{OH}$ | 1.180                                    | 1,67                                     |
| 8) $[\text{Ca}(\text{fenantrolina}) (\text{NO}_2)_2]$                                      | 0.230                                    | 1,71                                     |

Sali (1); (2) – Vedi L. CAMBI e A. CAGNASSO, questi « Rendiconti », 19, 458 (1934).

Sali (3); (4) – Vedi L. CAMBI e E. PAGLIA, misure inedite.

Sali (5) – Vedi L. CAMBI e A. CAGNASSO, « Ist. Lombardo Scienze e Lettere », 8, 745 (1934).

Sali (6); (7); (8) – Vedi L. CAMBI e E. PAGLIA, questa Nota.

Inoltre, la suscettività corrispondente ad 1 elettrone spin, non dipende dal numero delle moli di fenantrolina coordinate, ma è praticamente costante tanto per i complessi con 1 mole di base che per quelli con 2 moli della base stessa.

Infine, dobbiamo segnalare che le ricerche sopra riportate confermano la notevole stabilità assunta da  $\text{Co}(\text{CN})_2$  nei complessi considerati, dai quali soltanto con demolizione con autossidazione si formano prodotti parzialmente cobaltici.

Le ricerche continuano.

**Antropologia.** — *I caratteri della Mandibola Neandertaliana Circeo III.* Nota del Socio SERGIO SERGI e di ANTONIO ASCENZI, presentata (\*) dal Socio S. SERGI.

La mandibola Circeo III fu rinvenuta nel 1950 da uno di noi (Ascenzi) e dal Sig. Lacchei Giovanni nella breccia ossifera adiacente all'ingresso della grotta Guattari che, nel 1939, aveva dato due reperti neandertaliani: il cranio Circeo I e la mandibola Circeo II <sup>(1)</sup>. Come questi, anche la mandibola Circeo III è stata attribuita da A. C. Blanc all'Epiwürm II <sup>(2)</sup>.

#### TABELLA I.

##### *Analisi della Mandibola « Circeo III B ».*

|  |             |
|--|-------------|
| Peso specifico reale . . . . .                             | 2,83-3,07   |
| Radioattività . . . . .                                    | nulla       |
| Ca . . . . .   | 20,96       |
| Mg . . . . .   | 2,10        |
| PO <sub>4</sub> . . . . .                                  | 36,10       |
| P . . . . .  | 11,77       |
| F . . . . .  | 0,175-0,195 |
| N (Idrolisi con H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> ) . . . . . | 0,76        |
| N (idrolisi con HJ) . . . . .                              | 4,64        |

I valori di Ca, Mg, P, F, N corrispondono alle percentuali in peso riferite all'osso.

Le ricerche compiute per la determinazione dello stato di fossilizzazione dell'osso (cfr. Tab. I) hanno rivelato la presenza di sostanza organica (osseina). Questa è stata determinata chimicamente attraverso la titolazione dell'azoto, secondo la metodica di Kjeldahl. Con l'idrolisi mediante HJ l'elemento è stato trovato in percentuale elevata, corrispondente a quella del-

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) A. C. BLANC, *L'uomo fossile del Monte Circeo: un cranio neandertaliano nella Grotta Guattari a S. Felice Circeo*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., 1939; S. SERGI, *Il cranio neandertaliano del Monte Circeo*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., 1939; S. SERGI, *La mandibola neandertaliana Circeo II*, « Riv. di Antropologia », vol. XLI, 1954 e *I caratteri della mandibola neandertaliana Circeo II*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., 1955.

(2) Per le notizie sul rinvenimento della Mandibola Circeo III, si veda: S. SERGI, *Il rinvenimento della mandibola di un terzo paleantropo al Monte Circeo*, « Riv. di Antropologia », vol. XXXVIII, 1950; A. BLANC e S. SERGI, *Italie*. In *Catalogue des Hommes fossiles* di H. V. VALLOIS e H. L. MOVIUS. Session du Congrès Géologique International. Algeri, 1952.

l'osso recente. Esami istologici di confronto, praticati su frammenti non identificabili di ossa trovate in stretta prossimità della mandibola, hanno confermato come l'osseina fosse qui estesamente presente e mostrasse in gran parte conservati i caratteri istochimici e quelli ultrastrutturali, indagati, quest'ultimi, mediante il microscopio elettronico. In accordo con questo reperto il tasso del fluoro è risultato basso.

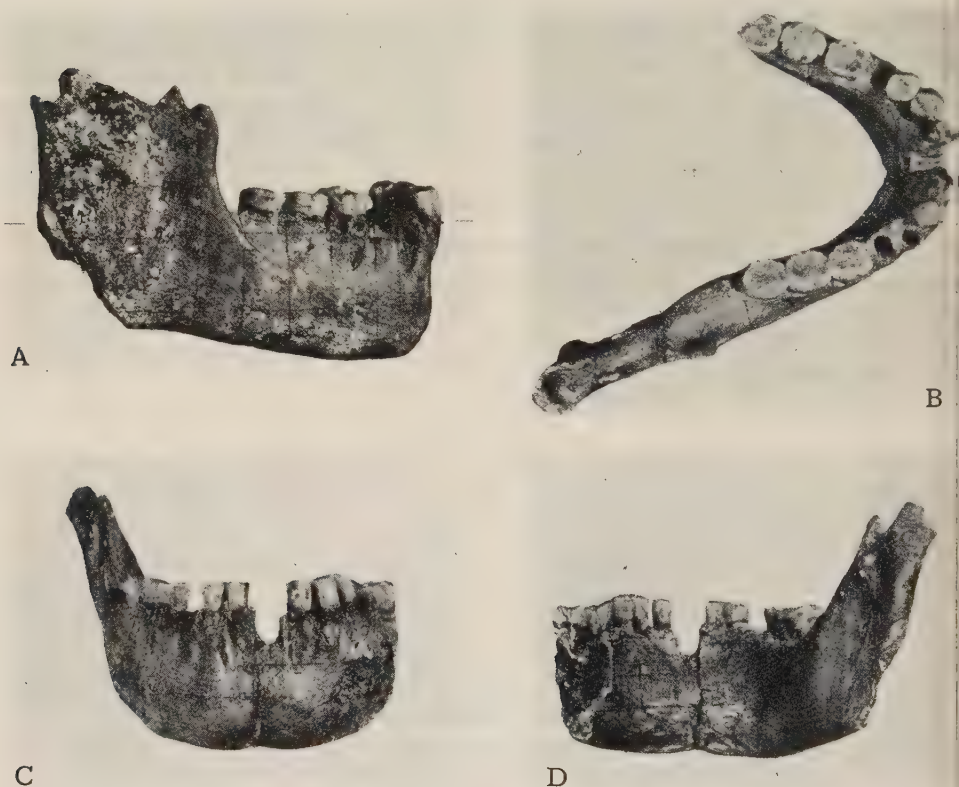


Fig. 1. - Mandibola Circeo III orientata sul piano alveolare e veduta secondo quattro norme.

A - norma laterale destra. B - norma superiore. C - norma anteriore. D - norma posteriore.  
Foto circa 1/2 della grandezza naturale.

La parte che si è trovata della mandibola era rotta in due frammenti, avvolti in gran parte dalla roccia. La frattura, di antichissima data, divideva a destra i due pezzi in corrispondenza del setto interalveolare tra l'incisivo mediale e l'incisivo laterale dello stesso lato. La sinfisi, quindi, è compresa nel frammento di sinistra. Prima della loro ricomposizione furono eseguite fotografie, radiografie e perigrafie di ciascuno dei frammenti.

Siffatti rilievi, lungi dal consentire deduzioni precise sulla cronologia della mandibola, recano ulteriore conferma alla nozione, oggi saldamente acquisita, che i caratteri inerenti alla fossilizzazione non possono essere considerati da soli quali indici di datazione assoluta, se non vengono opportunamente vagliati alla stregua delle caratteristiche geologiche e, soprattutto, geochimiche del giacimento.

La mandibola, incompleta, comprende quasi tutto il lato destro ed il corpo del lato sinistro. Il condilo di destra e tutto il ramo di sinistra sono

perduti. Altre piccole mutilazioni interessano le parti conservate. Sono presenti tutti i molari, i due canini, un premolare e i due incisivi laterali. I denti mancanti sono caduti casualmente dopo la morte. Le fratture di antica data sono dovute, probabilmente, a morsi di jena, come in Circeo II (fig. 1).

La mandibola apparteneva ad individuo di sesso maschile, alle soglie dell'età adulta, presumibilmente tra i 18 ed i 20 anni. Essa è molto robusta e di grandi dimensioni, talché si deve ritenere che chi la possedeva doveva essere dotato di grande capacità cranica, corrispondente a quella di Circeo I.

Con l'esame analitico morfometrico, si è rilevato che la mandibola presenta un complesso di caratteri, molti dei quali sono considerati propri dei paleantropi europei neandertaliani ed altri rientrano nel campo della loro variabilità.

Tra le caratteristiche riscontrate, rivolgiamo l'attenzione alle seguenti:

Nella faccia interna sinfisiana si nota, come nello schema dei neandertaliani classici, il *planum alveolare obliquum*, il *torus transversus superior*, la fossa geniena ed il *torus transversus inferior*.

Nella faccia esterna sinfisiana si ravvisa uno stadio avanzato della formazione del mento caratterizzato da *incurvatio anterior* pronunciata, *trigonum mentale* ben definito e parte alveolare ortognata.

Nella faccia basale, rivolta obliquamente indietro e limitata in avanti dalla *incisura submentalis*, le fosse digastriche occupano una estesa superficie del versante laterale.

Gli *juga alveolaria* del canino e dei premolari, a destra, sono molto salienti, il massimo rilievo corrisponde all'alveolo del canino. A sinistra, appare saliente soltanto il rilievo corrispondente all'alveolo del canino.

Lateralmente, il *foramen mentale* è duplice in ambo i lati.

Il *sulcus extramolaris* è molto largo e profondo e, quindi, è grande la distanza tra margine alveolare e prominenza alveolare. L'area del *trigonum postmolare* è ristretta.

Nel ramo, esternamente, sono accentuati i rilievi del *tuberculum subcondyloideum*, della *eminencia lateralis*, della *crista ectocondyloidea*, nonché la depressione della fossa masseterica. Nella faccia mediale del ramo, colpisce la robustezza del *torus triangularis* e dei suoi rami, la *crista endocoronoidea* e la *crista endocondyloidea*; rilevato è il *tuberculum pterigoideum internum*.

I caratteri metrici (dimensioni ed indici) più significativi, che in gran parte sono concordanti con quelli del tipo paleantropico neandertaliano, sono stati riuniti nell'elenco che segue. In questo elenco, in parentesi, sono indicate con le rispettive lettere iniziali i reperti di Circeo III (C), La Chappelle (Ch), La Ferrassie (F), Krapina (K), Malarnaud (M), Spy (S) quando i valori delle misure o degli indici rispettivi sono uguali o molto concordanti tra loro.

L'indice di posizione del *foramen supraspinosum* ( $C, Ch, K, S$ ).

L'indice di grandezza del corpo ( $C, F, Ch$ ).

L'angolo goniaco ( $C, F, Ch$ ).

L'angolo di inclinazione laterale del ramo ( $C, F$ ).

L'indice fra la larghezza bicondiloidea e la larghezza bigoniaca ( $C, F$ ).

L'indice fra l'altezza e la larghezza del ramo ( $C, F, Ch$ ).

L'indice tra la lunghezza totale della mandibola e la larghezza minima del ramo (per questo indice si trovano le maggiori divergenze tra i casi posti in confronto).

Per l'arco alveolare:

La lunghezza anteriore dell'arco alveolare relativa alla lunghezza totale ( $C, F$ ).

La lunghezza totale dell'arco relativa alla larghezza totale dell'arco ( $C, F$ ).

La larghezza anteriore dell'arco relativa alla larghezza totale ( $C, F$ ).

Per l'arco dentale:

Le dimensioni dell'area dell'arco ( $C = K = S$ ).

Il diametro antero-posteriore dell'arco ( $C = K = S$ ).

I diametri bidentali tra i molari  $M_2 - M_2$ . ( $C = F$ ),  $M_1 - M_1$  ( $C = F$ ).

I diametri bidentali tra i canini ( $C, K, S$ ).

Il rapporto di  $M_2 - M_2$  a  $C - C$  è il più basso rispetto a quello di tutti i neandertaliani: cioè l'arco è molto largo indietro, molto stretto a livello dei canini (carattere più progressivo).

Molte caratteristiche metriche e morfologiche possono essere rilevate dalle figg. 2 e 3 nelle quali sono riportate le curve di sezioni sagittali e frontali a diversi livelli.

**Circeo III** - Sezioni sagittali (lato sin. veduto da destra) normali al piano alveolare e al piano frontale -

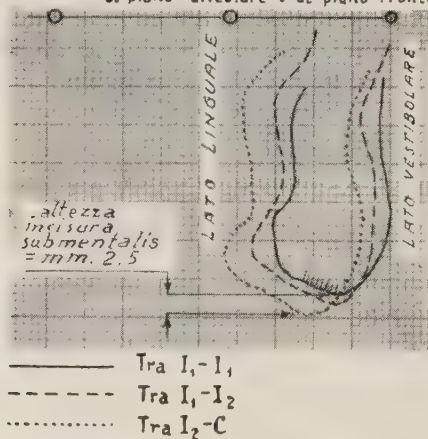


Fig. 2. - Comparazione per sovrapposizione del profilo di tre sezioni sagittali del lato sinistro perpendicolari al piano alveolare portate rispettivamente tra i due incisivi mediani, tra il primo e secondo incisivo e tra il secondo incisivo ed il canino. Ciascuna delle sezioni mantiene i rapporti metrici e topografici sia con il piano alveolare sia con quello frontale.

Per la dentatura, in Circeo III si è rilevato (così come più spesso accade nei neandertaliani) la maggiore robustezza del secondo molare rispetto agli altri due molari, la prevalenza del trigonide sul talonide, la disposizione di tipo driopiteco dei tubercoli dei molari. La cavità della polpa dei molari aumenta di volume dal primo al terzo, conforme alla loro età di sviluppo. Il volume maggiore della cavità del terzo molare non raggiunge il grado della taurodontia (fig. 4).

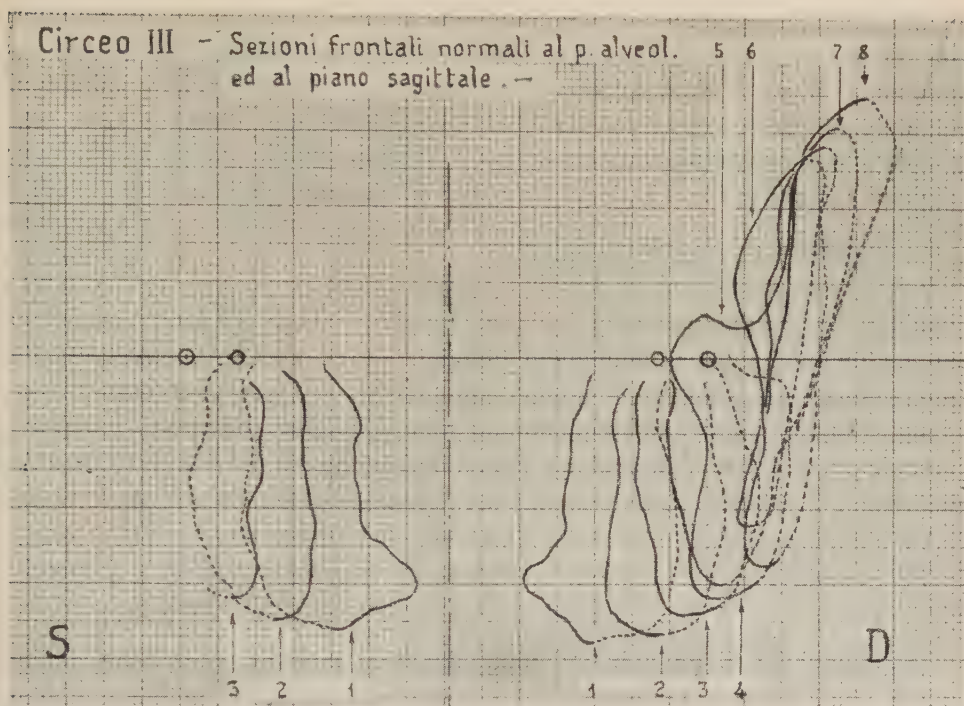


Fig. 3. - Comparazione per sovrapposizione del profilo di sezioni frontali normali al piano alveolare. Ciascuna delle sezioni mantiene i rapporti metrici e topografici sia con il piano alveolare sia con quello sagittale mediano.

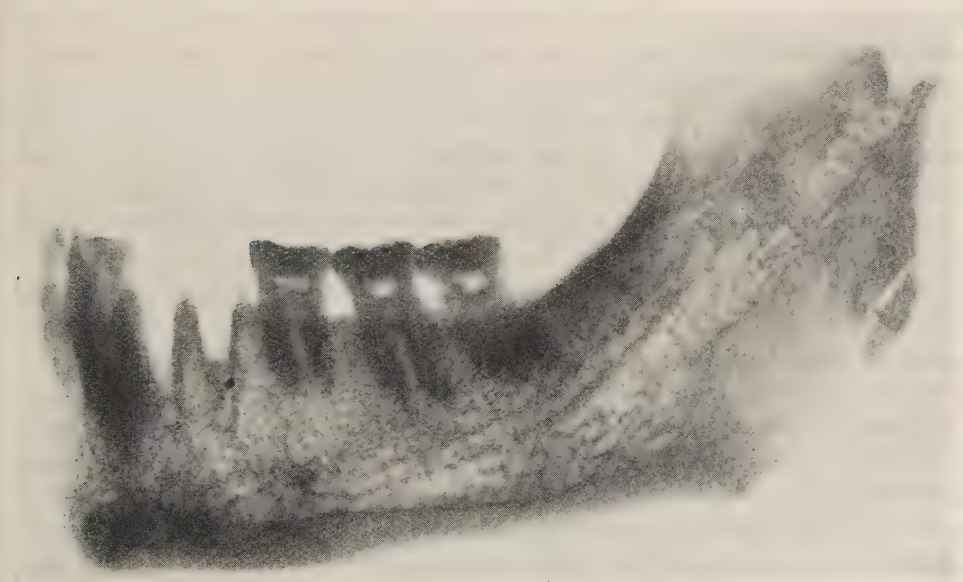


Fig. 4. - Mandibola Circeo III. Schiagramma del lato destro eseguito sul frammento di questa parte, prima della ricomposizione della mandibola con il frammento del lato sinistro.

Nello schiagramma si possono rilevare i sistemi delle traiettorie indicati nel testo.

Negli schiagrammi sono state bene individuate le traiettorie del *praeceps*, del *dentale*, del *posticum*, del *basilare* e del *marginale*: ad esse sono da aggiungere, in particolare, i fasci trabecolari del *radiatum* del canino (fig. 4), in stretta dipendenza dell'azione dello pterigoideo esterno.

Da tutti i dati di confronto, qui riassunti, risulta che la mandibola Circeo III appartiene al tipo di quelle dei paleantropi neandertaliani e che essa trova le maggiori concordanze morfologiche e metriche nelle mandibole di La Ferrassie e di La Chapelle.

Passando ora a stabilire qualche confronto con la mandibola Circeo II, riteniamo opportuno di rilevare i fatti seguenti. Circeo II si allontana da Circeo III per l'accenno molto più limitato della *incurvatio anterior* della sinfisi mentoniera, nonché del *trigonum mentale*. Inoltre, in Circeo III, il *torus inferior* si prolunga maggiormente verso l'indietro, al che fa riscontro la convergenza della faccia linguale in basso medialmente da  $P_2$  a  $M_2$ , mentre in Circeo II diverge lateralmente. Per il resto le due mandibole si corrispondono. In particolare, le sezioni frontali sono identiche per forma e per dimensioni, ad onta delle suddette caratteristiche di orientamento dei margini alveolari. Nel complesso Circeo II dimostra caratteri morfologici alquanto più arretrati rispetto a Circeo III.

Fra le caratteristiche funzionali che derivano dall'esame delle condizioni morfologiche dipendenti dall'apparato muscolare della masticazione sono apparse dominanti in Circeo III quelle dovute ai muscoli pterigoidei esterni ed interni. La potente azione di questi muscoli che presiedono al movimento molitorio della mandibola allo scopo di compiere la triturazione degli alimenti, risulta dal rilievo delle inserzioni muscolari, dall'entità dell'angolo di inclinazione laterale del ramo, nonché dalle asimmetrie morfologiche delle varie parti della mandibola, dipendenti dalla torsione alla quale questa ha dovuto soggiacere nell'atto della triturazione.

Le asimmetrie rivelano l'intervento di una torsione sinistrorsa per azione prevalente degli pterigoidei esterni ed interni del lato sinistro su quelli del lato destro (senso della diduzione da destra a sinistra).

Queste asimmetrie sono rappresentate dall'asimmetria dell'arco mandibolare, dalla asimmetria di posizione della serie dei molari di destra (posizione di adduzione) e di quelli di sinistra (posizione di abduzione), dal più forte rilievo degli *juga alveolaria* del canino e dei premolari di destra dalla maggiore densità del fascio trabecolare radiato del canino di destra, dipendente dalla funzione dello pterigoideo esterno.

Viene così dimostrato nel caso della mandibola Circeo III la dominanza dei muscoli pterigoidei durante la masticazione in funzione del movimento molitorio, così come fu già rilevato da Boule per la mandibola di La Chapelle: « le développement plus considérable des muscles broyeurs par rapport aux muscles diviseurs ». Le differenze con la mandibola di La Ferrassie riguardano soltanto la dentatura per le particolari condizioni di dislocazione dei denti ed il tipo di usura dei medesimi da attribuire ad una malocclusione da *progeneismo funzionale* correlato con un esagerato movimento di pro-

pulsione della mandibola sui mascellari nell'atto della masticazione per il predominio dei muscoli pterigoidei, il che denota «une dentition plus broyante que coupante» (Boule e Vallois 1952, p. 240).

Questi rilievi di ordine funzionale orientano verso considerazioni che sono attinenti alla qualità dei cibi masticati e, pertanto, alle caratteristiche della alimentazione dei neandertaliani. Il problema è certamente non privo di interesse, ma supera i limiti ed il carattere della presente Nota. Vorremmo tuttavia porre in rilievo che l'esame chimico dei componenti minerali della mandibola ha appalesato un riscontro che può essere con verosimiglianza attribuito a caratteri particolari, inerenti alla natura e, quindi, alla qualità dell'alimentazione. Intendiamo riferirci al tenore abbastanza elevato del magnesio che trova corrispondenza nell'abbassamento del contenuto in calcio. Dalle nozioni correnti sui rapporti tra magnesio e calcio nell'osso, appare giustificato ritenere che il primo elemento supplisca alla deficienza di apporto del secondo. Tuttavia, pur appartenendo il magnesio allo stesso gruppo del calcio e pur avendo con questo rapporti di stretta somiglianza, esso non è capace di sostituirsi isomorficamente senza determinare modificazioni sensibili nella compagine inorganica dell'osso. Sulla base delle presenti considerazioni, si deve ritenere che nel caso in ispecie l'aumento del magnesio è indice di una situazione deficitaria dell'apporto e del metabolismo calcico della mandibola.

Noi non sappiamo se il presente riscontro sia accidentale nella mandibola Circeo III ovvero costituisca una peculiarità anche di resti scheletrici pertinenti ad altri neandertaliani. Se uno studio chimico-analitico, esteso sistematicamente ad altri esemplari, dovesse confermare l'esistenza di una condizione del tipo surriferito, non sarebbe forse inopportuno prospettare l'ipotesi che l'incremento del magnesio a scapito del calcio possa rappresentare, in certo senso, una situazione, se non proprio correlata, per lo meno non estranea alla genesi di quella serie di fenomeni, a tutt'oggi ancora così poco chiariti, che hanno portato alla estinzione delle forme neandertaliane.

Per concludere, l'insieme dei fatti da noi rilevati ed, in particolare, quelli di ordine morfologico ci conducono alla constatazione di condizioni di ordine generale che riguardano la storia biologica dei paleantropi europei del Würm e che confermano quanto uno di noi (Sergi, 1939) ha già rilevato con lo studio di Circeo I.

Circeo III per i caratteri della sua mandibola ci appare quale un tipico rappresentante del gruppo dei paleantropi neandertaliani a grande capacità cranica del periodo würmiano. Come il cranio di Circeo I trova la sua maggiore concordanza con quelli di La Chapelle e di La Ferrassie, così la mandibola Circeo III trova le sue massime affinità morfologiche con le mandibole degli stessi reperti e, come queste, presenta gli stessi attributi funzionali relativi all'apparato di masticazione. Come nel primo caso per il cranio Circeo I, così nel secondo per la mandibola Circeo III, viene confermata la grande uniformità del tipo e la fissità da esso raggiunta per effetto della riduzione progressiva della sua variabilità alla vigilia della sua estinzione.

Il gruppo dei neandertaliani del glaciale würmiano preso in considerazione costituisce un tipo stenoplastico (Turrin) nella fase di paracme (Haeckel) o di declino quando si approssima la sua sparizione. Di fronte alla necessità di nuovi adattamenti richiesti dalle condizioni di ambiente per favorire la vitalità e, quindi, la sopravvivenza del tipo, insorgono dismorfie (*maldjustments* di Julian Huxley), cioè degradazioni morfologiche (progeneismo caratteristico di La Ferrassie, asimmetrie e dismorfie multiple della mandibola di Circeo III, associate a note di alterato ricambio calcico) che appaiono come il prodotto di una capacità di reazione insufficiente a determinare quelle armoniche modificazioni che possono assicurare adattamenti equilibrati e stabili per la continuità del tipo.

*Nota bibliografica.* - Per la descrizione, comparazione analitica, documentazione iconografica della mandibola Circeo III e per la bibliografia generale sull'argomento, si veda la monografia: S. SERGI e A. ASCENZI, *La mandibola neandertaliana Circeo III (Mandibola B)*, « Riv. di Antropologia », vol. XLII.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** - *Sulla convergenza di serie multiple* (\*).  
Nota di ALESSANDRO OSSICINI, presentata (\*\*) dal Socio M. PICONE.

I. Dimostriamo i seguenti teoremi.

a) Se la serie numerica multipla di ordine  $n$

$$(I.1) \quad \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^{\infty} (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} \tau_1^{i_1} \tau_2^{i_2} \tau_3^{i_3} \dots \tau_n^{i_n},$$

converge completamente <sup>(1)</sup>, allora la serie multipla di potenze

$$(1.2) \quad \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^{\infty} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} (z_1 - \tau_1)^{i_1} (z_2 - \tau_2)^{i_2} (z_3 - \tau_3)^{i_3} \dots (z_n - \tau_n)^{i_n}$$

converge completamente e uniformemente se  $z_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) soddisfa la limitazione

$$(1.3) \quad 0 \leq \frac{|z_s|}{|\tau_s| - |z_s - \tau_s|} \leq k_s$$

ove i  $k_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) sono dei numeri reali non minori di uno.

\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) Cfr. C. N. MOORE, *Summable Series and Convergence Factors*, « American Mathematical Society Colloquium Publications », volume XXII, New York (1936), p. 34.

Una serie multipla di ordine  $n$  che sia convergente (sommata per rettangoli) si dice che converge completamente se qualsiasi serie semplice che si ottiene da essa fissando tutti gli indici meno uno è convergente e se qualsiasi serie di ordine minore di  $n$  che si ottiene fissando un certo numero di indici è convergente (sommata per rettangoli).

b) Se la serie numerica multipla di ordine  $n$

$$(1.4) \quad \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^{0, \infty} (-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} \tau_1^{-i_1} \tau_2^{-i_2} \tau_3^{-i_3} \dots \tau_n^{-i_n},$$

converge completamente, allora la serie multipla di potenze

$$(1.5) \quad \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^{0, \infty} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} (z_1 - \tau_1)^{-i_1} (z_2 - \tau_2)^{-i_2} (z_3 - \tau_3)^{-i_3} \dots (z_n - \tau_n)^{-i_n}$$

converge completamente e uniformemente se  $z_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) soddisfa la limitazione

$$(1.6) \quad 0 \leq \frac{|z_s|}{|z_s - \tau_s| - |\tau_s|} \leq k_s$$

ove i  $k_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) sono dei numeri reali non minori di uno.

2. Il luogo dei punti del piano complesso  $z_s$  verificante la limitazione (1.3) è chiamato lumaca interna di Pascal<sup>(2)</sup> di vertice O polo  $\tau_s$  parametro  $k_s$ : essa è contenuta nel cerchio C ( $0, \tau_s$ ) definito dalla disuguaglianza

$$|z_s - \tau_s| \leq |\tau_s|$$

e ne invade l'interno al divergere di  $k_s$ .

Se nella (1.1) invece di  $z_s$  vi è  $z_s^2$  dalla dimostrazione del teorema a) ne seguirà che:

a') Se la serie numerica multipla di ordine  $n$  (1.1) converge completamente allora la serie multipla di potenze

$$(2.1) \quad \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^{0, \infty} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} (z_1^2 - \tau_1)^{i_1} (z_2^2 - \tau_2)^{i_2} (z_3^2 - \tau_3)^{i_3} \dots (z_n^2 - \tau_n)^{i_n},$$

converge completamente e uniformemente se  $z_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) soddisfa la limitazione

$$(2.2) \quad 0 \leq \frac{|z_s|^2}{|\tau_s| - |z_s^2 - \tau_s|} \leq k_s$$

ove i  $k_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) sono dei numeri reali non minori di uno. La (2.2) definisce un dominio avente come frontiera una lemniscata iperbolica di Booth, con biflcnodo in O e i cui fuochi ordinari hanno per punti immagini le radici quadrate del numero complesso  $\tau_s$ . Detto dominio è contenuto nel dominio definito dalla disuguaglianza

$$(2.3) \quad |z_s^2 - \tau_s| \leq |\tau_s|$$

dominio che ha per frontiera la lemniscata di Bernoulli con lo stesso biflcnodo e gli stessi fuochi della lemniscata di Booth.

(2) Cfr. M. PICONE e G. FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, vol. II, p. 693 [Editore Tumminelli, Roma (1955)]: ivi trovasi enunciato un teorema di cui il presente è l'estensione alle serie multiple di potenze.

Il dominio definito dalla (2.2) invade l'interno del dominio (2.3) al divergere di  $k_s$ . L'aspetto è quello riportato in fig. 1.

Il luogo dei punti del piano complesso  $z_s$  verificante la limitazione (1.6) è chiamato lumaca esterna di Pascal<sup>(3)</sup> di vertice O polo  $\tau_s$  parametro  $k_s$  esso è contenuto nel dominio definito dalla disuguaglianza

$$|z_s - \tau_s| \geq |\tau_s|$$

e ne invade l'interno al divergere di  $k_s$  è illimitato ma ha frontiera limitata.



Fig. 1.

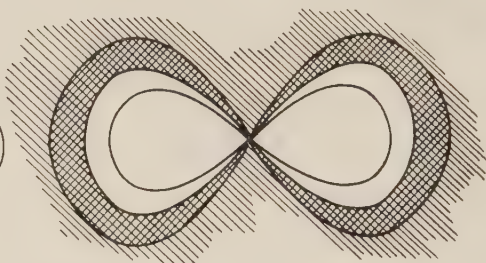


Fig. 2.

Se nella (1.5) invece di  $z_s$  vi è  $z_s^2$  dalla dimostrazione del teorema b) ne seguirà che:

b') Se la serie numerica multipla di ordine  $n$  (1.4) converge completamente allora la serie multipla di potenze

$$(2.4) \quad \sum_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^{\infty} a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} (z_1^2 - \tau_1)^{-i_1} (z_2^2 - \tau_2)^{-i_2} (z_3^2 - \tau_3)^{-i_3} \dots (z_n^2 - \tau_n)^{-i_n}$$

converge completamente e uniformemente se  $z_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) soddisfa la limitazione

$$(2.5) \quad 0 \leq \frac{|z_s|^2}{|z_s^2 - \tau_s| - |\tau_s|} \leq k_s$$

ove i  $k_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots, n$ ) sono dei numeri reali non minori di uno. La (2.5) definisce un dominio illimitato la cui frontiera limitata è una lemniscata iperbolica di Booth col bifocnodo in O e i cui fuochi ordinari hanno per punti immagini le radici quadrate del numero complesso  $\tau_s$ . Detto dominio è contenuto nel dominio illimitato definito dalla

$$(2.6) \quad |z_s^2 - \tau_s| \geq |\tau_s|$$

che ha la stessa frontiera del dominio (2.3), e ne invade l'interno al divergere di  $k_s$ ; per l'aspetto vedi fig. 2.

3. Consideriamo le funzioni  $f_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}(P)$  definite in un insieme E di punti  $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$  di uno spazio  $S_{2n}$  euclideo.

(3) Cfr. F. BERTOLINI, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei » (Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali) serie VII, vol. XIV, fasc. 4, Aprile 1953.

Dette funzioni talvolta per brevità le indicheremo colla scrittura  $f_{[i]}$ . Introduciamo poi le notazioni

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{i_1 \dots i_n} f_{[i]} &= \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_n=0}^1 (-1)^{k_1} (-1)^{k_2} \dots (-1)^{k_n} f_{[i+k]}, \\ \Delta_{i_1 \dots i_{n-1} 0} f_{[i]} &= \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_{n-1}=0}^1 (-1)^{k_1} (-1)^{k_2} \dots (-1)^{k_{n-1}} f_{i_1+k_1, \dots, i_{n-1}+k_{n-1}, i_n}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{i_0 \dots 0} f_{[i]} &= f_{i_1 i_2 \dots i_n} - f_{i_1+1, i_2 \dots i_n}, \end{aligned} \right.$$

con analoghe notazioni per il simbolo  $\Delta$  con gli zeri scritti in diverse posizioni.

Rappresentiamo inoltre per brevità con

$$(3.2) \quad \Delta_{1,0}^{n-k,k}$$

il simbolo  $\Delta$  avente sottoscritti  $(n-k)$  unità e  $k$  zeri.

Nel caso particolare che si abbia  $f_{i_1 i_2 \dots i_n}(P) = \rho_{i_1}^{i_1}(z_1) \rho_{i_2}^{i_2}(z_2) \dots \rho_{i_n}^{i_n}(z_n)$  ove  $\rho_s(z_s)$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) sono funzioni solo di  $z_s$  e tali che

$$|\rho_s(z_s)| \leq 1$$

le (3.1) ci danno

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{i_1 \dots i_n} f_{[i]} &= \prod_{s=1}^n \rho_s^{i_s} (1 - \rho_s), \\ \Delta_{i_1 \dots i_{n-1} 0} f_{[i]} &= \rho_n^{i_n} \prod_{s=1}^{n-1} \rho_s^{i_s} (1 - \rho_s), \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_{i_0 \dots 0} f_{[i]} &= \rho_1^{i_1} \rho_2^{i_2} \dots \rho_n^{i_n} (1 - \rho_1), \end{aligned} \right.$$

con le analoghe relative al simbolo  $\Delta$  con gli zeri scritti in diverse posizioni.

Si ha inoltre la  $(A)_n$

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} |\Delta_{i_1 \dots i_n} f_{[i]}(P)| = \prod_{s=1}^n \frac{|1 - \rho_s|}{1 - |\rho_s|}$$

e le varie  $(A_m^{(k)})$  del tipo

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{n-k}=0}^{\infty} |\Delta_{1,0}^{n-k,k} f_{[i]}(P)| = \prod_{s=1}^{n-k} \frac{|1 - \rho_s|}{1 - |\rho_s|}$$

ove  $k$  varia da 1 a  $n-1$  e per ciascun  $k$ ,  $m$  varia da 1 a  $\binom{n}{k}$ .

Se in particolare consideriamo

$$\rho_s(z_s) = \frac{\tau_s - z_s}{\tau_s} \quad (s = 1, 2, 3, \dots, n)$$

ne segue per  $|z_s - \tau_s| \leq |\tau_s|$  comunque si assegnino i  $k_s$  con  $1 \leq k_s < \infty$  se  $z_s$  soddisfa la limitazione (1.3)

$$(A)_n \quad \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} |\Delta_{1,1 \dots 1} f_{[i]}(P)| = \prod_{s=1}^n \frac{z_s}{|\tau_s| - |z_s - \tau_s|} \leq \prod_{s=1}^n k_s$$

e le  $(A_m^{(k)})$  del tipo

$$(A_1^{(k)}) \quad \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{n-k}=0}^{\infty} |\Delta_{1,0 \dots 0}^{n-k,k} f_{[i]}(P)| = \prod_{s=1}^{n-k} \frac{z_s}{|\tau_s| - |z_s - \tau_s|} \leq \prod_{s=1}^{n-k} k_s.$$

Analogamente se

$$\rho_s(z_s) = \frac{\tau_s}{\tau_s - z_s} \quad (s = 1, 2, 3, \dots, n)$$

ne segue per  $|\tau_s| \leq |\tau_s - z_s|$  comunque si assegnino i  $k_s$  con  $1 \leq k_s < \infty$  se  $z_s$  soddisfa la limitazione (1.6)

$$(A)_n \quad \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} |\Delta_{1,1 \dots 1} f_{[i]}(P)| = \prod_{s=1}^n \frac{|z_s|}{|z_s - \tau_s| - |\tau_s|} \leq \prod_{s=1}^n k_s$$

e le  $(A_m^{(k)})$  del tipo

$$(A_1^{(k)}) \quad \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{n-k}=0}^{\infty} |\Delta_{1,0 \dots 0}^{n-k,k} f_{[i]}(P)| = \prod_{s=1}^{n-k} \frac{|z_s|}{|z_s - \tau_s| - |\tau_s|} \leq \prod_{s=1}^{n-k} k_s.$$

I teoremi  $a)$ ,  $b)$  e in conseguenza anche i teoremi  $a')$ ,  $b')$  restano dimostrati per le  $(A_n)$ ,  $(A_m^{(k)})$  in base ad un teorema di C. N. Moore (4).

(4) Cfr. C. N. MOORE, loc. cit. p. 35.

Il teorema di C. N. Moore afferma che se la serie  $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{0, \infty} u_{i_1 i_2 \dots i_n}$  è completamente convergente le condizioni necessarie e sufficienti affinché la serie  $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{0, \infty} u_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot f_{i_1 i_2 \dots i_n}(P)$  sia completamente convergente è che i fattori convergenti  $f_{[i]}$  soddisfino la

$$(A)_n \quad \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} |\Delta_{1,1 \dots 1} f_{[i]}(P)| < k(P) \quad , \quad k(P) > 0$$

e le varie  $(A_m^{(k)})$  del tipo

$$(A_1^{(k)}) \quad \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{n-k}=0}^{\infty} |\Delta_{1,0 \dots 0}^{n-k,k} f_{[i]}(P)| < k_1^{(k)}(P) \quad , \quad i_{n-k+1} = 0, \dots, i_n = 0$$

ove  $k$  varia da 1 a  $n-1$  e per ciascun  $k$ ,  $m$  varia da 1 a  $\binom{n}{k}$  e  $k_m^{(k)}(P) > 0$ .

**Analisi matematica.** — *Contributo al problema delle funzioni quasi continue composte*<sup>(\*)</sup>. Nota di GIUSEPPE ARNESE, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

1. Il presente lavoro ha la sua origine in un articolo di T. Viola, in cui viene ampiamente trattato il problema della composizione delle funzioni quasi continue<sup>(1)</sup>. A questo proposito, nel citato articolo è dimostrato un fondamentale teorema che conviene qui ricordare insieme con le sue premesse<sup>(2)</sup>.

Siano  $f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)$   $n$  funzioni reali, quasi continue rispetto ad una massa elementare  $\alpha(T)$ , in uno stesso insieme lebesghiano  $J$  dello spazio euclideo  $S_r$ , in cui si possono supporre tutte simultaneamente definite senza, per questo, ledere la generalità del problema. Il coinsieme  $\bar{J}$  di  $J$ , descritto nell' $S_n$  dalla funzione puntuale quasi continua

$$Q = f(P) \equiv [f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)],$$

sia lebesghiano rispetto ad un'altra massa elementare  $\beta(T)$ .

Con  $\varphi(Q)$  indichiamo una generica funzione reale, quasi continua in  $\bar{J}$ .

Ebbene, nelle ipotesi pregiudiziali poste, il teorema di Viola afferma che *condizione necessaria e sufficiente per la funzione  $Q = f(P)$ , affinché, qualunque sia la funzione  $\varphi(Q)$ , la funzione composta*

$$F(P) = \varphi[f(P)] \equiv \varphi[f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)]$$

*risulti quasi continua in  $J$ , è che ogni insieme lebesghiano  $E \subset J$  tale che  $m_\alpha E > 0$ , abbia coinsieme  $\bar{E}$  tale che  $m_\beta \bar{E} > 0$ .*

Alla dimostrazione di questo teorema vengono premessi alcuni lemmi, il più importante dei quali è il seguente: *sia  $J$  un insieme chiuso e limitato e sia  $Q = f(P) \equiv [f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)]$  continua in  $J$ . Se ogni insieme chiuso  $C \subset J$  di massa  $m_\alpha C > 0$  ha coinsieme  $\bar{C}$  di massa  $m_\beta \bar{C} > 0$ , allora ad ogni numero  $\varepsilon > 0$  è possibile far corrispondere un numero  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  tale che, qualunque sia l'insieme chiuso  $C \subset J$  il cui coinsieme  $\bar{C}$  abbia massa  $m_\beta \bar{C} < \delta$ , risulti sempre  $m_\alpha C < \varepsilon$ .*

Per la dimostrazione di questo lemma si suppone, ragionando per assurdo, che esista un numero  $\varepsilon' > 0$  tale che, qualunque sia il numero  $\delta > 0$ , si possano trovare certi insiemi chiusi  $K \subset J$  aventi massa  $m_\alpha K \geq \varepsilon'$ , mentre i

(\*) Lavoro eseguito per l'I.N.A.C. presso la cattedra di Analisi Matematica dell'Università di Bari.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) T. VIOLA, *Sulle funzioni quasi continue composte* (« Rendiconti di Matematica », ser. V, vol. 14, 2, Roma 1955, pp. 411-421).

(2) Per la terminologia ed il simbolismo adottati cfr., oltre all'articolo citato nella nota<sup>(1)</sup>, anche M. PICONE e T. VIOLA, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione* (Torino, Einaudi 1952).

loro coinsiemei  $\bar{K}$  hanno massa  $m_{\beta} \bar{K} < \delta$ . Quindi attraverso un laborioso procedimento costruttivo si trova una legge generale che ad ogni numero  $\delta > 0$  fa corrispondere uno ben determinato degli insiemi chiusi  $K$  ora nominati.

Questa parte della dimostrazione può essere semplificata ed è ciò che si fa nel n. 2.

Nel n. 3 si riesce, con l'ausilio di alcuni lemmi, a dare una nuova dimostrazione del succitato teorema fondamentale sulla composizione delle funzioni quasi continue, dimostrazione il cui interesse ci sembra offerto sia da una maggiore semplicità e snellezza, sia da una certa espressività ed autonomia dei lemmi II e III, sia infine perché essa mette in evidenza il giuoco degli insiemi boreliani in tutta la teoria, cosa che non avviene senza una ragione profonda <sup>(3)</sup>. Si studia anche un altro caso più particolare di quello di Viola, di composizione di funzioni quasi continue (teorema dimostrato alla fine del n. 3).

Questi risultati vengono utilizzati nel n. 4 in cui, infine, si dimostra come il problema di determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione quasi continua rispetto ad una massa elementare  $\beta(T)$  lo sia pure rispetto ad una massa elementare  $\alpha(T)$ , sia strettamente connesso col problema della composizione delle funzioni quasi continue, così com'è stato impostato da Viola nella sua Nota, ed abbia perciò la sua soluzione nel succitato teorema di Viola (ved. coroll. I). Analogamente il corrispondente problema per gli insiemi lebesghiani trova la sua soluzione nel teorema dimostrato alla fine del n. 3 (coroll. II).

Si vedrà che, in tutta la questione, assumono importanza molto rilevante gli insiemi di massa nulla, come accade spesso in argomenti del genere <sup>(4)</sup>.

2. La determinazione, per ogni numero  $\delta > 0$ , di un insieme chiuso  $K$  tale che

$$m_{\alpha} K \geq \varepsilon', \quad m_{\beta} \bar{K} < \delta,$$

si può conseguire tramite il seguente procedimento.

Sia prefissato  $\delta > 0$  ad arbitrio. Fissiamo inoltre, una volta per tutte, una successione di decomposizioni coordinate infinitesimali dell' $S_r$ :  $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_n, \dots$ . Per ogni valore dell'indice  $n$ , combinando in tutti i modi possibili i singoli

(3) Il lemma I esprime in forma perfettamente equivalente, nella teoria secondo M. PICONE dell'integrazione, proprietà ben note degli insiemi e delle funzioni misurabili, cfr. per esempio C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire* (Parigi 1950), pp. 33-36; nella dimostrazione di questo lemma, che mi permetto di dare per esteso, non sono riuscito ad evitare l'uso del postulato delle scelte arbitrarie. Tale uso, tuttavia, potrebbe in certo modo venir giustificato per esempio ponendosi dal punto di vista di L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (Bologna 1921), vol. I, pp. 124 (n. 40, e), 135 (n. 45, a) e di C. DE LA VALLÉE POUSSIN, loc. cit., nota a p. 23, oppure da quello di B. LEVI, *Riflessioni sopra alcuni principi della teoria degli aggregati e delle funzioni* (Scritti matematici offerti ad Enrico d'Ovidio, Torino 1918, pp. 305-324), o da altri ancora.

(4) Cfr. F. RIESZ, *Les ensembles de mesure nulle et leur rôle dans l'analyse* (« Rendiconti del Congresso Matemat. Ungherese del 1950 », pp. 205-224).

intervalli di  $\mathfrak{D}_n$  aventi, ciascuno, almeno un punto in comune con  $J$  (eseguendo cioè, con tali intervalli, successivamente le combinazioni delle classi  $1, 2, 3, \dots$ ), si perviene a costruire un numero finito  $q_n$  di plurintervalli su  $J$  <sup>(5)</sup>

$$(1) \quad U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{nq_n}.$$

Affermiamo esser possibile determinare un intero  $\nu \doteq \nu_\delta > 0$  tale che, per ogni indice  $n > \nu$ , fra i plurintervalli (1) ne esista uno almeno  $U_{nj}$  ( $1 \leq j \leq q_n$ ) per cui

$$m_\alpha U_{nj} \geq \varepsilon', \quad m_\beta \overline{U_{nj}} < \delta.$$

Infatti, ragionando per assurdo, supponiamo che, qualunque sia l'intero  $\nu > 0$ , esista almeno un indice  $n > \nu$  tale che, se per uno qualunque dei plurintervalli (1) si ha  $m_\beta \overline{U_{ni}} < \delta$ , sia pure  $m_\alpha U_{ni} < \varepsilon'$ .

Dimostriamo che da ciò consegue che, per ogni insieme chiuso  $K \subset J$  tale che  $m_\beta \overline{K} < \delta$ , si ha  $m_\alpha K < \varepsilon'$ . In questo consisterà l'assurdo.

Ora se  $m_\beta \overline{K} < \delta$ , è possibile trovare un numero  $\omega > 0$  tale che, per ogni numero positivo  $\sigma < \omega$ , sia  $m_\beta H(\overline{K}, \sigma) < \delta$  <sup>(6)</sup>. Per l'uniforme continuità di  $f(P)$  in  $J$ , è possibile, in corrispondenza di  $\sigma$ , determinare un numero  $\eta > 0$  tale che, nell'intersezione di  $J$  con l'intorno di raggio  $\eta$  di un generico punto di  $K$ , l'oscillazione della funzione sia  $< \sigma$ ; ciò implica che  $\overline{J \cdot H(K, \eta)} \subset H(\overline{K}, \sigma)$  e quindi

$$(2) \quad m_\beta \overline{J \cdot H(K, \eta)} < \delta.$$

Sia  $\rho_n$  l'estremo superiore delle ampiezze degli intervalli di  $\mathfrak{D}_n$ : è possibile trovare un intero  $\nu > 0$  tale che, per ogni indice  $n > \nu$ , sia  $\rho_n < \eta$ . Inoltre, fra gl'indici  $n > \nu$ , è possibile trovarne uno  $\bar{n}$  tale che, se  $U_{\bar{n}i}$  è uno qualunque dei plurintervalli (1) (relativi alla decomposizione  $\mathfrak{D}_{\bar{n}}$ ) soddisfacenti alla condizione  $m_\beta \overline{U_{\bar{n}i}} < \delta$ , sia anche  $m_\alpha U_{\bar{n}i} < \varepsilon'$ .

Consideriamo dunque la decomposizione  $\mathfrak{D}_{\bar{n}}$  e siano  $T_{\bar{n}j}$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) gli intervalli di  $\mathfrak{D}_{\bar{n}}$  aventi, ciascuno almeno un punto in comune con  $K$ . Si ha

$$(3) \quad K \subset J \cdot \sum_j^{1,p} T_{\bar{n}j} \subset J \cdot H(K, \eta).$$

Ora  $J \cdot \sum_j^{1,p} T_{\bar{n}j}$  è uno dei plurintervalli  $U_{\bar{n}i}$  ( $1 \leq i \leq q_{\bar{n}}$ ) ed il suo coinsieme  $\overline{U_{\bar{n}i}}$ , in conseguenza delle (2) e (3), è tale che  $m_\beta \overline{U_{\bar{n}i}} < \delta$  e, pertanto, per il modo in cui s'è scelta la decomposizione  $\mathfrak{D}_{\bar{n}}$ , sarà pure  $m_\alpha U_{\bar{n}i} < \varepsilon'$ . Ma questa ultima disuguaglianza implica che  $m_\alpha K < \varepsilon'$ , c. d. d.

(5) Dato un insieme  $E \subset S_r$ , si chiama *plurintervallo su E* il prodotto di  $E$  per un dominio plurirettangolare dell' $S_r$ , i cui intervalli componenti abbiano prodotto non vuoto con  $E$ .

(6) Col simbolo  $H(I, \rho)$  si denota l'insieme dei punti dell' $S_r$  aventi distanza  $< \rho$  dall'insieme  $I$ .

3. Allo scopo di dare una nuova dimostrazione del teorema di Viola e di studiare un altro caso di composizione di funzioni quasi continue, si ritiene utile premettere alcuni lemmi.

LEMMA I. - Se  $f(P)$  è una funzione quasi continua nell'insieme  $EC S_r$ , lebesghiano rispetto alla massa elementare  $\alpha(T)$ , vi è un insieme boreliano  $H \subset E$  <sup>(7)</sup> tale che  $m_\alpha(E - H) = 0$  e la restrizione della funzione  $f(P)$  su  $H$  è una funzione boreliana <sup>(8)</sup>.

DIMOSTRAZIONE. - Possiamo costruire una successione crescente d'insiemi chiusi, limitati, di continuità per la  $f(P)$ :

$$C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n \subset \dots$$

e tali che

$$(4) \quad m_\alpha(E - C_k) < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Mediante uno qualunque dei procedimenti classici ben noti <sup>(9)</sup>, possiamo costruire una successione di funzioni  $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_k(P), \dots$  continue in tutto  $S_r$  e tali che sia

$$\varphi_k(P) = f(P) \quad \text{per } P \in C_k.$$

Poniamo infine  $H = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$ . In virtù della (4) si ha:

$$m_\alpha(E - H) = m_\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} (E - C_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_\alpha(E - C_k) = 0 \text{ }^{(10)}.$$

Inoltre ogni punto  $P \in H$  è tale che  $P \in C_k$ , con  $k$  maggiore di un opportuno intero  $\nu_P$ , quindi anche  $\varphi_k(P) = f(P)$ . Dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(P) = f(P) \quad \text{in tutto } H,$$

e ciò basta a dimostrare l'enunciato <sup>(11)</sup>.

LEMMA II. - La funzione

$$Q = f(P) \equiv [f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)]$$

sia quasi continua nell'insieme  $J \subset S_r$ , lebesghiano rispetto ad una massa elementare  $\alpha(T)$ , e la funzione  $\varphi(Q)$  sia boreliana in  $\bar{J}$ , coinsieme di  $J$ . La funzione composta  $\varphi[f(P)]$  risulta, allora, quasi continua in  $J$ .

DIMOSTRAZIONE. - Indichiamo con  $\mathcal{F}$  la famiglia delle funzioni  $\varphi(Q)$  definite su  $\bar{J}$  e tali che  $\varphi[f(P)]$  sia quasi continua in  $J$ .  $\mathcal{F}$  contiene le funzioni continue su  $\bar{J}$  <sup>(12)</sup>. Se la successione  $\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \dots, \varphi_n(Q), \dots$  è costi-

(7) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 39, p. 123.

(8) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 49, p. 142.

(9) Cfr. per esempio C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Berlino, Teubner 1927), pp. 617-620.

(10) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 38, V, p. 122.

(11) Si ha, di più, che  $f(P)$  è della prima classe (di Baire) in  $H$ .

(12) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 45, III, p. 131.

tuita da funzioni appartenenti ad  $\mathfrak{F}$  e se, per ogni  $Q \in \bar{J}$ , è  $\varphi(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(Q)$ , anche  $\varphi(Q)$  appartiene ad  $\mathfrak{F}$ . Infatti

$$\varphi[f(P)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n[f(P)]$$

e quindi, poiché le funzioni  $\varphi_n[f(P)]$  sono quasi continue in  $J$ , anche  $\varphi[f(P)]$  è quasi continua in  $J$  <sup>(13)</sup>. In conclusione  $\mathfrak{F}$  contiene la famiglia delle funzioni boreliane su  $\bar{J}$ , c.d.d.

LEMMA III. — *Sia la funzione*

$$Q = f(P) \equiv [f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)]$$

*quasi continua ed ovunque definita nell'insieme  $J \subset S_r$ , lebesghiano rispetto ad una massa elementare  $\alpha(T)$ . Ogni insieme boreliano  $B$  dello spazio  $S_n$  è tale che l'insieme  $\underline{B} = f^{-1}(B)$  <sup>(14)</sup> è lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$ .*

DIMOSTRAZIONE. — Indichiamo con  $\mathfrak{J}$  l'aggregato degli insiemi  $E$  contenuti in  $S_n$  e tali che  $\underline{E} = f^{-1}(E)$  sia lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$ .  $\mathfrak{J}$  contiene gli insiemi chiusi <sup>(15)</sup>. Se  $\mathfrak{J}$  contiene un insieme  $E$ , esso contiene anche il suo complementare  $\overline{CE}$  perché  $f^{-1}(\overline{CE}) = J - f^{-1}(E)$  e pertanto, poiché sono lebesghiani  $J$  e  $f^{-1}(E)$ , è lebesghiano anche  $f^{-1}(\overline{CE})$  <sup>(16)</sup>. Infine, se la successione  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  è costituita da insiemi di  $\mathfrak{J}$ , appartiene a  $\mathfrak{J}$  anche l'insieme  $\sum_n^{1, \infty} E_n$  perché  $f^{-1}\left(\sum_n^{1, \infty} E_n\right) = \sum_n^{1, \infty} f^{-1}(E_n)$  e pertanto, poiché sono lebesghiani gli insiemi  $f^{-1}(E_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), risulta lebesghiano anche l'insieme  $f^{-1}\left(\sum_n^{1, \infty} E_n\right)$  <sup>(17)</sup>.

In conclusione  $\mathfrak{J}$  contiene l'aggregato boreliano in  $S_n$ , c.d.d.

Siamo, ormai, in grado di dare una nuova dimostrazione del teorema di Viola limitatamente alla sufficienza della condizione ivi enunciata (ved. n. 1). Conservando tutte le notazioni del n. 1, questa condizione richiede che ogni insieme lebesghiano  $E \subset J$  tale che  $m_\alpha E > 0$ , abbia coinsieme  $\bar{E}$  di massa  $m_\beta \bar{E} > 0$ . Orbene, per il lemma I, in  $\bar{J}$  può trovarsi un insieme boreliano  $H$ , tale che  $m_\beta(\bar{J} - H) = 0$  e la restrizione della funzione  $\varphi(Q)$  su  $H$  sia una funzione boreliana. Ma  $\underline{H} = f^{-1}(H)$  è lebesghiano per il lemma III e quindi è lebesghiano anche l'insieme  $J - \underline{H} = f^{-1}(\bar{J} - H)$ ; in conseguenza deve essere  $m_\alpha(J - \underline{H}) = 0$  (altrimenti anche  $m_\beta(\bar{J} - H) > 0$ ). Poiché, per il

(13) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 47, IV, p. 139.

(14) Se una funzione  $f(P)$  è definita in un insieme  $J \subset S_r$  ed assume i suoi valori nello spazio  $S_n$ , si indica con  $\underline{E} = f^{-1}(E)$  (per ogni insieme  $E \subset S_n$ ) l'insieme (eventualmente vuoto) dei punti  $P \in J$  tali che  $f(P) \in E$ . Se  $\{E\}$  è una qualunque classe d'insiemi di  $S_n$ , si ha

$$f^{-1}(\Sigma E) = \Sigma f^{-1}(E) \quad , \quad f^{-1}(\Pi E) = \Pi f^{-1}(E).$$

(15) T. VIOLA, loc. cit. alla nota <sup>(1)</sup>, lemma I. In questo lemma si considerano solo gli insiemi chiusi contenuti nel coinsieme di  $J$ , ma la dimostrazione vale in ogni caso.

(16) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 35, VI, p. 116.

(17) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 35, V, p. 115.

lemma II, la funzione composta  $\varphi[f(P)]$  è quasi continua su  $\underline{H}$ , si conclude <sup>(18)</sup> che essa è quasi continua anche su  $J$ , c.d.d.

Vogliamo ora studiare un altro caso di composizione di funzioni quasi continue. A tale scopo è utile tener presente che, per una generica funzione  $\varphi(P)$  quasi continua su un insieme  $E$  lebesghiano, sussiste una rappresentazione del tipo:

$$(5) \quad \varphi(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(P),$$

ove ciascuna  $\psi_n(P)$  è una funzione costante a tratti in  $E$ , cioè assumente solo un numero finito di valori ed ivi quasi continua <sup>(19)</sup>.

Convieni anche osservare che, affinché una funzione, costante a tratti su un insieme lebesghiano  $E$ , sia ivi quasi continua, occorre e basta che sia lebesghiano ciascuno degli insiemi luogo dei punti in cui essa assume uno dei suoi valori.

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA. - Sia la funzione

$$Q = f(P) \equiv [f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)]$$

ovunque definita e quasi continua nell'insieme  $J \subset S_r$ , lebesghiano rispetto alla massa elementare  $\alpha(T)$ , e sia  $\bar{J}$ , coinsieme di  $J$ , lebesghiano rispetto ad una altra massa elementare  $\beta(T)$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché, qualunque sia la funzione  $\varphi(Q)$  ovunque definita e quasi continua in  $\bar{J}$ , la funzione composta  $\varphi[f(P)]$  sia quasi continua in  $J$ , è che ogni insieme  $E \subset \bar{J}$ , lebesghiano rispetto alla massa elementare  $\beta(T)$  e di massa  $m_\beta E = 0$ , sia tale che l'insieme  $\underline{E} = f^{-1}(E)$  risulti lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$ .

DIMOSTRAZIONE. - La condizione è necessaria. Sia infatti l'insieme  $E \subset \bar{J}$  lebesghiano rispetto a  $\beta(T)$  e di massa  $m_\beta E = 0$ , e sia  $\varphi^{(E)}(Q)$  la sua funzione caratteristica. Questa funzione è quasi continua in tutto  $S_n$  e quindi anche in  $\bar{J}$  ove, inoltre, essa risulta ovunque definita; pertanto la funzione  $\varphi^{(E)}[f(P)]$  è quasi continua in  $J$ . Osservando che quest'ultima funzione è uguale ad 1 in tutto  $\underline{E} = f^{-1}(E)$  ed a 0 in  $J - \underline{E}$ , si conclude che l'insieme  $\underline{E}$ , luogo dei punti in cui detta funzione è uguale ad 1, è lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$ .

La condizione è sufficiente. Si consideri infatti una generica funzione  $\varphi(Q)$  ovunque definita e quasi continua in  $\bar{J}$ . In virtù del lemma I, può trovarsi un insieme boreliano  $H \subset \bar{J}$  tale che  $m_\beta(\bar{J} - H) = 0$  e la restrizione di  $\varphi(Q)$  su  $H$  sia una funzione boreliana. Quindi l'insieme  $\underline{H} = f^{-1}(H)$  è lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$  (lemma III) e la funzione  $\varphi[f(P)]$  è quasi continua su  $\underline{H}$  (lemma II). Consideriamo ora la funzione  $\varphi(Q)$  sull'insieme  $\bar{J} - H$  in cui risulta ovunque definita e quasi continua. Per la funzione  $\varphi(Q)$ , su  $\bar{J} - H$ , adottiamo una rappresentazione di tipo (5):  $\varphi(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(Q)$ .

(18) Op. cit. alla nota (2), § 42, II, p. 126.

(19) Cfr. per esempio C. CARATHÉODORY, loc. cit. alla nota (9), p. 388; anche G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari* (Trieste 1954), vol. I, cap. VII, § I, p. 315. Le dimostrazioni ivi esposte valgono (con insignificanti ritocchi) anche per le funzioni quasi continue.

Se  $K$  è un generico sottoinsieme di  $\bar{J} - H$ , esso è certamente lebesghiano rispetto a  $\beta(T)$  e di massa  $m_\beta K = 0$  <sup>(20)</sup>; in conseguenza delle ipotesi fatte, si ha che  $\underline{K} = f^{-1}(K)$  è lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$ . Pertanto gli insiemi luogo dei punti, in cui la funzione  $\psi_n[f(P)]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (che è costante a tratti sull'insieme  $J - \underline{H} = f^{-1}(\bar{J} - H)$ ) assume uno dei suoi valori, sono lebesghiani rispetto ad  $\alpha(T)$  e quindi la funzione  $\psi_n[f(P)]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) è quasi continua su  $J - \underline{H}$ . Ragionando analogamente a quanto s'è fatto nella dimostrazione del lemma II, si ha che anche la funzione  $\varphi[f(P)]$  risulta quasi continua su  $J - \underline{H}$  e quindi anche su  $J$ , c.d.d.

OSSERVAZIONE. — È utile confrontare la condizione enunciata in questo teorema con quella del teorema di Viola. Dimostriamo che la condizione di Viola (ove si ricorra ancora una volta all'uso del postulato delle scelte arbitrarie <sup>(21)</sup>) equivale a quella di richiedere che ogni insieme  $E \subset \bar{J}$ , lebesghiano rispetto a  $\beta(T)$  e di massa  $m_\beta E = 0$  sia tale che  $\underline{E} = f^{-1}(E)$  risulti lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$  e di massa  $m_\alpha \underline{E} = 0$  (e quindi questa condizione è più restrittiva di quella del teorema ora dimostrato, in relazione col fatto che la classe delle funzioni  $\varphi(Q)$  considerata da Viola è più estesa di quella considerata in questo teorema). E infatti sia  $E \subset \bar{J}$  lebesghiano rispetto a  $\beta(T)$  e di massa  $m_\beta E = 0$ . È possibile trovare un insieme boreliano  $G \supset E$ , tale che  $m_\beta G = 0$  (basta porre  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  ove, per ogni intero  $k > 0$ ,  $A_k$  sia aperto, contenente  $E$  e tale che  $m_\beta A_k < 1/k$ ) <sup>(22)</sup>. Per il lemma III,  $\underline{G} = f^{-1}(G)$  risulta lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$ , quindi la condizione del teorema di Viola implica che  $m_\alpha \underline{G} = 0$ . Poiché  $G \supset E$ , si conclude che  $\underline{E}$  è lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$  e di massa  $m_\alpha \underline{E} = 0$ .

Inversamente supponiamo che, per ogni insieme  $E \subset \bar{J}$  lebesghiano rispetto a  $\beta(T)$  e di massa  $m_\beta E = 0$ , l'insieme  $\underline{E}$  sia lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$  e di massa  $m_\alpha \underline{E} = 0$ . Ciò implica che, se  $E \subset \bar{J}$  è lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$  e di massa  $m_\alpha E > 0$ , si ha pure  $m_\beta \bar{E} > 0$ . E infatti, se fosse  $m_\beta \bar{E} = 0$ , si potrebbe trovare in  $E$  un insieme  $C$  chiuso e di continuità per  $f(P)$ , di massa  $m_\alpha C > 0$  <sup>(23)</sup> e con il coinsieme  $\bar{C}$ , in conseguenza, lebesghiano e di massa  $m_\beta \bar{C} = 0$ . Poiché, come subito si vede,  $C \subset f^{-1}(\bar{C})$ , per le ipotesi fatte si avrebbe  $m_\alpha C = 0$ . Ciò è assurdo, quindi  $m_\beta \bar{E} > 0$  c.d.d.

Riteniamo che il confronto qui stabilito valga a mettere ancora una volta in evidenza la grande semplicità e la singolare efficacia della definizione di *massa lebesghiana assoluta* introdotta dal prof. M. Picone fin dal 1946. Tale definizione, infatti, può applicarsi ad un insieme *del tutto arbitrario* e ciò ha consentito a Viola di enunciare la sua condizione prescindendo completamente dal fatto che il coinsieme indicato con  $\bar{E}$  *sia lebesghiano o no* (rispetto a  $\beta(T)$ ). La nostra condizione, invece, precisa che entrambi gli insiemi  $E$  ed  $\bar{E}$  debbono essere *lebesghiani* (l'uno rispetto a  $\beta(T)$ , l'altro rispetto ad  $\alpha(T)$ ).

(20) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 37, p. 118.

(21) Si ripete l'osservazione critica della nota <sup>(3)</sup>.

(22) Loc. cit. alla nota <sup>(20)</sup>.

(23) Op. cit. alla nota <sup>(2)</sup>, § 40, p. 124.

Ora, retrocedendo dal nostro enunciato a quello di Viola, si compie una generalizzazione importante che solo la definizione di Picone sembra permettere, e cioè quella di non richiedere più alla componente  $\varphi(Q)$  di essere *ovunque* definita in  $J$ . A ciò s'aggiunga anche il vantaggio che sembra conseguirsi nella questione del postulato delle scelte arbitrarie, cfr. le note <sup>(3)</sup>, <sup>(21)</sup>.

4. Ferme restando le notazioni precedenti, particolarizziamo la funzione

$$Q = f(P) \equiv [f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)],$$

quasi continua ed ovunque definita nell'insieme  $J \subset S_r$ , lebesghiano rispetto alla massa elementare  $\alpha(T)$ , ponendo:

$$(6) \quad f_h(P) = h\text{-esima coordinata di } P \quad (h = 1, 2, \dots, r).$$

In tal caso  $Q \equiv P$ ,  $\bar{J} \equiv J$ . Supponiamo che l'insieme  $J \equiv \bar{J}$  sia lebesghiano anche rispetto ad un'altra massa elementare  $\beta(T)$ , e che in  $\bar{J}$  sia quasi continua, rispetto a  $\beta(T)$ , una funzione  $\varphi(Q)$ ; la funzione composta  $\varphi[f(P)]$  coincide con la  $\varphi(Q)$ . Pertanto il già citato teorema di Viola, in questo caso particolare, fornisce il seguente

**COROLLARIO I.** - *Sia  $J$  un insieme lebesghiano rispetto alle masse elementari  $\alpha(T)$  e  $\beta(T)$ . Condizione necessaria e sufficiente, per la massa elementare  $\alpha(T)$ , affinché ogni funzione quasi continua in  $J$  rispetto a  $\beta(T)$ , lo sia pure rispetto ad  $\alpha(T)$ , è che ogni insieme  $E \subset J$  lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$  di massa  $m_\alpha E > 0$ , sia tale che  $m_\beta E > 0$ .*

Infine il teorema dimostrato alla fine del numero precedente permette di dedurre il seguente

**COROLLARIO II.** - *Sia la funzione*

$$Q = f(P) \equiv [f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)]$$

*quasi continua e ovunque definita nell'insieme  $J \subset S_r$  lebesghiano rispetto alla massa elementare  $\alpha(T)$ , e sia  $\bar{J}$ , coinsieme di  $J$ , lebesghiano rispetto ad un'altra massa elementare  $\beta(T)$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché, per ogni insieme  $E \subset \bar{J}$  lebesghiano rispetto a  $\beta(T)$ , l'insieme  $\underline{E} = f^{-1}(E)$  sia lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$ , è che ogni insieme  $E \subset \bar{J}$  lebesghiano rispetto a  $\beta(T)$  e di massa  $m_\beta E = 0$  sia tale che  $\underline{E} = f^{-1}(E)$  risulti lebesghiano rispetto ad  $\alpha(T)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** - La condizione è, ovviamente, necessaria. Essa è anche sufficiente. Infatti, essendo soddisfatte le ipotesi del teorema dimostrato alla fine del n. 3, se la funzione caratteristica  $\varphi^{(E)}(Q)$  di un insieme  $E \subset \bar{J}$  è quasi continua rispetto a  $\beta(T)$ , il che accade quando  $E$  è lebesghiano, la funzione composta  $\varphi^{(E)}[f(P)]$  è quasi continua su  $J$  e, pertanto, è lebesghiano l'insieme  $\underline{E} = f^{-1}(E)$ , essendo questo il luogo dei punti  $P$  in cui  $\varphi^{(E)}[f(P)] = 1$ , c.d.d.

**OSSERVAZIONE.** - Se, nel precedente corollario, come funzione  $Q = f(P)$  si assume quella definita dalle (6), allora l'insieme  $\bar{J} \equiv J$  deve considerarsi lebesghiano rispetto alle due masse elementari  $\alpha(T)$  e  $\beta(T)$ , e si ottiene così una condizione necessaria e sufficiente, per la massa elementare  $\alpha(T)$ , affinché ogni insieme  $E \subset J$  lebesghiano rispetto a  $\beta(T)$ , sia tale anche rispetto ad  $\alpha(T)$ .

**Topologia.** — *Un indice dei punti uniti* (\*). Nota III (\*\*) di D. G. BOURGIN, presentata dal Socio M. PICONE.

Gli spazi trattati nelle prime due Note erano lisci nel senso che erano dotati di connessione localmente forte. Consideriamo qui parecchi spazi che sono limiti di spazi ANR o  $LC^*$ . Questi sembrano interessanti, non solamente dal punto di vista dei numeri significativi di Lefschetz, ma anche intrinsecamente come estensioni naturali degli ANR. La nostra numerazione segue l'ordine stabilito in  $[B_1]$  e  $[B_2]$ .

Tutti gli spazi si suppongono contenuti in un parallelotopo. Sia  $X^\rho$  un ANR. Ordiniamo  $\{X^\rho\}$  con le inclusioni inverse cioè  $\rho < \nu \iff X^\nu \subset X^\rho$ . L'uso di  $<$  non si deve confondere con il suo uso per raffinamenti. Sia  $U$  un insieme aperto fissato che contiene uno spazio compatto  $X$ . Sia  $r(\nu)$  una rappresentazione  $U \rightarrow X^\nu$ . Sia  $r^\rho \nu = r(\rho) r(\nu)$  per  $\rho < \nu$ .

$i^\rho$  è l'applicazione  $X^\rho \rightarrow X$ . In accordo con le precedenti Note tutti i ricoprimenti sono finiti e aperti e sono indicati con le prime lettere greche. Gli elementi di un ricoprimento sono le corrispondenti lettere latine dotate di un indice. I ricoprimenti di  $X^\mu$  sono scritti  $\alpha(\mu)$ ,  $\beta(\mu)$  ecc.

Scriviamo  $\alpha^2$  per  $\{a_i \times a_i \mid a_i \in \alpha\}$ . D'altra parte  $St^2(a_i, \alpha)$  significa  $St(St(a_i, \alpha), \alpha)$ . Se i gruppi di omologia di  $X$  su i numeri razionali hanno le basi finite per ogni dimensione e se i gruppi sono triviali per dimensioni sufficientemente grandi, allora dicesi che  $X$  è *omologia finita*. Se  $f$  applica  $X \rightarrow X$  allora indichiamo con  $i^\rho$  l'applicazione d'inclusione  $X \rightarrow X^\rho$  e definiamo  $f^\rho = i^\rho f i^\rho$  su  $X^\rho \rightarrow X^\rho$ . Generalmente non usiamo  $i^\rho$  e scriviamo  $f^\rho = f i^\rho$ . Le seguenti condizioni di uniformità sono impiegate in seguito.

$Q_1$ : per ogni ricoprimento  $\alpha$  di  $X$  si può trovare un segmento  $\rho_0(\alpha) < \rho$ , tale che  $x, i^\rho x \in \alpha^2$ .

$Q_2$ : per ogni ricoprimento  $\alpha$  di  $X$  c'è un segmento,  $\rho(\alpha) < \rho$ , tale che  $i^\rho r(\rho) u, i^\nu r(\nu) r(\rho) u \in \alpha^2$  per tutti  $u \in U$ .

Sia  $r(\rho)$  una ritrazione e sia  $p_{\mu\nu}$  l'inclusione  $X^\nu \subset X^\mu$ ,  $\mu < \nu$ , allora  $X = \bigcap X^\rho$  o, che è equivalente, l'omeomorfo di  $L\{X^\rho, p_{\mu\rho}\}$  è un  $NR_\delta$ .

$X$  è un  $\delta NR$  se un certo intorno  $\bar{U}$  di  $X$  è per qualsiasi aperto  $V \supset X$  esiste una estensione  $r_V$ , della applicazione identica di  $X$  in se stesso, in  $r_V: U \rightarrow V$ .

Se per qualsiasi dato ricoprimento  $\alpha$  di  $\bar{U}$  si può trovare un'applicazione  $s_\alpha: U \rightarrow X$  con  $s_\alpha x, x \in \alpha^2$  dove  $x \in X$  allora  $X$  dicesi un *approssimato*  $NR$  e si scrive  $aNR$ .

Nelle tre definizioni precedenti la sostituzione di  $U$  con  $P$  conduce alle ovvie generalizzazioni di una ritrazione assoluta e scriviamo  $R_\delta, \delta R$

(\*) Ringrazio la United States Air Force delle sovvenzioni da essa avute per la preparazione di questo lavoro sotto Contratto AF 18 (603) - 32.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1956.

e  $aR$ . (La  $aR$  è implicata in un Abstract di [Wa]). Si suppone che gl'insiemi  $U$  e  $X$  siano connessi.

OSSERVAZIONE. - Con riferimento all'idea di un quasi complesso [L, p. 323] si vede che nonostante che  $r^v_\mu r^e_v$  sia una ritrazione di  $X^e \rightarrow X^\mu$ , quando  $\{r(\rho)\}$  sono ritrazioni, non è necessariamente la stessa ritrazione di  $r^e_\mu$  e più generalmente se  $r^e_\mu$  e  $r^e_\mu$  sono due ritrazioni può benissimo darsi che  $r^e_\mu$  e  $r^e_\mu$  siano diverse. (Un esempio semplice è quello di due cerchi con un punto in comune  $C_1$  e  $C_2$  per  $X^e$  e  $C_1$  per  $X^\mu$ . In una ritrazione  $C_2$  va in un punto di  $C_1$  e nell'altra copre tutto  $C_2$ ).

LEMMA 21. - Sia  $X$  un  $NR_\delta$  che soddisfi  $Q_1$  e  $Q_2$  allora  $X$  è un  $ANR$ .

Introduciamo  $r^e_\rho$  per l'applicazione identica. Allora si vede subito che  $Q_2$  implica che  $\{f^v r^e_v r(\rho)\}$  è un'ipersequenza delle applicazioni, numerate secondo un certo insieme ordinato, che converge uniformemente a una applicazione continua  $T$  di  $U$  in  $X$ . Allora  $Q_1$  implica  $Tx = x$ . Quindi  $T$  è una ritrazione di  $U$  su  $X$ .

LEMMA 22. - Siano  $\{W_i = \bigcup_{i=1}^N\}$  gli insiemi convessi e aperti in  $P$ . Quindi  $\bar{O} = \overline{\bigcup W_i}$  è omologia finita.

È facile vedere che i Lemmi 0 e 1 di  $[B_1]$  valgono per  $\bar{O}$  e in particolare  $\bar{O}$  è  $LC^*$ . L'Osservazione 1 e il Lemma 7 di  $[B_1]$ , stabiliscono le conclusioni desiderate.

Un  $O$  definito come nel Lemma dicesi *pezzamente convesso*. Si capisce che un  $O$  pezzamente convesso esiste con  $X \subset O \subset \bar{O} \subset \bigcup$ .

LEMMA 23. - Sia  $X$  un  $NR_\delta$  che soddisfi  $Q_1$ , allora  $X$  è un  $aNR$ .

Per qualsiasi  $V \supset X$ , e tutti  $\rho(V) < \rho$ , risulta  $X^e \subset V$ . Altrimenti ci sarebbe un  $x_\rho$  in  $X^e \cap V'$  per ciascuno  $\rho$ . Quindi per tutti  $\bar{\rho} < \rho$ ,  $\{x_\rho\} \subset X^e$  e perché  $X^e$  è compatto segue l'esistenza di un punto di compattezza, *cluster point*,  $\bar{x} \in V' \subset X'$ . Però  $\bar{x}$  è contenuto in tutti gli insiemi  $\{X^e\}$  e perciò appartiene ad  $X$ , e perciò vi è una contraddizione. Quindi  $t^e r(\rho)$  costituisce un  $s_\rho$ .

LEMMA 24. - Sia  $X$  un  $NR_\delta$  allora è omologia finita.

La dimostrazione si basa su l'osservazione che siccome  $r^e_v p^e_v$  è l'identità su  $X^e$ ,  $r^e_v p^e_v$  è l'isomorfismo identico. Così, supponiamo che  $\gamma_n = \{\gamma_n(\lambda)\}$  sia un rappresentativo di  $\Gamma_n \in H_n(X)$ . Perché  $\Gamma_n \xrightarrow{p_\lambda} \Gamma_n(\lambda)$ ,  $p_\lambda$  definisce un omomorfismo di  $H_n(X) \rightarrow H_n(X^\lambda)$ . Sia  $\Gamma_n(\lambda) = 0$  allora  $p_\lambda^e \Gamma_n(\rho) = \Gamma_n(\lambda) = 0$  e perciò  $r^e_\lambda p_\lambda^e \Gamma_n(\rho) = \Gamma_n(\rho) = 0$ .

Quindi  $\Gamma_n = 0$ . Cioè il nucleo di  $p_\lambda$  è  $O$ . In breve  $p_\lambda$  è un isomorfismo. Infatti è un isomorfismo topologico come si può stabilire seguendo il modello [L].

LEMMA 25. - Se  $X$  è  $\delta NR$  o  $aNR$  è omologia finita.

Possiamo supporre che  $\bigcup$  sia pezzatamente convesso. Sia  $M$  la dimensione di  $H_n(\bigcup)$ . Supponiamo che ci siano  $N$  linearmente indipendenti  $n$  cicli  $\{\gamma_n^i \mid \gamma_n^i = \{\gamma_n^i(a)\}, i = 1, \dots, N\}$  su  $X$ . Allora per un certo insieme aperto  $V \supset X$  questi cicli sono linearmente indipendenti su  $V$ . [W; p. 174]. Esiste una applicazione indicata più brevemente con  $v$  tale che  $v \bigcup \subset W \subset \bar{W} \subset V$ .

Sia  $\beta$  un ricoprimento di  $P$  quindi  $\beta \wedge X = \{b_i \cap X\}$  è un ricoprimento di  $X$ .  $i$  significa l'inclusione  $X \subset \bar{U}$ . Consideriamo  ${}^i b_i = (vi)^{-1} b_i$  per  $b_i \cap X \neq \Phi$ . Essendo  $vi$  l'identità su  $X$  segue che  ${}^i b_i \cap X = b_i \cap X$  e perciò identifichiamo tutti e due. Allora  $(vi)$  è l'identico isomorfismo di  $C_n(X)$  sulla  $C_n(X)$  considerata adesso come sottogruppo di  $C_n(\bar{V})$ .

Allora  $vi \gamma_n^i(b_n X) = \gamma_n^i(b_n X) \subset Z_n(\bar{V})$ . Quindi anche  $(vi) \gamma_n^i$  è  $\gamma_n^i$  considerato adesso su  $V$ . Nonostante che l'omologia di  $vi Z_n(X)$  sia considerata rispetto all'insieme  $V \supset X$  la definizione di  $V$  assicura che la indipendenza lineare di  $\{\gamma_n^i\}$  è mantenuta e perciò  $vi Z_n X$  contiene  $N$  cicli linearmente indipendenti. D'altra parte  $\dim. vi Z_n(X) \leq \dim. v Z_n(\bar{U}) \leq M$ . Quindi  $N \leq M$  o  $\dim. Z_n(X) \leq M$ . Per  $n$  sufficientemente grande il Lemma 22 assicura che  $M = 0$ . Se  $X$  è un  $aNR$ , dato  $\beta$ , scegliamo  $\alpha >^* \beta$  dove  $\alpha$  ed  $\beta$  sono i ricoprimenti di  $\bar{U}$ . Poiché  $(s_\alpha i x, x) < (\alpha \wedge X)^2$  si vede che  $(s_\alpha i)_* : H_n b(X) \rightarrow H_n b(X)$  è un isomorfismo e perciò  $s_\alpha * H_n b \rightarrow H_n b(X)$  è un omomorfismo. Qui  $b(X)$  è il nervo di  $\beta \wedge X$ . Allora  $\dim H_n b(X) \leq \dim H(b)$  e siccome  $H_n(\bar{U}) = \varprojlim H_n(b)$  è omologia finita segue facilmente che  $H_n(X) = \varprojlim H_n b(X)$  è anche omologia finita.

C'è una analogia aspettata di  $aNR$  rispetto alle estensioni approssimative. Per esempio:

LEMMA 26. —  $X$  è un  $aNR$   $\iff$  sia  $A$  un sotto insieme compatto di  $P$  e  $f$  applichi  $A$  in  $X$  allora esiste un intorno fisso  $U \supset A$  e per qualsiasi ricoprimento  $\alpha$  di  $X$  esiste un'applicazione  $f^\alpha : U \rightarrow X$  con  $f^\alpha x, f x \in \alpha^2$  valido per ogni  $x \in X$ .

Che le condizioni bastino si vede immediatamente con l'uso dell'applicazione identica. Che le condizioni occorranco è anche ovvio. Infatti essendo  $X$  un  $aNR$ , il teorema di Tietze dà un'estensione  $F : P \rightarrow P$  di  $f$ . Sia  $s_\alpha : W \rightarrow X$  con  $x, s_\alpha x \in \alpha^2$ . Quindi  $f^\alpha = s_\alpha F$  è l'applicazione richiesta sulla  $\bar{U} = F^{-1} W$ .

TEOREMA 5. — Se  $X$  è un  $NR_\delta$  e soddisfa  $t^v r^{\mu} = t^{\mu}$  allora  $Lf = Lf_\rho$  per  $\rho_0 < \rho$ . Se inoltre  $X$  soddisfa  $Q_1$  e  $Lf \neq 0$  allora  $f$  ha un punto unito.

Le basi per  $H_n(X)$  e per  $H_n(X^0)$  sono  $\{\Gamma_n^i | i = 1, \dots, N_n\}$  e  $\{\Gamma_n^i(\rho)\} \cup \{\Gamma_n^j(\rho) | j = N_n + 1, \dots, M_n\}$ . Osserviamo che il diagramma seguente è commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^0) & \xrightarrow{f^0} & H_n(X^0) \\ \downarrow p_\mu^0 & & \downarrow p_\mu^0 \\ H_n(X^\mu) & \xrightarrow{f^\mu} & H_n(X^\mu) \end{array}$$

cioè

$$(i) \quad p_\mu^0 f^0 = f^\mu p_\mu^0.$$

Infatti

$$f^\mu p_\mu^0 = i_\mu f t^\mu p_\mu^0 = i_\mu f t^0 r^\mu p_\mu^0$$

dall'ipotesi è perciò

$$(ii) \quad f p_\mu^0 = i_\mu f t^0.$$

Essendo  $z^\mu = p_\mu^0 z^0$  e siccome questa relazione si mantiene per gli omomorfismi indotti, dalla (ii) deduciamo la (i). Quindi c'è un omomorfismo di  $H_n(X) = L H_n(X^0) \rightarrow H_n(X)$  determinato da  $\{f^\mu\}$ .

La nostra dimostrazione adesso sarà in fondo simile a quella in [L, p. 325]. Così dal ragionamento nella dimostrazione del Lemma 24 possiamo scrivere

$$f \Gamma_n^i = \sum m_i^l(n) \Gamma_n^l$$

con

$$f^e \Gamma_n^i(\rho) = \sum m_i^l(n) \Gamma_n^l(\rho).$$

Gli elementi di  ${}^1\Gamma_n^j(\rho)$  sono manipolati secondo l'osservazione che se  ${}^1\gamma^j(\rho)$  è un ciclo rappresentativo di  ${}^1\Gamma_n^j(\rho)$

$$(iii) \quad f^\mu {}^1\gamma^j(\mu) = f t^\mu r_\mu^\lambda p_{\lambda\mu} {}^1\gamma^j(\mu).$$

Da [L, 3.12] per un opportuno  $\lambda < \mu$ ,  $p_{\lambda\mu} {}^1\gamma^j(\mu)$  è essenziale per tutti  $\gamma^j(\mu)$  e quindi possiamo scrivere  $p_{\lambda\mu} {}^1\gamma^j(\mu) = \Delta^j(\lambda)$ , la  $\lambda$  coordinata di un ciclo di Čech  $\Delta^j$ . Supponiamo dunque che  $\Delta^j \sim \sum a_k^j \gamma^k$ . Sostituiamo  ${}^1\gamma^j(\mu)$  da  ${}^1\gamma^j(\mu) - \sum a_k^j \gamma^k(\mu) = {}^2\gamma^j(\mu)$ . Allora, essendo  $\gamma^k$  un ciclo di Čech con la coordinata  $\gamma^k(\mu)$  si ha

$$p_{\lambda\mu} {}^2\gamma^j(\mu) = p_{\lambda\mu} {}^1\gamma^j(\mu) - \sum a_k^j \gamma^k(\lambda) = \Delta^j(\lambda) - \sum a_k^j \gamma^k(\lambda) \sim 0.$$

Perciò in conseguenza di (iii) segue

$$f^\mu {}^2\gamma^j(\mu) \sim 0.$$

Perché  ${}^2\Gamma_n^j(\mu)$  può sostituire  ${}^1\Gamma_n^j(\mu)$  nella definizione di una base per  $H(X^\mu)$  la nostra conclusione è che solo i termini di  $\{\Gamma_n^k(\mu)\}$  hanno significato nella definizione di  $L(f^\mu)$ , cioè

$$L(f^\mu) = \sum (-1)^n \sum m_i^i(n) = L(f).$$

Per la seconda parte del teorema osserviamo che per  $\rho_0 < \rho$  si trova un punto unito  $x_0 \in X$  per  $f^e$ . Sia  $\bar{x}$  un punto di compattezza che evidentemente appartiene a  $X$  di  $\{x_0\}$ . Asseriamo che  $f\bar{x} = \bar{x}$ . Altrimenti se  $f\bar{x} = y \neq \bar{x}$  allora esistono intorni  $N_y$  e  $M_{\bar{x}}$  tali che  $fM_{\bar{x}} \subset N_y$ ,  $M_{\bar{x}} \cap N_y = \Phi$ . Scegliamo un ricoprimento  $\alpha$  tale che  $St(St(\bar{x}, \alpha), \alpha) \subset M_{\bar{x}}$ . Segue da  $Q_1$  che per un  $\rho$  ben scelto risulta  $x, t^2 x \in \alpha^2$ . Quindi per  $\rho < \nu$ ,  $x_\nu$  e  $\bar{x}$  appartengono allo stesso elemento  $a_i$  di  $\alpha$  e perciò  $t^\nu x_\nu \in M_{\bar{x}}$ . Si conclude che  $N_y \supset f t^\nu x_\nu = x_\nu \subset M_{\bar{x}}$ , il che è assurdo.

**COROLLARIO.** - Se  $X$  è un  $aNR$  e se  $f$  applica  $X$  in  $X$  dove  $f$  è omotopico alla costante allora esiste un punto unito.

Senza perdere generalità possiamo supporre che  $U$  sia pezzatamente convesso. Sicché  $U$  soddisfa i Lemmi 0 e 1 di  $[B_1]^{(1)}$ , il Lemma 15 di  $[B_2]$  implica l'esistenza d'un punto unito  $x_a \in X$  per  $f s_a: \bar{\square} \rightarrow X$  perché  $f \simeq 1$

(1) In  $[B_1]$  la parola *omeomorfismo* dev'essere sostituita da *omomorfismo* tutte le volte che è riferita alle trasformazioni di gruppi. Nel riassunto di [L, p. 252] pagina 439, linea 3, dopo è si inserisca *la classe rispetto B di cicli in*. Nella p. 439, linea 6, dopo  $X$  si inserisca  $a$ , e nella linea 15 si inserisca  $Q_a^{-1} St(a_i)$  invece di  $Q_a St(a_i)$ .

induce  $f s_\alpha \simeq 1$  e perciò  $L(f s_\alpha) = 1$ . Sia  $\bar{x}$  un punto di compattezza di  $\{x_\alpha\}$ . Asseriamo che  $f\bar{x} = \bar{x}$ . Altrimenti se  $\bar{x} \neq y = f\bar{x}$  ci sono intorno  $M\bar{x}$  e  $Ny$  tali che  $fMx \subset Ny$  e  $M\bar{x} \cap Ny = \Phi$ . Scegliamo un intorno  $O\bar{x}$  tale che  $O\bar{x} \cup s_\alpha O\bar{x} \subset M\bar{x}$  valga per  $\alpha_0 < \alpha$  e consideriamo  $x_\alpha \in O\bar{x}$ . Concludiamo l'assurdo  $Mx \supset x_\alpha = f s_\alpha x_\alpha \subset fMx \subset Ny$ .

COROLLARIO: Se  $X$  è un  $aNR$  (o un  $\delta NR$  o un  $NR\delta$ ) e se  $f$  applica  $X$  in  $X$  in modo tale che la  $m$ -esima iterazione  $f^m$  è omotopica alla costante per  $m \geq 1$  allora esiste un punto unito.

Dobbiamo trattare solo il caso  $m > 1$  ed useremo le proprietà di  $U$  indicate nel precedente corollario. Ricordiamo anche che  $U$  ed  $X$  sono connessi. Osserviamo che l'omomorfismo indotto,  $f^m_*$ , da  $H_n(X)$  in  $H_n(X)$  è banale per  $n > 0$  ed è un isomorfismo per  $n = 0$ . Dal fatto che  $f^m_*$  è l'iterazione di  $f_*$  segue che anche  $f_*$  è banale per  $n > 0$  ed è un isomorfismo per  $n = 0$ . Si conclude immediatamente che  $L(f) = 1$ . Il resto della dimostrazione segue il modello del corollario precedente.

Sia  $G^e = t^{e-1} G$ ,  $G^a = s_\alpha^{-1} G$ . Il seguente è un risultato che vale benché noi non siamo riusciti a definire un indice  $\Lambda(f, G)$ .

TEOREMA 6. — Se  $X$  è un  $NR\delta$  che soddisfa  $Q_1$  o se  $X$  è un  $aNR$ , e se  $G$  è aperto dove  $\dot{G}$  non contiene punti uniti della applicazione  $f: X \rightarrow X$  e se l'indice  $\Lambda(f^e, G^e)$ , è diverso da zero per tutti i valori di  $\rho$  per i quali risulta definito, allora  $f$  ha un punto unito in  $G$ .

Consideriamo il caso del  $NR\delta$ . Dal fatto che  $f$  non ha punti uniti su  $\dot{G}$  segue che per un ricoprimento opportuno,  $\alpha$ ,

$$(I): \quad St(\alpha_i, \alpha) \cap f St(\alpha_j, \alpha) = \Phi \quad \text{quando} \quad \alpha_j \cap \dot{G} \neq \Phi.$$

Perciò ultimamente  $\dot{G}^e$  è senza punti uniti di  $f^e$ . Si capisce che i punti uniti di  $\dot{G}^e$  devono essere in  $X$ . Dalla compattezza di  $\bar{G}$  segue  $t^{e-1} \dot{G} \supset (t^{e-1} G)' = \dot{G}'$ . Se  $y \in t^{e-1} \dot{G} \cap X$ , allora  $Q_1$  assicura che  $t^e y, y \in \alpha^2$  per  $\rho_0 < \rho$  e di più (I) implica che  $f t^e y$  e  $y$  sono differenti. Perciò  $\dot{G}^e$  non contiene punti uniti di  $f^e$  per  $\rho_0 < \rho$ . Quindi  $\Lambda(f^e, G^e)$  è definito per  $\rho_0 < \rho$  e per ognuno tale  $\rho$  esiste un punto unito  $x_\rho \in G^e$  per  $f^e$ . Supponiamo che  $\bar{x}$  sia un punto di compattezza di  $\{x_\rho\}$ . La dimostrazione della seconda parte del Teorema 5, stabilisce che  $f\bar{x} = \bar{x}$ . Rimane da dimostrare che  $\bar{x} \in G$ . Dalla ipotesi  $\bar{x} \in \dot{G}$ . Se  $\bar{x} \in \bar{G}$ , allora per un certo intorno  $N\bar{x}$ ,  $N\bar{x} \cup t^e N\bar{x} \subset St(N\bar{x}, \alpha) \subset \bar{G}'$  per  $\rho_1 < \rho$  e essendo  $x_\rho \in G^e$  questo non va d'accordo con il fatto che  $t^e x_\rho \in G$  per almeno un  $x_\rho$  in  $N\bar{x}$ .

La dimostrazione è simile per il caso di un  $aNR$ .

Il risultato enunciato nel Teorema 6 suggerisce una definizione naturale di un indice nei casi particolari. Limitiamoci al caso che  $St(G', \alpha)$  non contenga alcun punto unito. Quindi per  $\rho > \rho_0$  non vi sono punti uniti di  $f^e$  in  $H^e = St(G^e, \beta(\rho))$ ; dove  $\beta(\rho)$  è un ricoprimento opportuno di  $X^e$ . Da questo segue che  $\Lambda(H^e, f^e) = 0$  e quindi che

$$\begin{aligned} \Lambda(G^e, f^e) &= L(X^e, f^e) - \Lambda(H^e, f^e) \\ &= L(X^e, f^e). \end{aligned}$$

Nella ipotesi che  $X$  sia un  $NR_8$  che soddisfi  $t^v r^e_v = t^e$ , o più generalmente che  $L(X, f)$  esista come limite di  $L(X^e, f^e)$ ; allora possiamo definire

$$\wedge(G, f) = L(X, f).$$

Un esempio semplice del tipo degli spazi dei quali si tratta nel teorema 5 è il seguente: Nel piano sia  $X = \{x = (\xi, \eta) \mid 0 \leq \eta \leq 1, \xi = 0, \pm 1/m, m = 1, 2, \dots\} \cup \{x \mid \eta = 0, |\xi| \leq 1\} \cup C$  dove  $C$  è un arco semplice da  $(-1, 0)$  a  $(1, 0)$ . Qui  $X^n = X$  quando  $|\xi| \geq 1/n$  e inoltre è il rettangolo  $A^n = \{x \mid |\xi| \leq 1/n, 0 \leq \eta \leq 1\}$ . Sia  $t^n$  l'identità nel complemento di  $A^n$  e sia  $r^n_m$  l'identità nel complemento di  $A^n - A^m$ . Inoltre possiamo definire  $t^n$  o  $r^n_m$  come le compressioni orizzontali di  $A^n$  nel  $\xi = 0$ , o nel  $A^m$ , rispettivamente, così che  $d(t^n x, x) < 1/n$ ,  $x \in X^n$  e perciò  $Q_1$  è soddisfatto ed anche  $t^n = t^m r^n_m$ . Più semplice sarebbe l'esempio senza l'arco  $C$ .

#### BIBLIOGRAFIA.

- B<sub>1</sub>: D. G. BOURGIN, *Un indice dei punti uniti*, I, « Rend. Lincei », vol. XIX, pp. 435-440, 1955.  
 B<sub>2</sub>: — *Un indice dei punti uniti*, II, « Rend. Lincei », vol. XX, pp. 43-48, 1956.  
 B: — *Topologia funzionale ed algebrica; Mimeographed Fulbright Lectures*; Istituto Matematico dell'Università di Roma, 1954-1955.  
 L: S. LEFSCHETZ, *Algebraic Topology*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », vol. 27, 1942.  
 Wa: A. WALLACE, Abstract 260, « Bulletin Am. Math. Soc. », vol. 59, p. 258, 1951  
 W: R. L. WILDER, *Topology of Manifolds*, « Ann. Math. Soc. Colloquium Publications », 32, 1949.

**Geometria.** — *Sulle varietà kähleriane dotate di isotropia caratteristica*. Nota di ENZO MARTINELLI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. Lo studio della curvatura riemanniana di una varietà a struttura complessa  $V_{2n}$ , dotata di metrica kähleriana, è stato notevolmente approfondito da Bochner<sup>(1)</sup>. Un elemento che giuoca in modo essenziale in questo studio è costituito da quelle che Bochner chiama « sezioni olomorfe » di  $V_{2n}$  e che noi preferiamo chiamare *faccette caratteristiche*. Si tratta semplicemente delle faccette piane immagini reali degli elementi lineari complessi della  $\mathfrak{Q}_n$  complessa di cui  $V_{2n}$  è immagine reale<sup>(2)</sup>.

Il Bochner ha considerato, fra l'altro, il caso in cui in un punto  $P$  di  $V_{2n}$  la curvatura riemanniana sia la stessa per tutte le faccette caratteristiche uscenti da  $P$ . Questo caso, che diremo di *isotropia caratteristica*, presenta

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) S. BOCHNER, *Curvature in Hermitian manifolds*, « Bull. Amer. Math. Soc. », 53, 179-195 (1947). Cfr. anche la monografia di K. YANO-S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, Princeton Univ. Press (1953).

(2) Cfr. E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, « Annali di Mat. », in corso di stampa, e precedenti lavori ivi citati.

notevoli analogie con l'ordinario caso di isotropia per le varietà riemanniane (vale per esempio un analogo del teorema di Schur).

Ora è noto il significato della curvatura riemanniana nei confronti della rotazione che subisce la stella dei vettori tangenti in un punto  $P$ , quando la stella venga trasportata per parallelismo lungo un circuito infinitesimo appartenente ad una fissata faccetta per  $P$  <sup>(3)</sup>. In particolare, nel caso di isotropia ordinaria è noto che la rotazione della stella risulta parallela alla faccetta considerata e di ampiezza angolare uguale a  $K\sigma$ , essendo  $K$  la curvatura e  $\sigma$  l'areola racchiusa dal circuito infinitesimo.

Cosa può dirsi nel caso analogo di isotropia caratteristica? Nel presente lavoro è data risposta a questa domanda <sup>(4)</sup>.

2. Pensiamo  $V_{2n}$  descritta mediante le coordinate isotrope locali  $z^\alpha, z^{\alpha*}$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ), i punti reali di  $V_{2n}$  (gli unici che considereremo) ottenendosi per  $z^{\alpha*} = \bar{z}^\alpha$ , dove s'indica con  $\bar{z}^\alpha$  il valore complesso coniugato di  $z^\alpha$ . Supponiamo  $V_{2n}$  dotata della metrica pseudo-conforme (o hermitiana):

$$(1) \quad ds^2 = 2 g_{\alpha\beta*} dz^\alpha dz^{\beta*} \quad (g_{\beta\alpha*} = \bar{g}_{\alpha\beta*}),$$

soddisfacente alla condizione di Kähler:

$$(2) \quad d(i g_{\alpha\beta*} dz^\alpha \wedge dz^{\beta*}) = 0.$$

È noto <sup>(5)</sup> che la (2) equivale al fatto che gli unici simboli di Christoffel non necessariamente nulli sono del tipo  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \Gamma_{\beta*\gamma*}^{\alpha*}$ , e che quindi le corrispondenti forme differenziali di connessione risultano:

$$(3) \quad \omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha dz^\gamma, \quad \omega_{\beta*}^{\alpha*} = \Gamma_{\beta*\gamma*}^{\alpha*} dz^{\gamma*}, \quad \omega_{\beta*}^\alpha = \omega_\beta^{\alpha*} = 0.$$

Osserviamo anche che, come risulta subito dalla (1), le uniche componenti contravarianti non necessariamente nulle del tensore metrico sono del tipo:  $g^{\alpha\beta*}$ .

Ciò premesso, consideriamo un vettore  $x$  tangente in un punto  $P$  di  $V_{2n}$ . Ne indicheremo con  $x^\alpha, x^{\alpha*}$  le componenti contravarianti, o anche semplicemente con  $x^i$ , intendendo che gli indici latini possano assumere i  $2n$  valori  $1, \dots, n, 1^*, \dots, n^*$ . Sia  $p$  il bivettore definito dell'areola circondata da un circuito infinitesimo uscente da  $P$ . Le componenti contravarianti del bivettore possono esprimersi col prodotto esterno:  $p^{hk} = dz^h \wedge dz^k$ . La rota-

(3) Cfr. per esempio E. CARTAN, *Géométrie des espaces de Riemann*, 2ª ed., cap. VII.

(4) L'argomento qui trattato ha trovato posto in un seminario da me tenuto a Varenna nel settembre 1956 per il Centro Internazionale Matematico Estivo, e che apparirà prossimamente (in edizione ciclostilata presso l'Istituto Matematico dell'Università di Roma) nel ciclo dedicato alla *Teoria delle funzioni di più variabili complesse*.

(5) Cfr. per esempio il mio lavoro cit. al n. 1, al quale ci riferiamo anche per la terminologia e i simboli qui usati.

zione che subisce il vettore  $x$  per trasporto parallelo lungo il circuito, è data allora dagli incrementi infinitesimi <sup>(6)</sup>:

$$(4) \quad \nabla x^j = -\Omega_i^j x^i,$$

dove  $\Omega_i^j$  è la 2-forma differenziale tensoriale:

$$(5) \quad \Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^l \wedge \omega_l^j = \frac{1}{2} R_{i \quad hk}^j p^{hk},$$

ed  $R_{i \quad hk}^j$  è il tensore di Riemann.

Tenuto conto delle (3), per le componenti dei vari tipi della 2-forma tensoriale si ha:

$$(5') \quad \Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \quad \Omega_{\alpha^*}^{\beta^*} = d\omega_{\alpha^*}^{\beta^*} - \omega_{\alpha^*}^{\gamma^*} \wedge \omega_{\gamma^*}^{\beta^*}, \quad \Omega_\alpha^{\beta^*} = \Omega_{\alpha^*}^\beta = 0;$$

e conseguentemente per le componenti del tensore di Riemann, che non occorre scriviamo in modo esplicito.

Supponiamo in particolare che il circuito infinitesimo appartenga ad una faccetta caratteristica ed il suo verso dia l'orientazione positiva intrinseca della faccetta. In tal caso il bivettore corrispondente è un *bivettore caratteristico* che indicheremo con  $q$ , e le cui componenti possono esprimersi nel modo seguente <sup>(7)</sup>. Sia  $u, v$  una coppia di *vettori coniugati* unitari sulla faccetta caratteristica (cioè i vettori unitari  $u, v$  siano ortogonali e definiscano l'orientazione positiva della faccetta). Si ha allora:

$$(6) \quad v^\alpha = i u^\alpha, \quad v^{\alpha^*} = -i u^{\alpha^*};$$

$$(7) \quad q = \sigma u \wedge v: \quad q^{\alpha\beta^*} = -q^{\beta^*\alpha} = -2i\sigma u^\alpha u^{\beta^*}, \quad q^{\alpha\beta} = q^{\alpha^*\beta^*} = 0,$$

essendo  $\sigma$  la misura del bivettore, cioè la misura dell'areola racchiusa dal circuito infinitesimo.

Nel caso considerato le (4) possono scriversi:

$$(8) \quad \nabla x^\beta = -\Omega_\alpha^\beta x^\alpha, \quad \nabla x^{\beta^*} = -\Omega_{\alpha^*}^{\beta^*} x^{\alpha^*},$$

essendo:

$$(9) \quad \Omega_\alpha^\beta = \frac{1}{2} (R_{\alpha \lambda \mu^*}^\beta q^{\lambda \mu^*} + R_{\alpha \lambda^* \mu}^\beta q^{\lambda^* \mu}) = R_{\alpha \lambda \mu^*}^\beta q^{\lambda \mu^*}, \quad \Omega_{\alpha^*}^{\beta^*} = R_{\alpha^* \lambda \mu^*}^{\beta^*} q^{\lambda \mu^*}.$$

3. Ricordiamo ora che condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia isotropia caratteristica in un punto  $P$  di  $V_{2n}$ , è che ivi risulti:

$$(10) \quad R_{\alpha\beta^* \lambda\mu^*} = \frac{K}{2} (g_{\alpha\beta^*} g_{\lambda\mu^*} + g_{\alpha\mu^*} g_{\lambda\beta^*}),$$

essendo  $K$  il comune valore della curvatura per le faccette caratteristiche uscenti da  $P$  <sup>(8)</sup>.

(6) Gfr. per esempio l'opera di E. CARTAN sopra citata.

(7) Gfr. il mio lavoro cit. al n. 1.

(8) Gfr. per esempio l'opera di YANO-BOCHNER sopra cit., p. 128.

Per rispondere alla domanda posta al n. 1, supposta valida la (10), valutiamo le componenti covarianti del bivettore che rappresenta la rotazione della stella di vettori in  $P$  in conseguenza del trasporto lungo un circuito infinitesimo corrispondente al bivettore caratteristico (7). Tenuto conto delle (9) e limitandosi a scrivere le componenti non necessariamente nulle, si ha:

$$(11) \quad \begin{cases} -\Omega_{\alpha\beta^*} = -g_{\gamma\beta^*} \Omega_{\alpha}^{\gamma} = -R_{\alpha\beta^* \lambda\mu^*} q^{\lambda\mu^*} = -\frac{K}{2} (g_{\alpha\beta^*} g_{\lambda\mu^*} + g_{\alpha\mu^*} g_{\lambda\beta^*}) q^{\lambda\mu^*} \\ -\Omega_{\alpha^* \beta} = \Omega_{\beta\alpha^*}. \end{cases}$$

D'altronde, avuto riguardo alle (7) e al fatto che il vettore  $u$  si è assunto unitario, viene:

$$g_{\alpha\beta^*} g_{\lambda\mu^*} q^{\lambda\mu^*} = -2 i \sigma g_{\alpha\beta^*} g_{\lambda\mu^*} u^{\lambda} u^{\mu^*} = -i \sigma g_{\alpha\beta^*} (\text{mis } u)^2 = -i \sigma g_{\alpha\beta^*};$$

si ha inoltre:

$$g_{\alpha\mu^*} g_{\lambda\beta^*} q^{\lambda\mu^*} = q_{\beta^* \alpha} = -q_{\alpha\beta^*}.$$

Ne segue che le (11) possono anche scriversi:

$$-\Omega_{\alpha\beta^*} = \Omega_{\beta^* \alpha} = i \frac{K}{2} \sigma g_{\alpha\beta^*} + \frac{K}{2} q_{\alpha\beta^*};$$

donde appare che la rotazione considerata si decompone nelle due rotazioni definite dai bivettori:

$$(12) \quad -\Omega'_{\alpha\beta^*} = \Omega'_{\beta^* \alpha} = i \frac{K}{2} \sigma g_{\alpha\beta^*}, \quad -\Omega'_{\alpha\beta} = -\Omega'_{\alpha^* \beta^*} = 0,$$

$$(13) \quad -\Omega''_{\alpha\beta^*} = \Omega''_{\beta^* \alpha} = \frac{K}{2} q_{\alpha\beta^*}, \quad -\Omega''_{\alpha\beta} = -\Omega''_{\alpha^* \beta^*} = 0.$$

4. Per esaminare la prima rotazione, definita dalle (12), consideriamo il corrispondente incremento  $\nabla' x^i$  di un arbitrario vettore  $x^i$ . Risulta, analogamente alle (8),

$$\nabla' x^{\beta} = -\Omega_{\alpha}^{\beta} x^{\alpha} = -g^{\beta\gamma^*} \Omega_{\alpha\gamma^*} x^{\alpha} = i \frac{K}{2} \sigma g^{\beta\gamma^*} g_{\alpha\gamma^*} x^{\alpha} = i \frac{K}{2} \sigma x^{\beta}$$

$$\nabla' x^{\beta^*} = -\Omega_{\alpha^*}^{\beta^*} x^{\alpha^*} = -g^{\gamma\beta^*} \Omega_{\alpha^* \gamma} x^{\alpha^*} = -i \frac{K}{2} \sigma g^{\gamma\beta^*} g_{\gamma\alpha^*} x^{\alpha^*} = -i \frac{K}{2} \sigma x^{\beta^*}.$$

Se ora s'indica con  $y$  il vettore coniugato ad  $x$  e si tien conto che le componenti dei due vettori sono legate tra loro da relazioni analoghe alle (6), le precedenti possono anche scriversi:

$$(14) \quad \nabla' x^{\beta} = \frac{K}{2} \sigma y^{\beta}, \quad \nabla' x^{\beta^*} = \frac{K}{2} \sigma y^{\beta^*}.$$

Tenuto presente che il vettore  $y$  appartiene alla faccetta caratteristica individuata da  $x$ , è ad esso ortogonale e di ugual lunghezza, e che la coppia  $x, y$  dà l'orientazione positiva sulla faccetta, si conclude che le (14) rappresentano la rotazione della stella di centro  $P$  che si ottiene rotando ogni faccetta caratteristica su se stessa nel verso positivo della medesima

ampiezza  $(K/2)\sigma$ . Naturalmente il verso di rotazione cambia se si cambia il verso di percorrenza del fissato circuito infinitesimo.

Passiamo ad esaminare la seconda rotazione, definita dalle (13).

La forma stessa delle (13) ci dice, in base a note considerazioni, che la rotazione è parallela alla faccetta caratteristica cui appartiene il bivettore  $q$  ed ha ampiezza uguale a  $(K/2)$  mis  $q = (K/2)\sigma$ , nel verso positivo della faccetta. Si tratta insomma di una rotazione dello stesso tipo di quella che si presenta nel caso ordinario di isotropia per una varietà riemanniana, ma con ampiezza ridotta alla metà. Analoga osservazione a quella di cui sopra va fatta in relazione al cambiamento del verso sul circuito infinitesimo.

Riassumendo possiamo concludere con l'enunciato seguente:

*In un punto di isotropia caratteristica per una varietà kähleriana, la rotazione che subisce la stella di vettori in conseguenza del trasporto lungo un circuito infinitesimo appartenente ad una faccetta caratteristica, si scompone in una rotazione parallela alla faccetta di ampiezza  $(K/2)\sigma$  e in una rotazione, indipendente dalla faccetta considerata, che fa scorrere ogni faccetta caratteristica su se stessa di un uguale angolo anch'esso di ampiezza  $(K/2)\sigma$ , essendo  $K$  la curvatura comune delle faccette caratteristiche e  $\sigma$  la misura dell'areola circondata dal circuito infinitesimo.*

**Meccanica.** — *Sulla gittata massima di un missile.* Nota di GIULIANO TORALDO DI FRANCIA, presentata (\*) dal Socio A. SIGNORINI.

§ 1. — Consideriamo un missile puntiforme, che all'istante  $t = 0$  si trovi nel punto  $P_0$  e sia animato dalla velocità  $\mathbf{v}_0$ . Nell'intervallo  $0 \leq t \leq t_1$  il missile abbia una massa variabile  $m(t)$  e sia soggetto a una forza di propulsione  $\mathbf{F}(t)$  e alla forza di gravità. Per  $t > t_1$  la massa mantenga il valore costante  $m_1$  e la forza di propulsione sia identicamente nulla. In pratica ciò avverrà perché, a partire da un certo istante  $t_b \leq t_1$  il carburante sarà tutto bruciato, cesserà la forza di propulsione e la diminuzione della massa. Siano  $m(t)$  e  $F(t)$  funzioni generalmente continue, assegnate nel detto intervallo, mentre la direzione di  $\mathbf{F}(t)$ , che per semplicità supporremo si mantenga sempre in un piano parallelo a  $\mathbf{v}_0$  (traiettoria piana) possa essere orientata ad ogni istante secondo un programma qualsiasi.

Sotto queste condizioni e inoltre con le ipotesi che la terra sia piana, che l'accelerazione di gravità sia costante e che il missile non sia soggetto ad alcuna azione dal parte del mezzo, Fried e Richardson<sup>(1)</sup> hanno provato un elegante teorema: La gittata massima si ottiene dando alla forza propulsiva una direzione costante. Tale direzione, che, naturalmente dipende da  $m(t)$  e  $F(t)$ , risulta perpendicolare alla velocità d'impatto.

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) B. D. FRIED e J. M. RICHARDSON, *Optimum Rocket Trajectories*, « Journ. Appl. Phys. », 27, 955 (1956).

Lo scopo della presente Nota è dimostrare che questo teorema può essere esteso al caso in cui il mezzo offre una resistenza proporzionale alla velocità e parallela a quest'ultima. Naturalmente, con questo saremo ancora piuttosto lontani dalla realtà pratica, ma certo molto meno lontani che trascurando qualsiasi resistenza.

§ 2. — Prendiamo il piano della traiettoria per piano  $xy$ , con l'asse  $y$  verticale. L'accelerazione di gravità sia rappresentata da  $-g\mathbf{j}$  e la resistenza del mezzo  $-\alpha\mathbf{v}$ , essendo  $\mathbf{v}$  la velocità del missile e  $\alpha$  una costante positiva <sup>(2)</sup>.

L'equazione di moto di un punto di massa variabile è stata oggetto di numerosi lavori. Potremo limitarci a citare alcuni dei primi studi, dovuti a Levi Civita <sup>(3)</sup>, Fermi <sup>(4)</sup>, Graffi <sup>(5)</sup>.

Nel nostro caso l'equazione si scriverà

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}(t)}{m(t)} - \frac{\alpha}{m(t)} \mathbf{v} - g\mathbf{j}$$

dove  $\mathbf{F}(t)$  include la forza di reazione dovuta all'eiezione di masse di gas. Posto

$$(2) \quad h(t) = e^{-\alpha \int_0^t \frac{dt}{m(t)}}$$

si ottengono facilmente dalla (1) la velocità  $\mathbf{v}_1$  e la posizione  $\mathbf{P}_1$  all'istante  $t_1$

$$(3) \quad \mathbf{v}_1 = h(t_1) \int_0^{t_1} \left[ \frac{\mathbf{F}(t)}{m(t)} - g\mathbf{j} \right] h^{-1}(t) dt + h(t_1) \mathbf{v}_0$$

$$(4) \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \int_0^{t_1} h(\xi) d\xi \int_0^\xi \left[ \frac{\mathbf{F}(t)}{m(t)} - g\mathbf{j} \right] h^{-1}(t) dt + \mathbf{v}_0 \int_0^{t_1} h(t) dt.$$

Posto

$$(5) \quad H(t) = \int_0^t h(t) dt$$

la (4) può anche scriversi, con un'integrazione per parti

$$(6) \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \int_0^{t_1} [H(t_1) - H(t)] \left[ \frac{\mathbf{F}(t)}{m(t)} - g\mathbf{j} \right] h^{-1}(t) dt + \mathbf{v}_0 H(t_1).$$

(2) Come è noto, per avvicinarsi abbastanza alla realtà bisognerebbe prendere una resistenza della forma  $-\beta v\mathbf{v}$ . Nel nostro caso si potrà porre in via di approssimazione  $\alpha = \beta \bar{v}$ , essendo  $\bar{v}$  il valore medio della velocità durante la traiettoria.

(3) T. LEVI CIVITA, *Sul moto di un corpo di massa variabile*, « Rend. Acc. Naz. Linc. », 8, 329 (1929); 8, 621 (1929); *Ancora sul moto di un corpo di massa variabile*, ibid., 11, 626 (1930).

(4) E. FERMI, *Sul moto di un corpo di massa variabile*, « Rend. Acc. Naz. Linc. », 9, 984 (1929).

(5) D. GRAFFI, *Un'osservazione sull'equazione di moto di un corpo di massa variabile*, « Rend. Acc. Naz. Linc. », 12, 575 (1930).

Al di là della posizione  $P_i$  prosegue il moto senza propulsione e con massa costante  $m_i$  fino all'istante dell'impatto, che indicheremo con  $t_i + \tau$ . Posto  $m_i/\alpha = T$ , si trova facilmente per mezzo della (1) che la velocità  $\mathbf{v}_i$  e il punto  $P_i$  dell'impatto sono dati da

$$(7) \quad \mathbf{v}_i = -gT\mathbf{j} + (gT\mathbf{j} + \mathbf{v}_i)e^{-\tau/T}$$

$$(8) \quad P_i = P_i + gT^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_i T - gT\tau\mathbf{j} - (gT^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_i T)e^{-\tau/T}.$$

Se vogliamo che l'altezza  $y_i$  di  $P_i$  sia nulla, avremo per la (8)

$$(9) \quad y_i + gT^2 + v_{iy}T - gT\tau - (gT^2 + v_{iy}T)e^{-\tau/T} = 0.$$

Questa equazione definisce  $\tau$  come funzione implicita dell'altezza  $y_i$  di  $P_i$  e della componente  $v_{iy}$  della velocità in  $P_i$ .

Sempre dalla (8) si deduce la gittata  $G$  (a meno di una costante che dipende dall'origine)

$$(10) \quad G = x_i + v_{ix}T - v_{ix}Te^{-\tau/T}.$$

Sostituendo in questa l'espressione di  $\tau$  tratta dalla (9), si otterrebbe  $G$  come funzione di  $P_i$  e  $\mathbf{v}_i$ .

§ 3. - Sia  $\psi(t)$  l'angolo di elevazione del vettore  $\mathbf{F}(t)$ , cioè poniamo

$$(11) \quad \mathbf{F}(t) = \mathbf{i}F(t)\cos\psi(t) + \mathbf{j}F(t)\sin\psi(t).$$

La gittata  $G$  sarà un funzionale di  $\psi(t)$ ; e che essa ammetta un massimo può tranquillamente postularsi per ragioni fisiche. Ammesso poi che  $G$  sia un funzionale derivabile, condizione necessaria affinché sia massimo è che si annulli la sua derivata funzionale rispetto a  $\psi(t)$ <sup>(6)</sup>. Poiché  $G$  dipende da  $\psi(t)$  attraverso a  $P_i$  e  $\mathbf{v}_i$ , si vede subito che sarà

$$(12) \quad \frac{\delta G}{\delta\psi(t)} = \frac{\delta P_i}{\delta\psi(t)} \cdot \text{grad}_{P_i} G + \frac{\delta \mathbf{v}_i}{\delta\psi(t)} \cdot \text{grad}_{\mathbf{v}_i} G$$

con notazione evidente.

Ora, sostituendo la (11) nelle (3), (6), si vede che  $\mathbf{v}_i$  e  $P_i$  sono semplicemente espressi da integrali contenenti  $\psi(t)$  nell'integrando, così che le loro derivate funzionali si riducono alle ordinarie derivate variazionali (Volterra, loc. cit., p. 30). Si ottiene subito

$$(13) \quad \frac{\delta \mathbf{v}_i}{\delta\psi(t)} = \frac{h(t_i)}{h(t)} \frac{F(t)}{m(t)} [-\mathbf{i}\sin\psi(t) + \mathbf{j}\cos\psi(t)] = \frac{h(t_i)}{h(t)} \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}(t)}{m(t)}$$

essendo  $\mathbf{k}$  un versore perpendicolare al piano della traiettoria.

Similmente si trova

$$(14) \quad \frac{\delta P_i}{\delta\psi(t)} = \frac{H(t_i) - H(t)}{h(t)} \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}(t)}{m(t)}.$$

Dalla (10) si ricava poi

$$(15) \quad \text{grad}_{P_i} G = \mathbf{i} + \mathbf{j}v_{ix}e^{-\tau/T} \frac{\partial \tau}{\partial y_i}$$

$$(16) \quad \text{grad}_{\mathbf{v}_i} G = \mathbf{i}T(1 - e^{-\tau/T}) + \mathbf{j}v_{ix}e^{-\tau/T} \frac{\partial \tau}{\partial v_{iy}}.$$

(6) Vedi: V. VOLTERRA, *Theory of Functionals* (Londra 1930), p. 28.

D'altra parte, si ha dalla (9)

$$(17) \quad \frac{\partial \tau}{\partial v_{1y}} = T (1 - e^{-\tau/T}) \frac{\partial \tau}{\partial y_1}.$$

Sostituendo questa nella (16), quindi sostituendo le (13), (14), (15), (16), nella (12) ed eguagliando a zero la derivata funzionale di  $G$ , si ottiene

$$(18) \quad \frac{H(t_1) - H(t) + h(t_1) T (1 - e^{-\tau/T})}{h(t) m(t)} \mathbf{h} \wedge \mathbf{F}(t) \cdot \left( \mathbf{i} + \mathbf{j} v_{1x} e^{-\tau/T} \frac{\partial \tau}{\partial y_1} \right) = 0.$$

Il numeratore della prima frazione non può mai essere nullo, come si vede tenendo conto delle (3), (5). Si deduce allora che  $\mathbf{F}(t)$ , quando non è nulla, deve essere parallela al vettore nell'ultima parentesi. Ma questo vettore non dipende da  $t$  e pertanto la direzione di  $\mathbf{F}(t)$  è fissa. Il teorema è così dimostrato.

§ 4. — Per il calcolo della  $\psi$  costante che dà la gittata massima si deve procedere nel modo seguente. Dalla (18), per quanto detto testé, si ha

$$(19) \quad \tan \psi = v_{1x} e^{-\tau/T} \frac{\partial \tau}{\partial y_1}$$

e, sostituendo la (11) nelle (3), (6), si ottiene

$$(20) \quad v_{1x} = h(t_1) \cos \psi \int_0^{t_1} \frac{F(t)}{m(t)} h^{-1}(t) dt + h(t_1) v_{0x}$$

$$(21) \quad v_{1y} = h(t_1) \sin \psi \int_0^{t_1} \frac{F(t)}{m(t)} h^{-1}(t) dt - gh(t_1) \int_0^{t_1} h^{-1}(t) dt + h(t_1) v_{0y}$$

$$(22) \quad y_1 = y_0 + \sin \psi \int_0^{t_1} [H(t_1) - H(t)] \frac{F(t)}{m(t)} h^{-1}(t) dt - \\ - g \int_0^{t_1} [H(t_1) - H(t)] h^{-1}(t) dt + H(t_1) v_{0y}.$$

Gli integrali sono tutti quantità note. Bisogna allora risolvere la (9) rispetto a  $\tau$  e sostituirne l'espressione nella (19). Con questo, le (19), (20), (21), (22) costituiscono un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $\psi$ ,  $v_{1x}$ ,  $v_{1y}$ ,  $y_1$ , che, risolto, fornisce il valore di  $\psi$ .

Osserviamo che dalla (9) si ha

$$(23) \quad \frac{\partial \tau}{\partial y_1} = \frac{1}{gT - (gT + v_{1y}) e^{-\tau/T}}$$

per cui sostituendo nella (19) e confrontando con la (7), si ottiene  $\tan \psi = -v_{1x}/v_{1y}$ . Questo significa che la forza di propulsione è perpendicolare alla velocità d'impatto, come era stato enunciato.

**Meccanica.** — *Movimento di particelle nel campo unitario einsteiniano.* Nota di EMILIO CLAUSER, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

Nella teoria gravitazionale einsteiniana la legge di movimento di una particella era dedotta inizialmente da un postulato: il postulato della geometica spazio-temporale.

Successivamente si affacciò la possibilità di dedurre questa legge dalle equazioni di campo, le quali non sono lineari <sup>(1)</sup>. Con tale procedimento, le particelle, nel metodo istituito da Einstein, Infeld ed Hoffmann, costituiscono delle singolarità del campo <sup>(2)</sup>.

P. G. Bergmann, Goldberg, ed altri autori, hanno mostrato che è possibile dedurre equazioni di movimento da equazioni non lineari di un generico campo, le quali tuttavia provengano da un principio variazionale, libero ed invariante rispetto a trasformazioni che formano gruppo e che sono individuate da funzioni arbitrarie. Ciò avviene grazie al fatto che le equazioni di campo di queste teorie possiedono identità analoghe alle identità contratte di Bianchi <sup>(3)</sup>. Le equazioni di movimento che gli autori precedenti hanno così ottenuto, hanno la stessa forma integrale di quelle ottenute da Einstein ed Infeld <sup>(4)</sup>.

In questa Nota deduco le equazioni di movimento di un sistema di particelle dalle equazioni della teoria unitaria einsteiniana formulata nel 1953, nell'ipotesi che ogni particella sia individuata da una singolarità del campo. A tal fine mi avvalgo dei risultati contenuti in lavori citati in precedenza <sup>(5)</sup>, modificandone però i calcoli, perché quei lavori presuppongono equazioni di campo che provengono da un principio variazionale libero e non condizionato come quello della teoria unitaria einsteiniana <sup>(5)</sup>.

La formula integrale che così ottengo è rigorosa, ed essa mi permetterà in una Nota successiva di precisare l'influenza del campo elettromagnetico sul movimento di una particella o di un sistema di particelle.

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) A. EINSTEIN e J. GROMMER, «Sitz. Preuss. Akad. Wiss.», I (1927); K. LANZOS, «Zeits. für Physik», 44, 773 (1927); altri lavori sono citati nell'articolo di INFELD e SCHILD, «Revs. Modern Physics», 21, 408 (1949).

(2) «Ann. Math.», 39, 66 (1938).

(3) P. G. BERGMANN, «Phys. Rev.», 95, 680 (1949); P. G. BERGMANN e R. SCHILLER, «Phys. Rev.», 89, 4 (1953); J. GOLDBERG, ibidem, 263.

(4) A. EINSTEIN e L. INFELD, «Can. Journal Math.», I, 209 (1949). Altri lavori si trovano citati in un articolo riassuntivo di A. SCHEIDEGGER, «Revs. Modern Physics», 25, 451 (1953).

(5) Che il principio variazionale della teoria unitaria è condizionato, era già stato rilevato da B. FINZI in questi «Rendiconti», vol. XIV (1953).

I. LE EQUAZIONI DEL CAMPO UNITARIO E LE IDENTITÀ DI BIANCHI-EINSTEIN. — Le equazioni di campo della teoria unitaria di Einstein nella più recente formulazione del 1953 sono le seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad R_{\alpha\beta} = 0, \\ (2) \quad R_{\alpha\beta,\gamma} + R_{\beta\gamma,\alpha} + R_{\gamma\alpha,\beta} = 0, \\ (3) \quad \Gamma_{\alpha} \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} = 0, \\ (4) \quad g^{\alpha\beta}_{;\nu} \equiv g^{\alpha\beta}_{,\nu} + g^{\alpha\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} + g^{\sigma\beta} \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} - g^{\alpha\beta} \Gamma_{\nu\sigma}^{\sigma} = 0, \end{array} \right.$$

dove, come in seguito, gli indici greci assumono i valori 0, 1, 2, 3, gli indici latini assumeranno invece i valori 1, 2, 3,  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$  è il coefficiente di connessione,

$$(5) \quad R_{\alpha\beta} \equiv \Gamma_{\alpha\beta,\nu}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\sigma,\beta}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\nu} \Gamma_{\nu\beta}^{\sigma}$$

è il tensore contratto di curvatura, mentre, indicando con  $g$  il determinante formato con le componenti covarianti  $g_{\alpha\beta}$  del tensore fondamentale,

$$g^{\alpha\beta} \equiv + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}$$

è la generica componente controvariante della densità tensoriale fondamentale.

Grazie all'equazione

$$g^{\alpha\sigma}_{;\nu} - g^{\alpha\sigma} \Gamma_{\nu}^{\sigma} = 0,$$

che segue dalla (4), dalla (3) discende infine l'equazione

$$(3'') \quad g^{\alpha\sigma}_{;\nu} = 0,$$

ad essa sostanzialmente equivalente <sup>(6)</sup>.

È importante ricordare che le equazioni di campo non sono linearmente indipendenti perché fra esse sussistono quattro identità:

$$(6) \quad 2(R_{\alpha\gamma} g^{\alpha\beta})_{,\beta} - R_{\alpha\beta,\gamma} g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}_{;\nu} (R_{\alpha\beta,\gamma} + R_{\beta\gamma,\alpha} + R_{\gamma\alpha,\beta}) \equiv 0 \quad (7);$$

le precedenti possono dirsi identità contratte di Bianchi-Einstein, poiché generalizzano le quattro ben note identità contratte di Bianchi che legano le equazioni gravitazionali ed adempiono essenzialmente allo stesso ufficio: quello di garantire che il sistema di equazioni (1) e (2) lascia libera la scelta del riferimento spazio-temporale.

(6) A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, App. II, 4<sup>a</sup> ed., Princeton (1953), trad. it. Einaudi editore. Ivi e nel seguito sono adottate le notazioni del loco sopracitato: il punto e virgola indica derivazione tensoriale, la virgola derivazione parziale ordinaria rispetto alle coordinate, le lettere gotiche indicano densità e pseudodensità; si tralascia infine, anche nelle formule non tensoriali, il simbolo di sommatoria relativo ad indici uguali in basso ed in alto.

(7) Cfr. loco citato in (6) od anche A. Einstein, « Can. Journal Math. », II, 120 (1950).

2. LE IDENTITÀ DI CONSERVAZIONE NELLA TEORIA UNITARIA. - Le identità di Bianchi-Einstein (6) diventano più concise e si prestano ad una interpretazione espressiva se in esse si tien conto anche delle ulteriori equazioni di campo (3) e (4).

A tal fine, si noti che per la (3') risulta:

$$g^{\alpha\beta} R_{\gamma\alpha,\beta} \equiv g^{\beta\alpha} R_{\gamma\beta,\alpha} \equiv g^{\alpha\beta} R_{\beta\gamma,\alpha} \equiv (g^{\alpha\beta} R_{\beta\gamma})_{,\alpha}.$$

La (6) diventa così:

$$(7) \quad g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} R_{\alpha\beta} + 2(R_{\mu\gamma} g^{\mu\beta} + R_{\mu\gamma} g^{\mu\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\gamma}^{\beta} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu})_{,\beta} \equiv 0.$$

Poniamo ora, seguendo Kurşunoğlu (8), :

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_{\alpha\beta}^{\nu} \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\nu} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma}, \\ \mathfrak{B}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\nu} \Gamma_{\nu\beta}^{\sigma}, \\ \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}. \end{cases}$$

Grazie alla (3), la (5) diviene allora:

$$(9) \quad R_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{B}_{\alpha\beta,\nu}^{\nu} + \mathfrak{B}_{\alpha\beta};$$

la (9) esprime il tensore contratto di curvatura come somma di una parte lineare nelle derivate parziali dei coefficienti di connessione rispetto alle coordinate dello spazio-tempo, ed in una parte quadratica nei coefficienti di connessione; infine  $\mathfrak{B}$  dipende soltanto da  $g^{\alpha\beta}$  e da  $g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}$ .

Tenendo conto della (4) nella definizione di  $\mathfrak{B}$  si ottiene:

$$(10) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial g^{\alpha\beta}} = -\mathfrak{B}_{\alpha\beta} \quad , \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\mu}} = \mathfrak{B}_{\alpha\beta}^{\mu}.$$

Grazie alle (10) ed alla (9), la (7) diventa così

$$(11) \quad \mathfrak{T}_{\gamma,\beta}^{\beta} \equiv 0$$

con

$$(12) \quad \mathfrak{T}_{\gamma}^{\beta} \equiv -2(R_{\mu\gamma} g^{\mu\beta} + R_{\mu\gamma} g^{\mu\beta}) + \delta_{\gamma}^{\beta} (\mathfrak{B} + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) - \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{\beta} g^{\mu\nu}{}_{,\gamma};$$

la (11), con la determinazione (12), è la preannunciata forma alla quale si riducono le identità contratte di Bianchi-Einstein (6): essa discende dalle equazioni di campo (3) e (4) e dalla sola struttura dei primi membri delle equazioni (1) e (2); per questa ultima circostanza la (11) può ben dirsi identità « forte » di conservazione; diremo invece « debole » l'identità che si ot-

(8) B. KURŞUNOĞLU, « Phys. Rev. », 88, 1369 (1952).

tiene dalla (11) tenendo conto anche delle rimanenti equazioni di campo (1) e (2); dunque l'identità debole di conservazione sussiste soltanto nelle regioni dello spazio-tempo dove sono soddisfatte tutte le equazioni di campo, mentre l'identità forte di conservazione sussiste dove sono soddisfatte le sole equazioni di campo (3) e (4). L'identità (11) con la determinazione (12), estende alla relatività unitaria un'identità di conservazione della relatività generale <sup>(9)</sup>, e si riduce a quest'ultima identità quando il tensore fondamentale è simmetrico.

L'ente individuato dalle sedici quantità  $\mathfrak{T}_\nu^\beta$  definite dalla (12) verifica l'identità (11); esso non è quindi una densità tensoriale, ma si comporta come una densità tensoriale solenoidale <sup>(10)</sup>; nella teoria della relatività generale le sedici quantità  $\mathfrak{T}_\nu^\beta$  individuano la distribuzione di energia esternamente alla materia, adempiendo allo stesso ufficio che ha in relatività generale il tensore energetico in seno alla materia, il quale notoriamente ha divergenza tensoriale nulla.

Le due circostanze precedenti suggeriscono di chiamare le  $\mathfrak{T}_\nu^\beta$  componenti della pseudodensità tensoriale energetica.

3. LE EQUAZIONI DI MOVIMENTO PER UN SISTEMA DI PARTICELLE. — L'identità di conservazione (11) afferma semplicemente che la pseudodensità tensoriale energetica definita dalla (12), è la divergenza ordinaria di certe quantità  $\mathfrak{H}_\nu^{\beta\nu}$ :

$$(13) \quad \mathfrak{T}_\nu^\beta \equiv \mathfrak{H}_{\nu, \nu}^{\beta\nu};$$

la (13) individua infatti tutti gli integrali dell'equazione

$$(14) \quad \mathfrak{T}_{\nu, \beta}^\beta = 0,$$

alla quale soddisfano le  $\mathfrak{T}_\nu^\beta$  in virtù dell'identità (11); grazie alla (13), le quantità  $\mathfrak{H}_\nu^{\beta\nu}$  costituiscono una pseudodensità tensoriale che, seguendo Bergmann, chiameremo superpotenziale <sup>(3)</sup>. L'esistenza del superpotenziale permette di dedurre dalle equazioni di campo della teoria unitaria einsteiniana le equazioni di movimento di una o più particelle, qualora si identifichi ogni particella con una singolarità di tipo prefissato, dello spazio-tempo.

A tal fine, diciamo  $\sigma$  una ordinaria superficie *bidimensionale*, chiusa e regolare, genericamente mobile, immersa nello spazio geometrico tridimen-

(9) A. EINSTEIN, «Ann. der Physik», 49, 769, par. 15 e sgg. (1916); cfr. pure «Sitz. Preuss. Akad. Wiss.», IIII, p. 3 (1916); una traduzione italiana di questi lavori trovasi nella parte terza di *Cinquant'anni di Relatività*, Firenze (1955).

(10) Le  $\mathfrak{T}_\nu^\beta$  si trasformano cioè come una densità tensoriale soltanto quando la trasformazione di coordinate è lineare. L'identità debole di conservazione nella teoria unitaria di può ottenere anche utilizzando in una particolare trasformazione infinitesima di coordinate, le proprietà di invarianza della densità scalare (hamiltoniana). (Cfr. A. EINSTEIN e B. KAUFMAN, «Ann. Math.», 62, 128 (1955)). Dalla trattazione del loco ivi citato si desume che invece è impossibile dedurre la (12) con il metodo precedente.

sionale, sezione dello spazio-tempo con l'ipersuperficie  $x^0 = \text{cost.}$ , diciamo  $\mathbf{n}$  il versore normale a  $\sigma$ , di verso prefissato ad arbitrio, e di coseni direttori  $n_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ). Diciamo  $t_V^\beta$  la pseudodensità tensoriale energetica (debole), ottenuta dalla (12) tenendovi conto delle equazioni di campo (1) e (2) ed osserviamo che la (13) si può anche scrivere così:

$$(13') \quad t_V^\beta + \mathbb{L}_V^{\vee\beta}{}_{,v} \equiv t_V^\beta - \mathfrak{T}_V^\beta.$$

Supponiamo che la superficie  $\sigma$  non passi per alcun punto di singolarità né di  $\mathbb{L}_V^{\vee\beta}{}_{,v}$ , né di  $t_V^s$ , né di  $(t_V^s - \mathfrak{T}_V^s)$ . Sarà:

$$(15) \quad \int_{\sigma} (\mathbb{L}_V^{\vee s}{}_{,v} + t_V^s) n_s d\sigma \equiv \int_{\sigma} (t_V^s - \mathfrak{T}_V^s) n_s d\sigma.$$

Ma in virtù delle ipotesi precedenti e grazie al teorema di Stokes, risulta:

$$\int_{\sigma} \mathbb{L}_V^{\vee s}{}_{,r} n_s d\sigma \equiv 0;$$

la (15) diviene così:

$$(16) \quad \int_{\sigma} (\mathbb{L}_V^{\vee s}{}_{,o} + t_V^s) n_s d\sigma \equiv \int_{\sigma} (t_V^s - \mathfrak{T}_V^s) n_s d\sigma.$$

La (16) è una identità forte che consegue dalle identità (13') e dalle ipotesi ammesse per  $\sigma$  e quindi discende unicamente dalle identità (11) e (12) nelle quali intervengono fra le equazioni di campo le sole equazioni (3) e (4).

Ma le equazioni di campo sono fra loro indipendenti e compatibili; pertanto i due pseudovettori integrandi della (16) contengono, almeno a priori, elementi disponibili, e questi elementi si possono determinare ulteriormente tenendo conto delle rimanenti equazioni di campo (1) e (2). Da queste equazioni, ricordando la definizione di  $t_V^{\vee}$ , segue la relazione:

$$(17) \quad \mathfrak{T}_V^s - t_V^s = 0.$$

La (17) è una identità debole tratta da tutte le equazioni di campo e costituisce nel contempo una equazione negli elementi disponibili precedentemente considerati.

Grazie alla equazione (17) l'identità (16) si muta nella seguente equazione:

$$(18) \quad \int_{\sigma} (\mathbb{L}_V^{\vee s}{}_{,o} + t_V^s) n_s d\sigma = 0.$$

L'equazione (18) è una conseguenza di tutte le equazioni del campo unitario; anzi essa vi discende non soltanto direttamente ma anche indiretta-

mente tramite le identità (6) di Bianchi-Einstein, poiché a queste identità si deve l'esistenza del superpotenziale.

È manifestamente importante riconoscere quando l'integrale a primo membro della (18) è nullo grazie a tutte le equazioni di campo, perché allora la (18) cessa di essere una equazione negli elementi disponibili e si riduce ad una identità debole. Ciò avviene quando la superficie  $\sigma$  non racchiude punti di singolarità dello pseudovettore integrando. Infatti in tal caso è

$$\mathbb{U}_{\gamma^s,rs}^s \equiv 0$$

non solo in ogni punto di  $\sigma$ , ma anche in ogni punto interno a  $\sigma$ ; per l'identità debole (17) si ha quindi, sopra ed entro  $\sigma$ :

$$(19) \quad (\mathbb{U}_{\gamma^s,o}^{os} + t_{\gamma^s}^s)_{,s} \equiv (\mathbb{U}_{\gamma^s,\sigma}^{os} + t_{\gamma^s}^s)_{,s} \equiv (t_{\gamma^s}^s - \mathfrak{T}_{\gamma^s}^s)_{,s} \stackrel{\text{debole}}{\equiv} 0.$$

Le ipotesi di regolarità attribuite a  $\sigma$  permettono così di applicare alla (18) il teorema della divergenza; grazie ad esso risulta, in virtù della (19),

$$(20) \quad \int_{\sigma} (\mathbb{U}_{\gamma^s,o}^{os} + t_{\gamma^s}^s) n_s d\sigma \equiv \int_{\tau} (\mathbb{U}_{\gamma^s,\sigma}^{os} + t_{\gamma^s}^s)_{,s} d\tau \stackrel{\text{debole}}{\equiv} 0,$$

avendo indicato con  $\tau$  la regione racchiusa dalla superficie  $\sigma$ , e ciò dimostra l'asserto.

Nell'ipotesi opposta a quella precedentemente ammessa, la superficie  $\sigma$  racchiude invece punti di singolarità dello pseudovettore integrando: allora la (19) sussiste ancora in ogni punto di  $\sigma$  ma non si può più applicare il teorema della divergenza al primo membro della (18); la (20) viene quindi meno e la (18) costituisce una equazione effettiva.

Rileviamo infine che il valore dell'integrale (18) è sempre indipendente dalla superficie d'integrazione; ciò avviene infatti anche quando tale integrale non è identicamente nullo perché la (19) afferma che è nulla la divergenza ordinaria dello pseudovettore integrando e sussiste in ogni punto di  $\sigma$ .

In definitiva, l'integrale a primo membro della (18) gode di tre proprietà: è genericamente diverso da zero quando la superficie  $\sigma$  racchiude punti di singolarità dello pseudovettore integrando, è nullo nel caso opposto, non dipende dalla superficie  $\sigma$ , che per ipotesi è chiusa e regolare e non passa per alcun punto di singolarità dello pseudovettore integrando. L'integrale a primo membro della (18) dipende quindi soltanto dalle singolarità racchiuse entro  $\sigma$  e dal loro movimento.

Per individuare il movimento di una particella, o più genericamente di un sistema di particelle, basta allora rinchiudere entro ciascuna superficie  $\sigma$  una singolarità che rappresenta la particella; la (18), una volta calcolato lo pseudovettore integrando, fornisce quattro equazioni per ciascuna particella, tre delle quali ne daranno il movimento, mentre la quarta è conseguenza di queste e darà il corrispondente teorema dell'energia relativo alla particella, poiché in ogni teoria relativistica l'equazione che traduce il teorema dell'energia compare sempre esplicitamente accanto alle equazioni di movimento.

4. DETERMINAZIONE DEL SUPERPOTENZIALE. - Tenendo conto nella (12) di tutte le equazioni di campo è possibile calcolare le componenti  $t_{\gamma}^{\beta}$  della pseudodensità tensoriale energetica debole. Resta dunque da calcolare il superpotenziale della pseudodensità tensoriale energetica forte individuata dalla (12).

A tal fine è possibile adattare il procedimento che ha seguito Bergmann al caso in esame, nel quale il principio variazionale dal quale discendono le equazioni di campo non è libero, ma è condizionato <sup>(11)</sup>.

Si perviene così alla seguente identità

$$(21) \quad \mathfrak{T}_{\gamma}^{\beta} \equiv \mathfrak{B}_{\gamma}^{\beta\nu}{}_{,\nu}$$

dove è

$$(22) \quad \mathfrak{B}_{\gamma}^{\beta\nu} \equiv \mathfrak{A}^{\nu} \delta_{\gamma}^{\beta} - \mathfrak{B}_{\alpha\gamma}^{\nu} g^{\alpha\beta} - \mathfrak{B}_{\gamma\alpha}^{\nu} g^{\beta\alpha}$$

con

$$(23) \quad \mathfrak{A}^{\nu} \equiv \mathfrak{B}_{\alpha\sigma}^{\nu} g^{\alpha\sigma} \equiv -(g^{\sigma\nu}{}_{,\sigma} + g^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma})$$

e con  $\mathfrak{B}_{\alpha\sigma}^{\nu}$  definito dalla prima delle (8). La seconda identità (23) discende dalla prima delle (8) e dalla (4) per la (3'). Del resto l'identità (21) si può verificare direttamente mediante le definizioni (12) e (22).

Per la (21), la (22) individua un particolare superpotenziale. È allora facile determinare il più generale superpotenziale che rappresenta la pseudodensità tensoriale energetica (12). Infatti si può ottenere quest'ultimo prima tenendo conto, mediante l'equazione (14), della sola forma dell'identità (11) e poi imponendo all'integrale generale della (14), che è espresso dalla (13), il sistema di equazioni

$$(13'') \quad \mathfrak{U}_{\gamma}^{\beta\nu}{}_{,\nu} = \mathfrak{T}_{\gamma}^{\beta}$$

nelle incognite  $\mathfrak{U}_{\gamma}^{\beta\nu}$ . L'integrale generale della (13'') è allora il più generale superpotenziale cercato. Ma l'integrale generale della (13'') è somma di un integrale particolare con l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. Ora un integrale particolare della (13'') è dato da

$$\mathfrak{B}_{\gamma}^{\beta\nu} + \mathfrak{M}_{\gamma}^{\beta\nu}$$

con

$$(24) \quad \mathfrak{M}_{\gamma}^{\beta\nu} \equiv \delta_{\gamma}^{\nu} g^{\beta\sigma}{}_{,\sigma} - g^{\beta\nu}{}_{,\gamma}$$

e con  $\mathfrak{B}_{\gamma}^{\beta\nu}$  definito dalla (22); la somma precedente gode infatti di due proprietà: è emisimmetrica rispetto ai due indici  $\beta$  e  $\nu$ , come è richiesto dalla (13''), perché dalla (24) e dalla (22) discende, per la (4):

$$\mathfrak{B}_{\gamma}^{\beta\nu} + \mathfrak{M}_{\gamma}^{\beta\nu} = -\frac{1}{2}(g^{\beta\nu}{}_{; \gamma} + g^{\nu\beta}{}_{; \gamma}) = 0;$$

(11) Loco secondo citato in (3).

$(\mathfrak{B}_\gamma^{\beta\nu} + \mathfrak{M}_\gamma^{\beta\nu})$  soddisfa poi all'equazione (13''), grazie alla (21) ed all'identità

$$\mathfrak{M}_\gamma^{\beta\nu},_{\nu} \equiv 0,$$

conseguenza immediata della definizione (24) di  $\mathfrak{M}_\gamma^{\beta\nu}$ .

L'integrale generale dell'equazione (13'') è allora il seguente:

$$(25) \quad \mathfrak{U}_\gamma^{\beta\nu} \equiv \mathfrak{B}_\gamma^{\beta\nu} + \mathfrak{M}_\gamma^{\beta\nu} + \mathfrak{C}_\gamma^{\beta\nu};$$

nella (25),  $\mathfrak{B}_\gamma^{\beta\nu}$  ed  $\mathfrak{M}_\gamma^{\beta\nu}$  sono definiti dalla (22) e dalla (24), mentre  $\mathfrak{C}_\gamma^{\beta\nu}$  è la più generale pseudodensità tensoriale solenoidale, integrale generale della equazione omogenea

$$\mathfrak{U}_\gamma^{\beta\nu},_{\nu} = 0,$$

associata all'equazione (13''). La (25) dà così il più generale superpotenziale della pseudodensità tensoriale energetica  $\mathfrak{T}_\gamma^\beta$  definita dalla (12).

Quando poi il tensore fondamentale è simmetrico, la (22) e la (24) danno:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_\gamma^{\beta\nu} = g_{\sigma\tau} \{ & \delta_\gamma^\sigma (g^{\sigma\beta} g^{\nu\tau} - g^{\sigma\nu} g^{\beta\tau}) + \delta_\gamma^\beta (g^{\sigma\nu} g^{\sigma\tau} - g^{\nu\tau} g^{\sigma\sigma}) + \\ & - \delta_\gamma^\nu (g^{\sigma\beta} g^{\sigma\tau} - g^{\sigma\sigma} g^{\beta\tau}) \}. \end{aligned}$$

La formula precedente individua il superpotenziale della relatività generale (a meno della pseudodensità tensoriale solenoidale), e coincide con quella ottenuta per altra via da Freud<sup>(12)</sup> a meno di un inessenziale fattore numerico.

5. OSSERVAZIONI FINALI. — È importante ricordare che i soli termini che recano contributo nella (18) e quindi nelle equazioni di movimento, sono quelli che diventano singolari internamente alla superficie d'integrazione. Nello pseudovettore integrando si può allora prescindere dalla pseudodensità tensoriale solenoidale arbitraria  $\mathfrak{C}_\gamma^{\beta\nu}$  ritenendola regolare, grazie alla circostanza che tutte le singolarità del campo compaiono già attraverso gli altri addendi dello pseudovettore integrando. In tal modo lo pseudovettore integrando, che va calcolato tenendo conto di tutte le equazioni di campo, non contiene elementi arbitrari e risulta completamente individuato. Esso dipende linearmente dalle componenti emisimmetriche del tensore contratto di curvatura attraverso la pseudodensità energetica debole  $t_\gamma^\nu$ , che si trae dalla (12) tenendo conto di tutte le equazioni di campo. Ciò giustifica una affermazione di Callaway<sup>(13)</sup>, in virtù della quale, nella teoria unitaria einsteiniana, le equazioni di movimento delle particelle vanno determinate for-

(12) P. FREUD, « *Ann. Math.* », 40, 417 (1939); H. ZATZKIS, « *Phys. Rev.* », 81, 1023 (1951); cfr. pure loco terzo citato in (3).

(13) J. CALLAWAY, « *Phys. Rev.* », 92, 1567 (1953).

mando integrali di superficie il cui pseudovettore integrando contiene combinazioni lineari della parte emisimmetrica  $R_{\alpha\beta}$  del tensore contratto di curvatura. A priori ingiustificata mi sembra invece la conclusione che Callaway ne trae e cioè che nelle equazioni di movimento non intervengono le  $R_{\alpha\beta}$  emisimmetriche, le quali s'annullano soltanto in assenza di campo elettromagnetico <sup>(14)</sup>.

**Scienza delle costruzioni.** — *Sulla ridistribuzione plastica dei momenti nelle travi iperstatiche* (\*). Nota di GIORGIO MACCHI, presentata (\*\*) dal Socio G. COLONNETTI.

L'opportunità di istituire calcoli a rottura per le strutture iperstatiche, in modo da conoscere il loro effettivo grado di sicurezza, ha indotto alcuni studiosi ad elaborare metodi di calcolo che postulano una illimitata adattabilità plastica delle strutture.

Tale teoria, che va sotto il nome di teoria delle cerniere plastiche, suppone che in  $n + 1$  sezioni di una struttura  $n$  volte iperstatica si raggiungano i momenti-limite corrispondenti, e che la rottura avvenga quindi per indeterminazione cinematica.

Ciò presuppone che in ciascuna delle cerniere plastiche si verifichi la rotazione sufficiente a consentire lo stabilirsi del diagramma di momenti di completo adattamento; che ciascuna di esse si comporti dunque come una vera « cerniera », capace di trasmettere il momento-limite.

Mentre da un lato alcune esperienze sembravano confermare queste assunzioni, recenti prove effettuate presso il Politecnico di Torino su alcune travi continue in cemento armato precompresso hanno mostrato come tali ipotesi possano, almeno in taluni casi, condurre a risultati sensibilmente lontani dalla realtà; sembra dunque che il fenomeno, ben più complesso, debba essere analizzato con uno studio delle condizioni di congruenza, interpretando i fenomeni plastici mediante la teoria delle coazioni, sulla quale si ritiene debbano fondarsi i metodi di calcolo a rottura.

(14) Callaway afferma infatti che, grazie all'equazione di campo (2), l'integrale esteso ad una superficie chiusa di una combinazione lineare delle  $R_{\alpha\beta}$  è nullo, in virtù del teorema di Stokes. Ma ciò sarebbe vero soltanto se esistessero superficie chiuse dello spazio-tempo quadridimensionale che isolano la linea oraria del moto di ogni particella, il che non avviene. Sarebbe pure vero, se l'irrotazionalità di  $R_{\alpha\beta}$  sussistesse non nello spazio-tempo, ma nello spazio geometrico, dove certamente esistono superficie chiuse mobili che isolano le particelle. L'affermazione di Callaway sussiste dunque soltanto per quelle particolarissime combinazioni lineari di  $R_{\alpha\beta}$  per cui l'irrotazionalità spazio-temporale affermata dalla (2) implica l'irrotazionalità puramente spaziale. Essa sussiste invece senza riserve nella formulazione 1950 della teoria unitaria, nella quale la (2) è sostituita dall'equazione  $R_{\alpha\beta} = 0$ . Del resto, ciò risulta immediatamente dalla (12).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Scienza delle Costruzioni del Politecnico di Torino.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

Secondo tale interpretazione del fenomeno, si è condotti a considerare lo stato di equilibrio elasto-plastico come la sovrapposizione dell'effetto elastico delle forze esterne e dell'effetto delle deformazioni plastiche agenti come distorsioni di Volterra.

Per questa via si sono ottenuti teoricamente risultati sufficientemente approssimati a quelli delle esperienze finora note.

Ma la più brillante conferma della nuova interpretazione teorica, più ancora che dal raffronto fra previsioni teoriche e dati sperimentali relativi ai singoli casi, risulta da un esame d'insieme delle esperienze disponibili nella bibliografia internazionale.

Appare infatti che nei casi in cui si è riscontrata una completa redistribuzione dei momenti la teoria consentiva di prevederla, mentre in altri casi, in cui la completa redistribuzione non è stata raggiunta, le condizioni sperimentali erano proprio quelle per cui la teoria delle coazioni indicava l'impossibilità di raggiungere l'indeterminazione cinematica.

Le esperienze a cui si allude sono, da un lato, due serie di prove effettuate in Francia e in Gran Bretagna, dall'altro le esperienze di Torino. Nelle prime si è praticamente sempre ottenuta l'indeterminazione cinematica, nelle seconde la redistribuzione dei momenti è stata solo parziale.

Le esperienze francesi ed inglesi erano effettuate su travi continue a 2 campate, con 2 carichi concentrati nelle mezzerie; quelle italiane su travi a 3 campate, con un solo carico concentrato nella mezzera centrale.

Benché i due gruppi di travi fossero provati in modo da dar luogo alla medesima forma del diagramma dei momenti, la loro differenza sostanziale risulta da un'analisi dei diversi effetti che le distorsioni plastiche hanno sulle une e sulle altre.

Indicata con  $E$  la sezione centrale, soggetta in campo elastico al massimo momento flettente, e con  $B$  e  $C$  le sezioni laterali soggette al massimo momento di segno contrario, l'effetto contemporaneo delle 3 distorsioni plastiche  $\bar{\alpha}_E$ ,  $\bar{\alpha}_B$ ,  $\bar{\alpha}_C$ , che si verificano in  $E$ ,  $B$ ,  $C$ , provoca una variazione  $\Delta M$  del momento flettente nella sezione più sollecitata  $E$ , che si può scrivere nella forma:

$$\Delta M = K (a\bar{\alpha}_E + b\bar{\alpha}_B + c\bar{\alpha}_C).$$

I coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , sono delle costanti dipendenti dal tipo di struttura,  $K$  una costante dipendente dalle caratteristiche geometriche ed elastiche della trave.

Poiché una distorsione  $\bar{\alpha}_E$  in  $E$  provoca un momento di redistribuzione favorevole nella sezione più sollecitata  $E$ , mentre le distorsioni  $\bar{\alpha}_B$  e  $\bar{\alpha}_C$  in  $B$  e  $C$  tendono ad aggravare il momento flettente in  $E$ , l'effetto plastico complessivo è ancora favorevole solo se, nell'espressione tra parentesi, il termine  $a\bar{\alpha}_E$  prevale su  $b\bar{\alpha}_B + c\bar{\alpha}_C$ .

Tale prevalenza non dipende solo dall'entità delle singole distorsioni  $\bar{\alpha}$ , ma altresì dai coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , che possono influire in modo determinante.

Se ne deduce che il verificarsi di notevoli deformazioni plastiche  $\bar{\alpha}_E$  nella sezione più sollecitata non è condizione sufficiente perché si verifichi un forte effetto di redistribuzione. L'influenza di  $\bar{\alpha}_E$  è infatti contrastata dalle distorsioni che hanno luogo nelle altre sezioni, in modo maggiore o minore a seconda dei valori dei coefficienti  $a, b, c$ , vale a dire a seconda del tipo di struttura.

Nel caso in questione, il confronto avviene tra travi continue simmetriche, a sezione costante, le une a 2 campate, le altre a tre campate. Per le travi a 2 campate è:

$$\Delta M = K_2 (\bar{\alpha}_E - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_B - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_C)$$

Per le travi a 3 campate è:

$$\Delta M = K_3 (-\bar{\alpha}_E + \bar{\alpha}_B + \bar{\alpha}_C).$$

Nelle prime, ( $a = 1, b = -1/2, c = -1/2$ ) l'effetto di una distorsione sull'appoggio centrale E è doppio dell'effetto di una uguale distorsione in una delle mezzerie B e C. È quindi sufficiente che la rotazione plastica  $\bar{\alpha}_E$  sull'appoggio sia di poco superiore a quella che si verifica in ciascuna mezzeria ( $\bar{\alpha}_B, \bar{\alpha}_C$ ) perché la prima prevalga e l'effetto complessivo sia un momento di redistribuzione favorevole.

Nelle travi a 3 campate, invece ( $a = -1, b = 1, c = 1$ ), l'effetto di una distorsione in mezzeria (E) è uguale e contrario all'effetto di una uguale distorsione su un appoggio (B o C). Perché la mezzeria prevalga e si abbia una redistribuzione favorevole, occorre che in mezzeria la rotazione plastica  $\bar{\alpha}_E$  superi il doppio della rotazione che si verifica su ciascun appoggio.

Poiché l'esperienza mostra che la deformabilità plastica delle sezioni in cemento armato e in cemento armato precompresso è relativamente limitata, in questo caso è logico che non si potesse raggiungere prima della rottura un notevole effetto di redistribuzione dei momenti.

Dalla discussione che precede emergono altresì due altre importanti considerazioni.

Anzitutto è messo in luce che dalle contrastanti azioni delle distorsioni può avere origine anche un momento di redistribuzione sfavorevole, che cioè aggrava la sezione più sollecitata; è facile trovare degli esempi in cui, per tale effetto, la rottura dovrebbe aver luogo per carichi inferiori a quelli calcolati supponendo una distribuzione elastica dei momenti.

In secondo luogo, appare probabile che una lieve redistribuzione dei momenti possa verificarsi prima della fessurazione, come è sembrato di constatare nelle esperienze. Infatti, per quanto l'entità delle deformazioni plastiche nella sezione più sollecitata sia modesta, prima della fessurazione, viene a mancare l'azione di contrasto delle altre sezioni, che ancora si comportano elasticamente; ne può risultare un sensibile effetto di ritardo della fessurazione.

**Astronomia** (Astrofisica). — *Sur la grandeur et la vie moyenne des spicules en projection sur le disque solaire*. Nota di CONSTANTIN MACRIS, presentata (\*) dal Corrisp. G. RIGHINI.

Parmi les phénomènes les plus remarquables de la chromosphère solaire au bord, se trouvent les protubérances et sur le disque des objets sombres avec une forme particulière qu'on a nommés « filaments ». Les minuscules filaments dont les dimensions sont comprises entre  $2''$ – $10''$  ont été appelés « spicules ». Roberts <sup>(1)</sup> les a étudiés sur le bord du disque solaire et plusieurs auteurs comme Woltjer <sup>(2)</sup> et Michard <sup>(3)</sup> d'après leurs études photométriques font ressortir leur importance et le rôle prépondérant qui jouent sur la formation de la chromosphère solaire. La vitesse des spicules a été déterminée (32 Km/sec selon Roberts et 20 Km/sec selon Dizer et Michard) ainsi que leur durée de vie (5 min. environ) et leur hauteur, qui rejoint une moyenne de  $10''$ . Toutes les données actuelles sur les spicules ont été rassemblées par Van de Hulst <sup>(4)</sup>.

Les travaux des auteurs ci-dessus se rapportent aux spicules au bord du soleil, qui sont bien visibles pendant ou en dehors des éclipses; mais ces minuscules filaments peuvent être observés en projection sur le disque solaire.

Sur les spectrohéliogrammes pris en  $H\alpha$  on peut discerner sur la chromosphère des formations sombres de dimensions de quelques secondes d'arc, dont la durée de vie est très courte.

Une détermination exacte des dimensions et de la durée de vie de ces formations serait très utile pour l'étude de la structure fine de la chromosphère solaire.

Nous avons entrepris une étude sur ce sujet en obtenant une série de spectrohéliogrammes en  $H\alpha$  avec la tour solaire de l'Observatoire de Arcetri. L'instrument donne une image solaire de 166 mm de diamètre; l'objectif a une ouverture de 30 cm, une distance focale de 18 m et la dispersion du réseau du spectrographe s'élève à 3,3 Å/mm.

Comme il est bien connu, le spectrohéliographe de Arcetri n'isole pas exactement le milieu de la raie  $H\alpha$ . C'est la raie  $H\alpha_{2,3}$  avec laquelle nous avons photographié la chromosphère solaire; ainsi nos observations se rapportent à la chromosphère à peu près moyenne.

On a photographié une petite partie du disque solaire et toujours la même, de 5 mm de largeur, plusieurs fois. Ainsi sur la même plaque se trouvent dans un intervalle de temps de 7 min–9 min de 10 à 14 images de cette partie du disque solaire. Chaque plaque porte un étalonnage photométrique.

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) « Ap. J. », 101, 136 (1945); « Astr. J. », U.S.A., 58, 226 (1953); « Austral. J. Phys. », 7, 230 (1954).

(2) « Bull. Astr. Inst. Netherl. », 12, 12 (1954).

(3) « O.G.B. », 74, 209, 1954, « Accad. Naz. dei Lincei », série VIII, vol. XIX, fasc. 5, 1955; « Ann. d'Astrophysique », 19<sup>e</sup> année N. 1<sup>o</sup>, 1, 56.

(4) The Sun, chap. V, 1953.

Pour l'étude de la vie moyenne de ces formations nous avons gardé les plaques de la meilleure qualité sur lesquelles nous avons trouvé de bonnes images consecutives. Après un examen attentif nous avons pu choisir quelques séries dont la qualité est satisfaisante.

Les petites formations sombres sont bien visibles et un même détail peut être suivi d'un cliché à l'autre. Les images choisies ont été reproduites avec un agrandissement 2 X sur papier photographique, avec un contraste encore augmenté.

Ainsi avons nous déterminé la durée de vie d'un nombre de ces formations, que nous pouvons identifier avec les spicules, de dimensions différentes sur les diverses régions du disque solaire. Toutes ces régions se trouvent en dehors des centres d'action.

Sur ces images nous avons trouvé des formations sombres de dimensions de 2''-12'' et dont nous avons déterminé la vie moyenne. Celle-ci est comprise entre 2-10 minutes.

Nous pensons que, sur ces images, nous avons observé la partie base des spicules et encore que ceux dont la vie dépasse les 15 minutes, ne sont pas réellement des spicules individuels mais des petites protubérances ou des masses composées de plusieurs éléments spiculaires.

D'après ces premières mesures il ressort aussi une relation entre la grandeur des spicules et la durée de leur vie.

Le matériel recueilli à la tour solaire est abondant et des recherches dont le but est de compléter les résultats ci-dessus sont en cours.

Qu'il me soit permis d'exprimer également ma gratitude à M. le Professeur G. Abetti, à M. le Professeur G. Righini, Directeur de l'Observatoire, à M. le M. C. Ballario, astronome, de leurs précieux conseils et des encouragements qu'ils m'ont prodigués au cours de cette étude. Je remercie aussi M. B. Romagnoli de son aide précieux.

**Astronomia.** — *Osservazioni fotografiche del pianeta Marte, eseguite in occasione della grande opposizione del settembre 1956 all'Osservatorio astronomico di Roma su Monte Mario.* Nota di GIUSEPPE CAPRIOLI e GIANCARLO GIALANELLA, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

1. Verso la metà di agosto del 1956, il Direttore dell'Osservatorio astronomico di Roma, prof. Giuseppe Armellini, incaricava lo scrivente, dott. Giuseppe Caprioli, assistente volontario nell'Osservatorio stesso, di eseguire osservazioni visuali, e specialmente fotografiche con vari filtri di luce, sul pianeta Marte, nel periodo della grande opposizione del settembre 1956, ponendo a sua disposizione il potente equatoriale Steinheil ed i necessari mezzi di cui è dotato l'Osservatorio di Monte Mario.

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

Il mio programma preliminare era, a grandi linee, di eseguire numerose fotografie, integrate da disegni ricavati da osservazioni visuali che mi permettessero di ottenere una carta areografica da confrontare con quelle già esistenti, allo scopo di mettere in rilievo eventuali mutamenti sulla superficie del pianeta.

Terminata una preliminare messa a punto dello strumento, lo scrivente ha avuto validissimo, indispensabile aiuto dal laureando in fisica Giancarlo Gialanella, figlio del compianto astronomo di Monte Mario prof. Lucio Gialanella da due anni prematuramente scomparso.

Il lavoro notturno, la sua preparazione e le operazioni in camera oscura per gli sviluppi, sono stati comuni, come pure la stesura della presente Nota.

Premettiamo alcuni richiami astronomici interessanti il fenomeno osservato, per illustrare quindi la tecnica strumentale ed il metodo da noi adoperato ed esporre poi i primi risultati conseguiti.

2. Come è noto, nella grande opposizione del settembre 1956 la minima distanza di Marte dalla Terra è stata di 56.500.000 Km, con un diametro apparente massimo del pianeta di  $24'',76$ .

Durante il periodo delle nostre osservazioni, che si estesero dal 30 agosto al 9 ottobre, il meridiano centrale di Marte (quello cioè che per un osservatore terrestre si proiettava sul centro del disco) alle ore 24 è passato dalla longitudine areografica  $34^\circ$  alla longitudine  $38^\circ$ , passando per  $360^\circ$ , in modo che il pianeta ha compiuto quasi un giro completo. Nello stesso periodo il fattore di fase è variato, passando per il suo massimo, da 0,99 a 0,96, mentre l'angolo formato dall'asse di rotazione di Marte con la linea di vista si è mantenuto intorno agli  $80^\circ$ , in modo che era rivolta verso la Terra la calotta polare australe del pianeta.

Gli Osservatori astronomici sono stati variamente favoriti per l'osservazione di Marte secondo la loro posizione geografica. In Italia, le condizioni migliori furono quelle dell'Osservatorio di Catania per il quale l'altezza massima del pianeta sull'orizzonte fu di circa  $42^\circ$ ; a Roma essa fu di  $38^\circ$ , a Milano di  $34^\circ$  circa. Notoriamente, essendo la declinazione di Marte negativa durante la passata opposizione, gli Osservatori più favoriti furono gli australi; per esempio all'Osservatorio di Bloemfontein nel Sud Africa, Marte raggiunse un'altezza sull'orizzonte di circa  $71^\circ$ . In conseguenza, se indichiamo con l'unità lo spessore di atmosfera ridotta attraversato dai raggi luminosi provenienti da Marte per giungere a Bloemfontein, essendo tale spessore proporzionale alla secante della distanza zenitale del pianeta, a Catania esso valeva 1,41; a Roma 1,53; a Milano 1,69 circa.

3. Dal Direttore dell'Osservatorio di Roma è stato messo a nostra disposizione il grande equatoriale Steinheil con obbiettivo di 39 cm. di diametro e m. 5,25 di distanza focale. A lato di esso è montato, come cannocchiale di guida, un rifrattore Merz che ha un obbiettivo con diametro di 22 cm. e distanza focale m. 4,33. Questo potente cannocchiale di guida, munito di micrometro filare e usato con ingrandimento lievemente maggiore di quello dato dallo strumento principale, ci è stato utilissimo per il puntamento del pia-

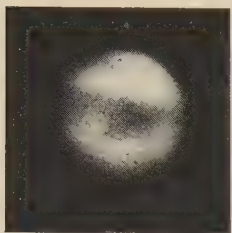
neta durante le pose fotografiche e ci ha anche permesso un grande risparmio di tempo e di materiale, consentendoci di ottenere fino a 18 pose per ogni lastra di formato  $6 \times 9$  cm.

L'immagine focale del pianeta aveva un diametro di 0,7 mm. mentre si aveva un potere risolutivo strumentale di  $10^{-2}$  mm. e di questo stesso ordine di grandezza era la grana delle emulsioni fotografiche, di sensibilità tale da permettere pose di durata non superiore ai 5 secondi. (Più avanti sarà illustrata l'opportunità di non prolungare oltre questo limite il tempo di posa).

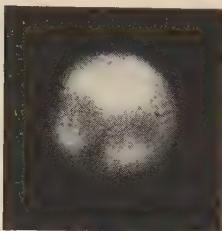
In queste condizioni un eventuale ingrandimento dell'immagine focale, e conseguentemente di tutto l'insieme dei cerchietti di diffrazione di diametro pari al potere risolutivo, avrebbe permesso l'uso di emulsioni a grana più grossa e quindi di sensibilità ancora maggiore, tale da compensare entro certi limiti l'aumento di esposizione, necessaria conseguenza dell'ingrandimento. In conseguenza, tenendo presenti le difficoltà di lavorare su una immagine delle dimensioni di mm. 0,7 (si pensi soltanto alle operazioni necessarie per trovare la giusta distanza focale con i vari filtri; e cioè al gran numero di pose da esaminare necessariamente al microscopio dopo sviluppo, fissaggio, lavaggio ed essiccamento), abbiamo stabilito di usare un modesto ingrandimento, portando la distanza focale effettiva dello strumento a circa 50 m. per ottenere così sopra la lastra una immagine di Marte di circa mezzo centimetro; ciò che ci dava il vantaggio di una messa a fuoco quasi immediata sul vetro smerigliato e la possibilità di esaminare più facilmente le negative e di ricavarne copie positive di dimensioni abbastanza grandi. Per ottenere questo ingrandimento ci siamo serviti di un oculare di circa 5 cm. di fuoco, posto subito dietro l'immagine focale data dall'obiettivo dello Steinheil. Il raccordo d'ottone, che lo portava, reggeva un tubo (anche esso in ottone) lungo circa 60 cm. annerito all'interno, al cui estremo era fissato l'otturatore ed il dispositivo per gli chassis delle lastre.

Prove sperimentali ci hanno mostrato che lastre «Ferrania fine-pancro»  $16^{\circ}/10$  Din. avrebbero richiesto pose di oltre 20 sec., mentre le lastre «Gevapan»  $33^{\circ}$  Sch. da noi usate, hanno permesso pose di 2 sec. anche con filtro rosso, ed inoltre presentavano il vantaggio di essere facilmente e rapidamente reperibili anche in grande quantità; le ultime fotografie di ottobre sono state eseguite con films «Gevapan»  $36^{\circ}$  Sch. e «Kodak Tri-X». Le due circostanze che consigliavano un breve tempo di posa erano la scintillazione atmosferica, sensibilissima per la grande distanza zenitale del pianeta, e le eventuali piccole irregolarità del movimento in ascensione dell'equatoriale. La prima, nel nostro caso, era ineliminabile data l'impossibilità con qualunque normale mezzo fotografico di eseguire pose minori di un decimo di secondo <sup>(1)</sup>, mentre l'effetto della seconda sarebbe stato eliminato da tempi di posa non superiori a cinque secondi.

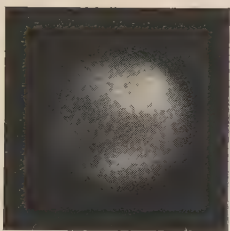
(1) La frequenza dei moti apparenti di scintillazione per le stelle o per il bordo dei pianeti e del sole varia da 0,5 a 0,03 sec. Cfr. *Compendium of Metereology*, «American Meter. Soc.», 1951 (p. 67).



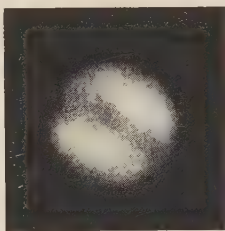
2 sett.  $1^h$  T. U.  $P=338^0,82$ , filtro giallo



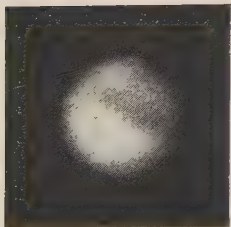
9 sett.  $1^h$  T. U.  $P=339^0,76$ , filtro giallo



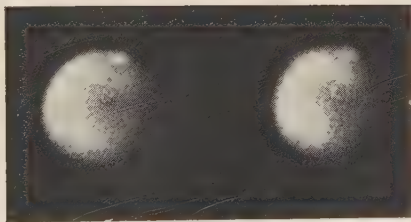
9 sett.  $1^h 15^m$  T. U.  $P=339^0,74$ , filtro giallo



18 sett.  $24^h$  T. U.  $P=341^0,20$ , filtro rosso



22 sett.  $23^h 30^m$  T. U.  $P=341^0,70$  filtro rosso



3 ott.  $23^h 15^m$  T. U.  $P=342^0,75$ , filtro rosso

Il pianeta appare come è visto al telescopio; P è l'angolo di posizione del suo asse di rotazione - orientato positivamente verso il nord del pianeta - contato dal nord della sfera celeste verso est, cioè nelle figure dal basso verso destra.



Completata la messa a punto dell'apparato e regolando l'ingrandimento dell'immagine focale fino ad ottenere sulla lastra un dischetto di 6 mm. di diametro, il tempo di posa era minore di un secondo quando usavamo il filtro giallo Kodak Wratten N° 15 con trasmissione da 5200 Å in poi, mantenendosi pur sempre inferiore a quattro secondi quando ci servivamo del filtro rosso N° 25 con trasmissione da 6000 Å in poi. L'altro estremo della banda di trasmissione era definito dalla sensibilità del materiale pancromatico, al di sotto dei 7000 Å. Il filtro era posto subito dietro l'oculare d'ingrandimento, in modo da evitare che suoi eventuali difetti venissero a fuoco sulla lastra insieme con l'immagine del pianeta.

4. Le nostre osservazioni furono iniziate il 30 agosto ed hanno avuto termine il 9 ottobre; generalmente cominciavamo il lavoro verso le ore 22 prolungandolo fin verso le ore una dopo mezzanotte, in modo da fotografare Marte quando era prossimo al meridiano e quindi alla maggiore altezza sull'orizzonte. Durante il periodo delle osservazioni le condizioni di visibilità non sono state mai ottime, giacché a causa della scintillazione di cui si è parlato, il bordo del pianeta appariva spesso frastagliato e tremolante. Per cinque giorni, a causa del cielo coperto, le osservazioni furono interrotte. Ancora sfavorevolmente sulle osservazioni, quasi per tutta la loro durata, hanno influito le cattive condizioni dell'atmosfera di Marte, notate anche <sup>(2)</sup> dal Kuiper in America. Infatti, mentre nella prima metà di agosto la superficie del pianeta aveva mostrato molti dettagli ben visibili, nel mese di settembre – benché Marte fosse allora più vicino alla Terra – apparivano sfumati ed evanescenti anche i contorni delle regioni oscure di maggiore estensione.

Per queste ragioni abbiamo limitato l'esecuzione dei disegni cui si era pensato, come ad un utile complemento delle fotografie. Infatti i due autori, in un'ora circa di osservazione ciascuno, non riuscivano a ricavare disegni nei quali comparissero particolari invisibili nelle fotografie. Tanto più che essi, onde eliminare qualsiasi suggestione, avevano evitato di consultare anticipatamente le carte areografiche già esistenti, giacché per il loro scopo era necessario registrare esclusivamente quanto era possibile vedere ad occhi non influenzati da quello che era stato visto da altri. Abbiamo quindi preferito riservare quasi tutto il tempo alle pose fotografiche, dato che l'immediato sviluppo delle prime lastre aveva mostrato, quasi in ogni fotografia, tutti i particolari che avevamo visto ad occhio, mentre un'opportuno trattamento del materiale impressionato ci avrebbe anzi permesso di ottenere un contrasto maggiore.

5. Durante il periodo di tempo indicato, abbiamo in tutto eseguito circa 1600 fotografie del pianeta, pressoché ugualmente ripartite fra i due filtri giallo e rosso da noi usati.

(2) Cfr. « Bureau Central des Télégr. Astr. » Circular n. 1563.

Nelle nostre negative, di cui pubblichiamo alcune stampe, sono chiaramente visibili la zona della *Syrtis Major* e del *Sinus Sabaeus* in quelle eseguite nella prima decade di settembre; la zona del *Mare Sirenum* e del *Mare Cimmerium* in quelle eseguite nella seconda decade dello stesso mese. La calotta polare australe è stata ben visibile dal 20 settembre in poi benché molto ridotta dall'avanzata primavera marziana, ed appare nelle nostre ultime fotografie, anche in quelle eseguite con filtro rosso.

I due autori desiderano ringraziare il Direttore dell'Osservatorio di Roma, prof. Giuseppe Armellini, per la fiducia con la quale ha loro affidato questo incarico, per i mezzi che ha messo a loro disposizione e specialmente per la sua personale, illuminata assistenza. Assieme a lui, per i suoi consigli, essi ringraziano il prof. Massimo Cimino, Direttore dell'Osservatorio di Napoli; il prof. Renato Cialdea e il prof. Ugo Ascoli dell'Istituto di Fisica di Roma per il loro aiuto nella preparazione ottica del lavoro e nella scelta dei materiali sensibili e degli sviluppi.

**Astronomia.** — *Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili ad eclisse.* Nota I di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Fra le diverse classi di stelle variabili, circa il 20 % appartiene alle variabili ad eclisse, in cui la variazione dell'intensità luminosa è dovuta alle periodiche occultazioni dell'astro  $S$  da parte di una stella satellite  $S_1$  e viceversa; intendendosi per satellite, l'astro che ha una minore luminosità superficiale. Per tal ragione, la curva di luce è intercalata da minimi, dei quali uno più profondo (o minimo principale) dovuto all'eclisse della stella principale  $S$  ed uno meno profondo (o minimo secondario), dovuto all'eclisse del satellite  $S_1$ .

A seconda che le eclissi siano parziali oppure totali od anulari, esistono schemi di calcolo <sup>(1)</sup> che, in genere, con l'aiuto di opportune tavole, permettono di determinare alcune caratteristiche orbitali e geometriche del sistema fotometrico. In generale si suppongono gli astri sferici e le orbite circolari; e qualora tali condizioni non fossero verificate, ci si riconduce a questo caso ideale con adatte correzioni alla curva di luce.

Le quantità da determinare sono:

a) I rapporti  $r/a$  ed  $r_1/a$  tra i raggi delle due stelle  $S$  ed  $S_1$  ed il raggio  $a$  dell'orbita circolare e quindi il rapporto  $k$  tra il raggio della stella minore (che può essere anche la più luminosa) e quello della stella maggiore.

b) L'inclinazione  $J$  del piano orbitale sul piano tangente alla sfera celeste e che, per il verificarsi delle eclissi, è sempre prossima a  $90^\circ$ .

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(1) Cfr H. N. RUSSELL-J. E. MERRILL, *The Determination of the Elements of Eclipsing Binaries*, in «Contributions from the Princeton University Observ.», N. 26.

c) Il rapporto  $\lambda = l_i/l$  tra la luminosità superficiale  $l_i$  del satellite  $S_i$  e quella dell'astro  $S$ ; ovviamente tanto  $k$  che  $\lambda$  saranno sempre minori o al più uguali all'unità. Come è noto,  $\lambda$  si determina immediatamente paragonando le perdite di luminosità ai due minimi, onde dobbiamo calcolare  $J$ ,  $r/a$  ed  $r_i/a$  da cui segue subito  $k$ .

A tale scopo, ho immaginato un nuovo metodo di calcolo (esposto nella presente Nota) partendo dalla curva di luce e ricavando da essa una seconda curva, che ci dà (in unità di misura opportunamente scelta, come dirò in seguito), la variazione dell'area occultata, durante le eclissi. La derivazione grafica di tale curva, permette il calcolo del termine noto e dei coefficienti in un sistema di equazioni algebriche, che risolto fornisce i valori delle incognite.

2. Conformemente al trattamento classico, ho scelto come origine dei tempi, l'istante medio  $T_0$  di un minimo principale, in cui il centro del satel-

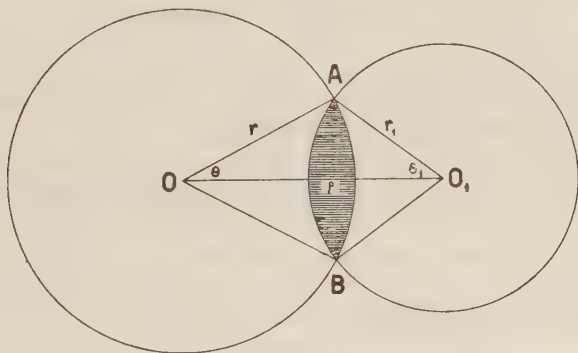


Fig. 1.

lite occuperà un certo punto  $C$  nella sua orbita. Ho chiamato con  $\varphi$  (od angolo di fase), l'angolo che il raggio vettore, congiungente il centro dell'astro principale con il centro satellite, forma con l'analogo raggio che unisce il centro dell'astro principale con  $C$ . Poiché l'orbita si suppone circolare, la velocità di rotazione è costante, onde in un istante qualsiasi si ha:

$$(1) \quad \varphi = \frac{2\pi}{P}(t - T_0) = n(t - T_0)$$

in cui  $P$  è il periodo, ed  $n$  la velocità angolare media. In tal caso, poiché l'orbita di  $S_i$  si proietta in un'ellisse avente per centro  $S_i$  si ha per la distanza apparente  $\rho$  tra i centri dei due astri:

$$(2) \quad \rho^2 = a^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 J).$$

Scegliamo come unità di misura il raggio  $a$  dell'orbita, e siano (fig. 1)  $O$  ed  $O_1$  i centri dei due cerchi proiezioni sulla sfera celeste dei globi dei due astri  $S$  ed  $S_i$  supposti sferici;  $A$  e  $B$  i punti in cui le circonferenze si

tagliano durante l'eclisse;  $\vartheta$  e  $\vartheta_1$  gli angoli compresi tra l'asse  $OO_1$  ed i raggi congiungenti i rispettivi centri  $O$  ed  $O_1$  con il punto  $A$ , e  $\rho$  la distanza  $OO_1$ . Allora l'area comune ai due cerchi (vale a dire l'area occultata  $s$ ) risultando eguale alla somma di due segmenti circolari sarà:

$$(3) \quad s = r^2 (\vartheta - \cos \vartheta \sin \vartheta) + r_1^2 (\vartheta_1 - \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1).$$

Derivando rispetto al tempo  $t$  avremo:

$$(4) \quad \frac{ds}{dt} = r^2 \left( \frac{d\vartheta}{dt} + \sin^2 \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} - \cos^2 \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right) + \\ + r_1^2 \left( \frac{d\vartheta_1}{dt} + \sin^2 \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} - \cos^2 \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} \right)$$

da cui, raccogliendo e ricordando note proprietà delle funzioni trigonometriche, otteniamo:

$$(5) \quad \frac{ds}{dt} = 2r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + 2r_1^2 \sin^2 \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt}.$$

3. Cerchiamo ora di esprimere i seni e le derivate degli angoli, per mezzo delle funzioni incognite da determinarsi.

A tale scopo, applicando il teorema del coseno al triangolo  $OA O_1$ , una volta al lato  $O_1 A$  ed una volta al lato  $OA$ , ottengo (cfr. fig. 1):

$$(6) \quad r_1^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta, \quad r^2 = r_1^2 + \rho^2 - 2r_1\rho \cos \vartheta_1,$$

da cui, differenziando ed ordinando, ho:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\cotg \vartheta}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \\ \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{1}{r_1 \sin \vartheta_1} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\cotg \vartheta_1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \end{cases}$$

Sostituendo le (7) nella (5) e riducendo, si ha allora:

$$(8) \quad \frac{ds}{dt} = 2 \left[ -r \sin \vartheta + \frac{r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\rho} - r_1 \sin \vartheta_1 + \frac{r_1^2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1}{\rho} \right] \frac{d\rho}{dt}.$$

Ma  $r_1 \sin \vartheta_1$  per il teorema dei seni è uguale a  $r \sin \vartheta$ , per cui la (8) diviene:

$$(9) \quad \frac{ds}{dt} = 2 \left[ -2r \sin \vartheta + \frac{r \sin \vartheta}{\rho} (r \cos \vartheta + r_1 \cos \vartheta_1) \right] \frac{d\rho}{dt}$$

e quindi, poiché si ha durante l'eclisse

$$(10) \quad r \cos \vartheta + r_1 \cos \vartheta_1 = \rho,$$

la (9) diviene

$$(11) \quad \frac{ds}{dt} = -2r \sin \vartheta \frac{d\rho}{dt}.$$

Cerco ora l'espressione di  $d\rho/dt$ .

Sostituendo nella (2)  $\cos^2 J$  con  $1 - \sin^2 J$  e ricordando che  $a$  è stata scelta come unità di lunghezza, abbiamo

$$(2^{\text{bis}}) \quad \rho^2 = 1 - \cos^2 \varphi \sin^2 J$$

da cui, derivando rispetto al tempo:

$$(12) \quad \rho \frac{d\rho}{dt} = \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 J \frac{d\varphi}{dt}$$

e cioè, essendo  $d\varphi/dt = n$ :

$$(13) \quad \rho \frac{d\rho}{dt} = \frac{n}{2} \sin 2\varphi \sin^2 J.$$

Sostituendo questa espressione di  $d\rho/dt$  nella (11), si ha:

$$(14) \quad \frac{ds}{dt} = -n \sin 2\varphi \left( \frac{r \sin \vartheta}{\rho} \right) \sin^2 J.$$

Ma, essendo  $\rho \sin \vartheta = r_1 \sin \hat{A} = r_1 \sin (\vartheta + \vartheta_1)$ , come in fig. 1, si ha:

$$(15) \quad \frac{r \sin \vartheta}{\rho} = \frac{r \rho \sin \vartheta}{\rho^2} = \frac{r r_1 \sin (\vartheta + \vartheta_1)}{\rho^2}.$$

Sostituendo questo valore nella (14), ottengo:

$$(16) \quad \frac{ds}{dt} \rho^2 = -n r r_1 \sin 2\varphi \sin (\vartheta + \vartheta_1) \sin^2 J.$$

Per il teorema del coseno applicato al lato  $OO_1$ , ricavo:

$$(17) \quad \cos (\vartheta + \vartheta_1) = \frac{\rho^2 - r^2 - r_1^2}{2 r r_1}$$

da cui

$$(18) \quad \sin (\vartheta + \vartheta_1) = \sqrt{1 - \left( \frac{\rho^2 - r^2 - r_1^2}{2 r r_1} \right)^2}.$$

La (16) perciò diviene:

$$(19) \quad \frac{ds}{dt} \rho^2 = -n r r_1 \sin 2\varphi \sqrt{1 - \left( \frac{\rho^2 - r^2 - r_1^2}{2 r r_1} \right)^2} \sin^2 J.$$

E quindi, ricordando la (2<sup>bis</sup>), abbiamo durante l'eclisse

$$(20) \quad \begin{aligned} & - \frac{ds}{dt} \left( \frac{1}{n \sin 2\varphi} \right) (1 - \cos^2 \varphi \sin^2 J) = \\ & = \frac{1}{2} \sqrt{4 r^2 r_1^2 - (1 - \cos^2 \varphi \sin^2 J - r^2 - r_1^2)^2} \cdot \sin^2 J. \end{aligned}$$

Eleviamo a quadrato entrambi i membri, ordinando secondo le potenze di  $\sin J$ , e poniamo:

$$(21) \quad \left[ \frac{ds}{dt} \left( \frac{2}{n \sin 2\varphi} \right) \right]^2 = \xi(t).$$

Notiamo che  $\xi$  non diviene infinita per  $\sin 2\varphi = 0$ , giacché allora si ha anche  $ds/dt = 0$ , come indica la (14), e sostituiamo (21) in (20). Avremo con alcuni passaggi:

$$(22) \quad \begin{aligned} & \cos^4 \varphi \sin^8 J - 2(1 - r^2 - r_1^2) \cos^2 \varphi \sin^6 J - \\ & - (2r^2 r_1^2 - 1 - r^4 - r_1^4 + 2r^2 + 2r_1^2) \sin^4 J + \\ & + \xi(t) \cos^4 \varphi \sin^4 J - 2\xi(t) \cos^2 \varphi \sin^2 J + \xi(t) = 0. \end{aligned}$$

In questa equazione, per un istante qualsiasi  $t$ , sono noti i valori di  $\cos \varphi$  dati dalla (1); ed inoltre, come vedremo tra breve, sono noti dalla curva di luce della variabile i valori della  $\xi(t)$ , a meno di un fattore costante di proporzionalità.

Poniamo ora, per brevità,

$$(23) \quad \begin{cases} \sin^2 J = X \\ (1 - r^2 - r_1^2) X^3 = Y \\ (2r^2 r_1^2 - 1 - r^4 - r_1^4 + 2r^2 + 2r_1^2) \sin^4 J = [4r^2 r_1^2 - (1 - r^2 - r_1^2)^2] X^2 = Z \end{cases}$$

e sostituiamo in (22). Avremo l'equazione fondamentale, tra  $X, Y, Z, \varphi$  e  $\xi$ :

$$(24) \quad X^4 \cos^4 \varphi + X^2 \xi(t) \cos^4 \varphi - 2X\xi(t) \cos^2 \varphi - 2Y \cos^2 \varphi - Z + \xi(t) = 0.$$

Ricordiamo che la (24), come risulta dalle nostre premesse, vale soltanto per quei valori di  $\varphi$  per cui l'astro principale, oppure il satellite, sono in eclisse; e cioè (fig. 1) quando i due dischi sono parzialmente sovrapposti.

4. Mi resta ora da esporre come sia possibile determinare, a meno di un fattore costante di proporzionalità, la funzione  $\xi(t)$ , quando si conosca dalle osservazioni la curva di luce.

A tale scopo, indichiamo con  $I$  l'intensità del sistema fuori eclisse, con  $i$  l'intensità in un istante qualsiasi  $t$  quando sia occultata una certa area  $s$  dell'astro principale e con  $i'$  l'intensità quando è occultata una medesima area  $s$  dell'astro satellite. Le corrispondenti perdite di luce saranno  $I - i$  ed  $I - i'$ ; e, se trascuriamo l'oscuramento al bordo, tali perdite risultano evidentemente proporzionali all'area coperta  $s$ , sebbene il coefficiente di proporzionalità sia diverso nei due casi. E precisamente, se indichiamo con  $h$  il coefficiente di proporzionalità quando viene eclissato l'astro principale, avremo

$$(25) \quad I - i = hs$$

e quindi, quando viene eclissato l'astro satellite, sarà

$$(26) \quad I - i' = h\lambda s$$

essendo  $\lambda$  il rapporto delle luminosità superficiali dei due astri.

Supponiamo per esempio di avere osservato l'eclisse dell'astro principale e quindi deriviamo la (25) rispetto al tempo; avremo

$$(27) \quad -\frac{di}{dt} = h \frac{ds}{dt}$$

dove il primo membro è una funzione conosciuta del tempo, che praticamente può determinarsi in modo molto semplice derivando graficamente la curva di luce.

Tenendo presente la (27), avremo dalla (21):

$$(28) \quad \left( \frac{2}{n \sin 2\varphi} \frac{di}{dt} \right)^2 = h^2 \dot{\xi}(t) = \omega(t)$$

dove  $\omega(t)$  sarà *funzione nota del tempo*, essendo nota  $\varphi(t)$  dalla (1), conoscendosi  $di/dt$  dalla curva di luce ed essendo pure noto il moto medio  $n$  che è eguale a  $2\pi/P$ , dove  $P$  è il periodo.

Sostituiamo il valore  $\xi(t)$  ora trovato in (24) e moltiplichiamo tutti i termini per  $h^2$ , ponendo per brevità

$$(29) \quad h^2 X^4 = x \quad ; \quad h^2 Y = y \quad \cdot \quad h^2 Z = z.$$

Avremo immediatamente

$$(30) \quad x \cos^4 \varphi + X^2 \omega(t) \cos^4 \varphi - 2 X \omega(t) \cos^2 \varphi - 2 y \cos^2 \varphi - z + \omega(t) = 0.$$

5. Immaginiamo ora di avere trovato dalle osservazioni i valori della  $\omega(t)$  negli istanti  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , sempre durante l'eclisse dell'astro principale. Poiché  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sono noti dalla (1), la (30) ci darà  $n$  equazioni contenenti le costanti incognite  $X, x, y, z$ . Scegliendone cinque ed eliminando tra esse  $X, X^2, x$  ed  $y$  oppure  $X, X^2, y$  e  $z$ , oppure  $X, X^2, x$  e  $z$  avremo tre equazioni contenenti rispettivamente le sole incognite  $z, x, y$ , che diverranno quindi note. Conosciute  $x, y$  e  $z$ , una qualsiasi di queste equazioni ci darà  $X$  e quindi, essendo note  $X$  ed  $x$ , sarà nota anche  $h$  e perciò anche  $Y$  e  $Z$ . Ovviamente, si migliorerà la soluzione col metodo dei minimi quadrati servendosi di tutte le  $n$  equazioni; dopo di che, essendo noti  $X, Y$ , e  $Z$ , le (23) ci daranno  $J, r$  ed  $r_1$ .

Non occorre aggiungere che lo stesso calcolo può eseguirsi per la curva di luce relativa all'eclisse della stella satellite con la sola avvertenza di sostituire  $h\lambda$  al posto di  $h$  e che il metodo, che ora ho dato, è generale, applicandosi, *senza che occorra far uso di tabelle*, tanto al caso di eclissi parziali, come a quello di eclissi totali. Soltanto occorre ricordare che la (30), secondo la dimostrazione da me data, vale per il tratto decrescente o per quello crescente della curva di luce, sia per il minimo principale che per il minimo secondario.

In una prossima Nota, mi propongo di fare una applicazione del mio metodo a qualche variabile ad eclisse.

**Astronomia.** — *Orbita del Sistema Binario  $\mu$  Draconis.* Nota I di ANNIBALE FANTOLI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Scoperta da Herschel nel 1779, la stella doppia  $\mu$  Draconis (A.D.S. 10345,  $\alpha = 17^h 4^m,3$  ;  $\delta = 54^\circ 32'$ , eq. 1950) è stata oggetto di numerosissime osservazioni nel corso di quasi 180 anni; in tale periodo di tempo l'astro satellite è ruotato di circa  $153^\circ$  attorno all'astro principale, onde risulta evidente che si tratta di una stella doppia a lungo periodo. Le difficoltà che da ciò derivano nella determinazione dell'orbita del satellite, oltre che dalla relativa brevità dell'arco percorso (inferiore a  $180^\circ$ ) sono ancora aumentate dal fatto che le osservazioni dal 1779 al 1825 sono incomplete, o almeno assai incerte, e quindi praticamente inutilizzabili. Ciò spiega la grande diversità dei risultati raggiunti nelle precedenti ricerche, e l'insuccesso degli studi più vecchi, compiuti quando l'arco che si aveva a disposizione era ancora più esiguo. Per queste ragioni, malgrado il numero elevato di osservazioni a disposizione, la  $\mu$  Draconis è tuttora <sup>(1)</sup> considerata come doppia fisica ad orbita poco conosciuta.

Esistono complessivamente sei orbite di tale sistema binario. Una calcolata da A. Berberich <sup>(2)</sup>, due da S. Burnham <sup>(3)</sup>, due da V. Komendantoff <sup>(4)</sup>, e finalmente una dovuta a W. von Bezold <sup>(5)</sup>. I risultati relativi a tali orbite sono riportati qui appresso adoperando i noti simboli, ed essendo sempre il periodo P dato in anni, e  $\tau$  l'epoca del passaggio al periastro:

TABELLA I.

| Autore              | $\Omega$       | $i$                | $\omega$       | $e$   | $a$      | P     | $\tau$  |
|---------------------|----------------|--------------------|----------------|-------|----------|-------|---------|
| Berberich . . . .   | —              | $0^\circ$          | $84^\circ,51$  | 0,493 | $3'',38$ | 648,0 | 1940,35 |
| Burnham I . . . .   | —              | —                  | —              | 0     | $9,16$   | 1190  | —       |
| Burnham II . . . .  | —              | —                  | —              | 0,84  | $5,88$   | 280   | —       |
| Komendantoff I . .  | $131^\circ,66$ | $\pm 30^\circ,37$  | $171^\circ,29$ | 0,802 | $11,82$  | 4036  | 1920,76 |
| Komendantoff II . . | —              | $0^\circ$          | —              | 0,576 | $5,50$   | 1386  | 1921,73 |
| von Bezold . . . .  | $114^\circ,51$ | $\pm 139^\circ,43$ | $11^\circ,07$  | 0,673 | $6,92$   | 1544  | 1936,1  |

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) Cfr. per esempio, RUSSELL and MOORE, *The Masses of the Stars*, Chicago 1940.

(2) Cfr. « Astr. Nachr. », Bd. CVIII, p. 249 (1884).

(3) Cfr. « Month. Not. », vol. LVII, p. 547 (1897).

(4) Cfr. « Pulk. Circ. », vol. XVI (1935).

(5) Cfr. « Astr. Nachr. », Bd. CCLXVII, p. 241 (1938).

TABELLA II.

| $t$     | $\vartheta$ | $\rho$ | Osservatore | $t$     | $\vartheta$ | $\rho$ | Osservatore  |
|---------|-------------|--------|-------------|---------|-------------|--------|--------------|
| 1779,80 | —           | 4",2   | 1 Herschel  | 1843,36 | 197°,2      | 3",17  | 2 Mädler     |
| 1779,92 | —           | 4 ,69  | 1 Herschel  | 1843,42 | 195 ,2      | 3 ,06  | 2 Wr         |
| 1780,54 | —           | 4 ,38  | 1 Herschel  | 1843,50 | 197 ,2      | 3 ,57  | 3 God        |
| 1781,73 | 232°,4      | —      | 1 Herschel  | 1843,88 | 199 ,3      | 2 ,95  | 7 Kaiser     |
| 1802,17 | 219 ,5      | —      | 1 Herschel  | 1844,42 | 196 ,6      | 3 ,13  | 4 Mädler     |
| 1803,46 | 220 ,2      | —      | 1 Herschel  | 1844,66 | 197 ,2      | 3 ,22  | 4 Phil       |
| 1804,10 | 220 ,5      | —      | 2 Herschel  | 1845,65 | 192 ,9      | 3 ,20  | 3 Phil       |
| 1819,70 | 210 ,0      | —      | 3 Struve    | 1846,20 | 192 ,9      | 3 ,07  | 2 Phil       |
| 1821,38 | 208 ,2      | 3 ,91  | 2 Shajn     | 1846,67 | 191 ,7      | 2 ,98  | 3 Phil       |
| 1821,80 | 210 ,8      | 4 ,29  | 2 Struve    | 1847,51 | 191 ,6      | 3 ,0   | 1 Smyth      |
| 1825,50 | 209 ,0      | 4 ,33  | 5 ?         | 1847,63 | 191 ,0      | 2 ,9   | 1 Mitchell   |
| 1828,43 | 205 ,2      | 3 ,92  | 4 ?         | 1848,52 | 193 ,0      | 3 ,09  | 1 Dawes      |
| 1828,52 | 208 ,1      | 3 ,34  | 3 Struve    | 1849,68 | 189 ,7      | 3 ,00  | 2 Phil       |
| 1829,62 | 205 ,3      | 5 ,05  | 2 ?         | 1851,74 | 191 ,1      | 2 ,82  | 1 O. Struve  |
| 1830,32 | 204 ,1      | 4 ,24  | 2 ?         | 1851,76 | 190 ,1      | 3 ,09  | 4 Fletcher   |
| 1830,57 | 203 ,0      | 3 ,06  | 1 Dawes     | 1851,89 | 191 ,8      | 3 ,07  | 3 Mädler     |
| 1830,79 | 206 ,7      | 3 ,6   | ? Smyth     | 1852,25 | 188 ,0      | 2 ,97  | 6 Miller     |
| 1831,60 | 203 ,8      | 3 ,21  | 2 Dawes     | 1852,63 | 190 ,6      | 3 ,02  | 7 Mädler     |
| 1832,22 | 205 ,1      | 3 ,23  | 9 Struve    | 1853,98 | 189 ,9      | 2 ,92  | 3 Mädler     |
| 1832,62 | 204 ,6      | 3 ,36  | 1 Dawes     | 1854,26 | 188 ,3      | 3 ,04  | 11 Dembowski |
| 1832,75 | 204 ,2      | 3 ,21  | 3 Struve    | 1854,28 | 189 ,1      | 2 ,97  | 2 Mädler     |
| 1834,56 | 202 ,8      | 3 ,32  | 4 Dawes     | 1854,48 | 190 ,7      | 3 ,0   | 2 Smyth      |
| 1835,39 | 203 ,1      | 3 ,15  | 3 Struve    | 1854,68 | 188 ,4      | 2 ,93  | 3 Morton     |
| 1836,40 | 201 ,6      | 3 ,37  | 4 Mädler    | 1854,70 | 188 ,1      | 2 ,88  | 1 Dawes      |
| 1836,79 | 202 ,8      | 3 ,27  | 4 Struve    | 1855,41 | 191 ,0      | 2 ,80  | 2 Winnecke   |
| 1839,53 | 202 ,3      | 3 ,3   | 2 Smyth     | 1856,63 | 187 ,1      | 2 ,91  | 4 Dembowski  |
| 1840,52 | 199 ,1      | 3 ,12  | 4 Main      | 1857,39 | 186 ,5      | 2 ,84  | 2 Mädler     |
| 1840,59 | 198 ,8      | 3 ,09  | 2 Dawes     | 1857,50 | 188 ,4      | 2 ,75  | 4 Secchi     |
| 1840,65 | 200 ,4      | 3 ,18  | 1 Rog       | 1858,23 | 185 ,1      | 2 ,78  | 3 O. Struve  |
| 1840,74 | 199 ,1      | 3 ,14  | 2 Glaisher  | 1858,71 | 187 ,2      | 3 ,05  | 4 Mädler     |
| 1841,31 | 198 ,6      | 3 ,16  | 4 O. Struve | 1859,73 | 185 ,5      | 2 ,82  | 2 Dawes      |
| 1841,65 | 198 ,4      | 2 ,98  | 6 Kaiser    | 1859,94 | 185 ,6      | 2 ,93  | 8 Mädler     |
| 1843,22 | 197 ,4      | 3 ,40  | 1 Wr. God.  | 1861,48 | 182 ,1      | 2 ,76  | 2 O. Struve  |

## Segue: TABELLA II.

| <i>t</i> | $\vartheta$ | $\rho$ | Osservatore     | <i>t</i> | $\vartheta$ | $\rho$ | Osservatore        |
|----------|-------------|--------|-----------------|----------|-------------|--------|--------------------|
| 1863,57  | 182° ,2     | 2" ,62 | 7 Dembowski     | 1875,65  | 172° ,5     | 2" ,62 | 2 Dunér            |
| 1865,04  | 182 ,7      | 3 ,12  | 1 Engelm        | 1875,76  | 171 ,8      | 2 ,50  | 2 Dembowski        |
| 1865,99  | 181 ,0      | 2 ,72  | 3 Secchi        | 1876,38  | 172 ,5      | 3 ,00  | 1 Plum (?)         |
| 1866,40  | 175 ,2      | 3 ,01  | 1 Talmage       | 1876,55  | 171 ,0      | 2 ,71  | 4 Doberck          |
| 1866,67  | 179 ,0      | 2 ,72  | 2 Harv. Observ. | 1876,58  | 171 ,9      | 2 ,53  | 1 W. Seabroke      |
| 1866,67  | 179 ,0      | 2 ,65  | 1 Winl          | 1876,82  | 172 ,1      | 2 ,56  | 3 Jedrzejewicz     |
| 1866,73  | 181 ,5      | 2 ,70  | 1 O. Struve     | 1877,28  | 170 ,3      | 2 ,49  | 3 Dembowski        |
| 1866,76  | 179 ,7      | 2 ,65  | 11 Kaiser       | 1877,42  | 169 ,7      | 2 ,64  | 5 Hall             |
| 1866,96  | 179 ,9      | 2 ,55  | 6 Dembowski     | 1877,64  | 169 ,9      | 2 ,66  | 2 Doberck          |
| 1867,37  | 175 ,5      | 2 ,91  | 1 Rad. Observ.  | 1878,84  | 171 ,4      | 2 ,57  | 3 Goldney          |
| 1868,36  | 179 ,6      | 2 ,69  | 3 Dunér         | 1879,68  | 166 ,6      | 2 ,70  | 1 Pritchett        |
| 1868,50  | 177 ,9      | 3 ,27  | 3 Talmage       | 1879,71  | 168 ,7      | 2 ,61  | 3 Seabroke         |
| 1868,56  | 174 ,4      | 2 ,86  | 2 Main          | 1879,82  | 168 ,6      | 2 ,69  | 3 Jedrzejewicz     |
| 1868,68  | 178 ,8      | 2 ,73  | 2 Dunér         | 1880,47  | 167 ,8      | 2 ,65  | 2 Doberck          |
| 1869,17  | 178 ,5      | 2 ,68  | 2 Dunér         | 1880,57  | 166 ,3      | 2 ,55  | 2 Bigourdan        |
| 1869,76  | 173 ,2      | 2 ,81  | 2 Rad. Observ.  | 1883,14  | 165 ,0      | 2 ,52  | 1 Bigourdan        |
| 1871,29  | 178 ,5      | 2 ,62  | 3 O. Struve     | 1883,48  | 163 ,0      | 2 ,47  | 2 Per              |
| 1871,40  | 177 ,4      | 2 ,78  | 2 Harv. Observ. | 1883,63  | 165 ,0      | 2 ,66  | 6 Engelm           |
| 1871,51  | 176 ,3      | 2 ,62  | 1 Talmage       | 1883,68  | 164 ,6      | 2 ,69  | 2 Jedrzejewicz     |
| 1871,64  | 176 ,8      | 2 ,61  | 5 Dunér         | 1883,83  | 165 ,3      | 2 ,57  | 2 Küstner          |
| 1872,17  | 176 ,0      | 2 ,47  | 2 Seabroke      | 1884,70  | 164 ,5      | 2 ,67  | 2 Niesten          |
| 1872,49  | 177 ,9      | 2 ,83  | 2 Rad. Observ.  | 1885,44  | 161 ,9      | 2 ,47  | 5 De Ball          |
| 1872,50  | 174 ,0      | 2 ,70  | 1 W S M         | 1885,58  | 162 ,3      | 2 ,53  | 3 Hall             |
| 1872,52  | 175 ,1      | 2 ,50  | 2 Dembowski     | 1885,61  | 163 ,6      | 2 ,96  | 2 P. Smyth         |
| 1872,53  | 175 ,1      | 2 ,63  | 1 Brünnow       | 1885,71  | 163 ,3      | 2 ,57  | 2 Jedrzejewicz     |
| 1872,80  | 177 ,3      | 2 ,70  | 2 Dunér         | 1885,74  | 164 ,9      | 2 ,96  | 1 Seabroeke        |
| 1873,50  | 173 ,7      | 2 ,8   | 1 W. Seabroke   | 1885,97  | 162 ,9      | 2 ,59  | 2 Per              |
| 1873,58  | 177 ,0      | 2 ,58  | 2 O. Struve     | 1886,73  | 161 ,9      | 2 ,51  | 3 Jedrzejewicz     |
| 1873,67  | 173 ,8      | 2 ,51  | 3 Dembowski     | 1886,94  | 160 ,0      | 2 ,35  | 3 Tarrant          |
| 1874,59  | 172 ,7      | 2 ,49  | 3 Dembowski     | 1887,51  | 160 ,3      | 2 ,77  | 1 Toul. Observ.    |
| 1874,62  | 172 ,3      | 2 ,85  | 1 Seabroke      | 1888,61  | 156 ,1      | 2 ,67  | 2 Toul Observ. (?) |
| 1874,68  | 172 ,4      | 2 ,95  | 3 Gledhill      | 1888,71  | 158 ,1      | 2 ,47  | 3 Maw              |
| 1875,04  | 172 ,8      | 2 ,66  | 2 W. Seabroke   | 1889,27  | 159 ,4      | 2 ,40  | 4 Burnham          |
| 1875,57  | 171 ,8      | 2 ,64  | 1 Seabroke      | 1889,55  | 158 ,3      | 2 ,46  | 3 Hall             |

Segue: TABELLA II.

| $t$     | $\vartheta$ | $\rho$ | Osservatore                | $t$     | $\vartheta$ | $\rho$ | Osservatore  |
|---------|-------------|--------|----------------------------|---------|-------------|--------|--|
| 1889,56 | 160°,2      | 2'',66 | 2 Harv. Observ.            | 1899,20 | 149°,1      | 2'',42 | 2 Cohn, Seraph.  |
| 1889,71 | 157°,6      | 2'',42 | 3 Maw                      | 1900,66 | 146°,0      | 2'',24 | 2 Bryant   |
| 1889,83 | 159°,6      | 2'',59 | 7 Nissen, King,<br>Celoria | 1900,68 | 145°,8      | 2'',82 | 2 Boeger   |
| 1891,45 | 158°,6      | 2'',40 | 1 Bell                     | 1901,16 | 146°,9      | 2'',35 | 3 Espin  |
| 1891,48 | 159°,9      | 2'',40 | 2 Rad. Observ.             | 1901,80 | 143°,0      | 2'',23 | 5 Greenw. Obs.   |
| 1891,50 | 156°,8      | 2'',90 | 4 See                      | 1902,58 | 145°,2      | 2'',47 | 3 Postelmann   |
| 1891,50 | 161°,2      | 2'',40 | 1 Wickm                    | 1902,67 | 144°,9      | 2'',51 | 3 Comstock   |
| 1891,52 | 156°,9      | 2'',69 | 1 Knorre                   | 1902,68 | 143°,5      | 2'',22 | 2 Furnér   |
| 1891,70 | 157°,1      | 2'',47 | 3 Bigourdan                | 1903,44 | 144°,1      | 2'',47 | 3 Comstock   |
| 1892,42 | 155°,3      | 2'',89 | 4 Searle                   | 1903,55 | 144°,2      | 2'',37 | 2 Doberck  |
| 1892,64 | 155°,7      | 2'',51 | 11 Bigourdan               | 1903,73 | 144°,2      | 2'',17 | 2 Biesbroeck   |
| 1892,70 | 155°,2      | 2'',60 | 2 Collins                  | 1904,76 | 142°,5      | 2'',43 | 23 Th, Wz, Com,<br>Maw, Frm, Mrg                                 |
| 1892,72 | 155°,5      | 2'',40 | 3 Comstock                 | 1905,58 | 142°,2      | 2'',24 | 3 Burnham  |
| 1893,09 | 155°,1      | 2'',47 | 2 Collins                  | 1908,98 | 137°,1      | 2'',33 | 30 V. Bs, J, Sto,<br>Com, Has, Roe,<br>Dob.                      |
| 1893,41 | 154°,8      | 2'',59 | 1 Jones                    | 1911,11 | 136°,4      | 2'',38 | 7 Storey, Voute  |
| 1893,53 | 155°,0      | 2'',35 | 1 Collins                  | 1912,63 | 134°,4      | 2'',30 | 32 Dob, Com, Fox,<br>Vou, GrO, NeuJ,<br>Doo, VBs.                |
| 1893,53 | 155°,2      | 2'',32 | 2 Leavenworth              | 1914,47 | 131°,1      | 2'',28 | 3 Vyss   |
| 1893,76 | 153°,8      | 2'',49 | 2 Bigourdan                | 1915,88 | 130°,1      | 2'',34 | 38 Rabe, Phl, Dob,<br>Hzg, Com, Ptt,                             |
| 1893,84 | 153°,2      | 2'',40 | 2 Comstock                 | 1918,47 | 126°,6      | 2'',30 | 15 Dob, VBs, Com,<br>Hzg, Gui.                                   |
| 1894,52 | 154°,4      | 2'',53 | 2 Glasenapp                | 1921,12 | 123°,8      | 2'',31 | 22 Dob, Ber. Ob.,<br>Chan, VBs, B,<br>Prz, Btz, Lv.              |
| 1894,62 | 152°,4      | 2'',37 | 2 Niesten                  | 1921,98 | 123°,0      | 2'',83 | 8 Labitzke   |
| 1894,66 | 154°,6      | 2'',39 | 11 Comstock                | 1923,47 | 120°,7      | 2'',27 | 44 B, Ber. Ob.,<br>Prz, Gr. Ob,<br>Lv, Peek, VBs,<br>Dob, Bloch. |
| 1894,69 | 153°,5      | 2'',55 | 4 Bigourdan                | 1926,02 | 118°,2      | 2'',27 | 40 Dob, Ber. Ob.,<br>Baize, VBs, Lv<br>Berm, Rabe,<br>Kom.       |
| 1894,90 | 151°,6      | 2'',39 | 3 Maw                      |         |             |        |  |
| 1895,62 | 152°,4      | 2'',44 | 2 Collins                  |         |             |        |  |
| 1895,66 | 153°,0      | 2'',41 | 3 Comstock                 |         |             |        |  |
| 1895,74 | 152°,4      | 2'',34 | 2 See                      |         |             |        |  |
| 1895,77 | 151°,0      | 2'',71 | 1 Renz                     |         |             |        |  |
| 1896,42 | 152°,2      | 2'',35 | 3 Comstock                 |         |             |        |  |
| 1896,84 | 151°,2      | 2'',19 | 3 Morgan                   |         |             |        |  |
| 1897,48 | 152°,7      | 2'',49 | 1 Glasenapp                |         |             |        |  |
| 1897,74 | 149°,5      | 2'',31 | 3 Maw                      |         |             |        |  |
| 1898,50 | 149°,1      | 2'',41 | 6 Doolittle                |         |             |        |  |

## Segue: TABELLA II.

| <i>t</i> | $\vartheta$ | $\rho$ | Osservatore    | <i>t</i> | $\vartheta$ | $\rho$ | Osservatore   |
|----------|-------------|--------|----------------|----------|-------------|--------|---------------|
| 1927,54  | 115°,4      | 2",54  | 4 Komendantoff | 1935,68  | 106°,1      | 2",34  | 5 Baize       |
| 1927,78  | 115,4       | 2,28   | 3 Baize        | 1936,38  | 105,2       | 2,29   | 4 Duruy       |
| 1927,80  | 116,7       | 2,34   | 2 Fatou        | 1936,55  | 104,7       | 2,22   | 6 Rabe        |
| 1928,56  | 114,6       | 2,43   | 1 Fatou        | 1936,63  | 105,1       | 2,24   | 3 Baize       |
| 1928,60  | 114,9       | 2,38   | 4 Komendantoff | 1937,39  | 104,0       | 2,23   | 4 Müller      |
| 1928,67  | 114,8       | 2,23   | 3 Biesbroeck   | 1937,52  | 103,8       | 2,25   | 7 Duruy       |
| 1928,75  | 115,1       | 2,62   | 4 Beal         | 1937,59  | 103,5       | 2,20   | 1 Hertzsprung |
| 1929,30  | 115,1       | 2,35   | 5 Baize        | 1937,62  | 103,8       | 2,26   | 7 Rabe        |
| 1929,47  | 113,4       | 2,28   | 1 Reuijl       | 1937,63  | 104,3       | 2,21   | 3 Baize       |
| 1929,64  | 114,1       | 2,37   | 4 Komendantoff | 1938,50  | 101,8       | 2,27   | 7 Phillips    |
| 1929,79  | 113,8       | 2,29   | 3 Phillips     | 1938,55  | 102,4       | 2,27   | 6 Duruy       |
| 1930,17  | 113,9       | 2,55   | 4 Doberck      | 1938,62  | 102,5       | 2,19   | 8 Rabe        |
| 1930,31  | 113,2       | 2,15   | 4 Kuiper       | 1938,64  | 101,8       | 2,27   | 4 Müller      |
| 1930,36  | 113,5       | 2,29   | 5 Baize        | 1939,40  | 102,3       | 2,29   | 5 Arend       |
| 1930,43  | 112,1       | 2,34   | 3 Reuijl       | 1939,40  | 103,0       | 2,28   | 2 Neven       |
| 1930,51  | 112,4       | 2,26   | 3 Komendantoff | 1939,47  | 100,9       | 2,25   | 3 Müller      |
| 1931,28  | 112,2       | 2,18   | 5 Baize        | 1939,49  | 100,9       | 2,20   | 4 Sémirot     |
| 1931,60  | 109,8       | 2,35   | 4 Komendantoff | 1939,52  | 101,4       | 2,24   | 6 Schmeidler  |
| 1931,67  | 111,1       | 2,22   | 3 Bn           | 1939,60  | 100,5       | 2,28   | 5 Duruy       |
| 1931,68  | 111,2       | 2,08   | 8 Simonov      | 1939,61  | 101,3       | 2,13   | 10 Rabe       |
| 1932,36  | 110,9       | 2,35   | 5 Baize        | 1939,67  | 101,2       | 2,22   | 3 Phillips    |
| 1932,44  | 110,5       | 2,25   | 1 G. Struve    | 1940,10  | 101,3       | 2,17   | 4 Baize       |
| 1932,48  | 110,2       | 2,24   | 1 Simonov      | 1940,12  | 100,5       | 2,37   | 2 VO          |
| 1932,50  | 109,7       | 2,18   | 4 Simonov      | 1940,49  | 99,8        | 2,17   | 3 Jeffers     |
| 1932,65  | 108,9       | 2,28   | 4 Komendantoff | 1940,55  | 99,7        | 2,15   | 1 Strand      |
| 1932,86  | 109,8       | 2,16   | 5 Rabe         | 1940,55  | 100,6       | 2,16   | 9 Rabe        |
| 1933,48  | 111,0       | 2,61   | 2 Pokr         | 1940,57  | 101,3       | 2,20   | 4 Neven       |
| 1933,57  | 109,6       | 2,25   | 4 Baize        | 1940,87  | 98,9        | 2,17   | 5 Duruy       |
| 1933,73  | 108,0       | 2,24   | 6 Doberck      | 1941,49  | 100,8       | 2,21   | 4 Neven       |
| 1933,73  | 107,9       | 2,40   | 4 Komendantoff | 1941,59  | 98,4        | 2,17   | 7 Rabe        |
| 1934,51  | 107,7       | 2,38   | 5 Rabe         | 1941,68  | 98,7        | 2,20   | 3 Sémirot     |
| 1934,63  | 108,9       | 2,27   | 3 Baize        | 1941,71  | 97,6        | 2,16   | 7 Duruy       |
| 1934,68  | 107,6       | 2,30   | 4 Komendantoff | 1942,40  | 97,7        | 2,17   | 3 Jeffers     |
| 1935,58  | 105,9       | 2,39   | 7 Rabe         | 1942,58  | 97,0        | 2,14   | 9 Rabe        |

Segue: TABELLA II.

| $t$     | $\vartheta$ | $\rho$  | Osservatore   | $t$     | $\vartheta$ | $\rho$  | Osservatore |
|---------|-------------|---------|---------------|---------|-------------|---------|-------------|
| 1942,60 | 97° ,3      | 2'' ,14 | 7 Duruy       | 1948,44 | 89° ,8      | 2'' ,11 | 4 Fokker    |
| 1943,26 | 97 ,0       | 2 ,21   | 6 Baize       | 1948,79 | 89 ,7       | 2 ,14   | 4 Dob       |
| 1943,57 | 95 ,5       | 2 ,14   | 10 Rabe       | 1949,57 | 88 ,1       | 2 ,18   | 4 Guyot     |
| 1943,71 | 96 ,1       | 2 ,18   | 1 Jeffers     | 1950,55 | 89 ,8       | 2 ,20   | 2 Pretre    |
| 1945,55 | 93 ,7       | 2 ,17   | 2 Jeffers     | 1950,61 | 87 ,1       | 2 ,19   | 3 Müller    |
| 1945,68 | 94 ,2       | 2 ,13   | 4 Baize       | 1951,48 | 86 ,3       | 2 ,17   | 3 Armellini |
| 1945,71 | 92 ,6       | 2 ,19   | 6 Rabe        | 1951,71 | 86 ,4       | 2 ,01   | 4 Baize     |
| 1946,47 | 92 ,3       | 2 ,18   | 5 Muller      | 1955,58 | 75 ,0       | 3 ,26   | 5 Gallo (?) |
| 1946,63 | 91 ,5       | 2 ,17   | 9 Van den Bos | 1956,43 | 79 ,7       | 2 ,16   | 6 Fantoli   |
| 1947,69 | 91 ,9       | 2 ,12   | 4 Baize       |         |             |         |             |

Le prime tre orbite, come ho già accennato, non presentano attualmente che un interesse storico. Più attendibili risultano invece la seconda orbita di Komendantoff, e, soprattutto, quella di von Bezold. Komendantoff (1935) ha costruito la sua orbita col metodo analitico di Kowalsky-Seelinger, assumendo *a priori* il valore  $i = 0^\circ$ . Le osservazioni da lui usate abbracciano un arco di circa  $100^\circ$ ; tuttavia gli scarti fra osservazioni e calcolo non sono trascurabili, e vanno crescendo negli ultimi anni. Von Bezold (1938) ha invece ricavato gli elementi dell'orbita con il metodo di Rabe, che sembra particolarmente indicato quando si abbiano a disposizione archi relativamente brevi. Tali elementi sono finora i più attendibili, e le effemeridi calcolate in base ad essi fino al 1950,50 sono in buon accordo con le osservazioni. In più, Von Bezold ha calcolato, partendo dai valori ottenuti del semiasse maggiore,  $a$ , e del periodo  $P$ , la parallasse dinamica del sistema col metodo di Russell e Moore, trovando il valore  $\pi = 0''.035$ , che è in buon accordo con quello della parallasse spettroscopica ( $\pi = 0''.032$ ), dato dall'Osservatorio di Monte Wilson.

Finalmente, più di recente (1942), è comparsa una breve Nota<sup>(6)</sup> di K. A. Strand, relativa ad un suo studio rivolto alla ricerca di un satellite oscuro nel sistema della  $\mu$  Draconis. Tale studio, eseguito partendo da una serie di osservazioni fotografiche, avrebbe rivelato la presenza di una perturbazione con periodo di 3.1 anni nel moto orbitale del satellite; fenomeno, che qualora venisse confermato, potrebbe essere interpretato come effetto del moto di una componente invisibile attorno ad una delle componenti visibili.

2°. Come ho già detto, le osservazioni a disposizione per lo studio di questo sistema binario sono molto numerose. Esse sono contenute parzialmente nei

(6) Cfr. « Amer. Astr. Soc. », vol. X, p. 260 (1942).

cataloghi del Burnham (B. G. C. n. 7878) e dell'Aitken (A. D. S. n. 10345), mentre altre sono riportate da Komendantoff e da von Bezold negli studi citati. Ho creduto quindi opportuno riunire nella tabella n. 2 tutte le osservazioni *complete* finora pubblicate, includendovi però anche, sebbene incomplete, alcune osservazioni antiche che non possono venire altrimenti supplite. Tale tabella è integrata, per l'ultimo ventennio, dalle osservazioni cortesemente fornite dal Prof. P. Müller, dell'Osservatorio Astronomico di Strasburgo. Le osservazioni del 1951,48 e del 1956,43, finora inedite, sono state eseguite all'Osservatorio di Roma dal prof. Armellini e dallo scrivente; quella del 1955,48 dal dott. Gallo, dell'Osservatorio di Merate. Nella tabella, oltre all'anno di osservazione, ed ai valori dell'angolo di posizione  $\vartheta$  e della distanza angolare  $\rho$ , sono stati riportati anche i nomi degli osservatori, preceduti dal numero delle notti di osservazione.

**Fisica matematica.** — *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica.* Nota di GIOVANNI CARINI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

1. Nell'istituire le prime ricerche di magneto-idrodinamica, il prof. Alfvén ha associato alle equazioni di Eulero le equazioni di Maxwell, le quali sono valide nel caso che la sede dei fenomeni elettromagnetici sia in quiete rispetto al sistema inerziale adottato.

Ispirandomi ad un'osservazione che mi è stata verbalmente comunicata dal prof. G. Lampariello — in virtù della quale, non può esistere *a priori* compatibilità dinamica tra due gruppi di equazioni l'uno concernente fenomeni fisici, la cui sede è in moto (equazioni di Eulero) l'altro riguardante fenomeni fisici la cui sede (coincidente con la prima) è invece in quiete (equazioni di Maxwell) — mi sono proposto di approfondire su di un problema particolare le eventuali divergenze che potessero sorgere ove al posto delle equazioni di Maxwell si sostituissero le equazioni di Minkowski, che governano i fenomeni elettromagnetici dei mezzi in moto.

Com'è noto, le equazioni di Minkowski valgono rigorosamente nel caso che il mezzo si muova di moto traslatorio rettilineo uniforme.

Ma, come segue dall'osservazione di Sommerfeld che trovasi a piè di p. 281 del Bd. III delle « Vorlesungen über theoretische Physik » (1948), si può ritenere che le equazioni di Minkowski valgano anche nel caso di mezzi non rigidi e mobili di moto qualunque, purchè sia soddisfatta la condizione  $\frac{dv}{dt} \ll \frac{cv}{2r}$  dove  $v$  ed  $r$  sono la velocità ed il raggio della generica particella e  $c$  è la velocità della luce nel vuoto.

In ciò che segue, trascureremo i termini di ordine superiore al primo in  $\beta = \frac{v}{c}$ .

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

Precisamente, mi propongo di ricercare le eventuali rotazioni uniformi di una massa cosmica, immersa in un campo magnetico uniforme  $\mathbf{H}_0$ , diretto secondo l'asse di rotazione.

Questo problema rientra come caso particolare in quello <sup>(1)</sup> di cui si è recentemente occupato il prof. C. Agostinelli, in cui si ricercano le soluzioni stazionarie del sistema di equazioni di Eulero-Maxwell. Mostreremo che, anche nel caso delle rotazioni uniformi, i risultati sono profondamente divergenti.

Dividerò il lavoro in due Note, nella prima delle quali studio il sistema di equazioni di Eulero-Minkowski, deducendo che, in alcuni casi, tale sistema conduce alle stesse equazioni a cui è pervenuto Alfvén. Nell'altra <sup>(2)</sup>, mi occuperò dei fenomeni stazionari e del problema sopra enunciato.

## 2. Al posto delle equazioni (1) di Alfvén

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{I} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{c} \mathbf{I} \wedge \mathbf{B} - \operatorname{grad} p \right) \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{array} \right.$$

andranno sostituite le seguenti:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \quad , \quad \left( \lambda = \frac{\epsilon \mu - 1}{c} \right) \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{I} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{c} \mathbf{I} \wedge \mathbf{B} - \operatorname{grad} p \right) \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{array} \right.$$

(1) C. AGOSTINELLI, *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica interessanti la Cosmogonia*, « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XVII, 1954.

(2) G. CARINI, *Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica*. Cfr. il prossimo fascicolo di questi « Rendiconti ».

dove il « punto » indica la derivata parziale rispetto a  $t$ ,  $\mathbf{E}$  è l'intensità elettrica del campo,  $\mathbf{H}$  l'intensità magnetica,  $\mathbf{D}$  lo spostamento elettrico,  $\mathbf{B}$  l'induzione magnetica,  $\mathbf{I}$  la densità di corrente elettrica,  $\sigma$  la conducibilità,  $\rho$  la densità del fluido,  $\varepsilon$  e  $\mu$  rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica,  $\mathbf{F}$  la forza non elettromagnetica agente sul fluido,  $p$  la pressione,  $\mathbf{v}$  la velocità della generica particella  $P$ ,  $c$  la velocità della luce nel vuoto.

Infatti, nel passaggio dall'elettrodinamica dei mezzi in quiete (Maxwell) all'elettrodinamica dei mezzi in moto (Minkowski), le equazioni di campo rimangono immutate, se la densità spaziale di carica è nulla, mentre le equazioni materiali diventano

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} = \varepsilon \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} = \mu \left( \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{D} \right), \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{I} - \rho_1 \mathbf{v} = \alpha \sigma \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v} \right] & \left( \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ \rho_1 = \alpha \left( \rho'_1 + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}' \right), \end{cases}$$

dove  $\rho_1$  è la densità di carica spaziale rispetto al sistema inerziale adottato,  $\rho'_1$  ed  $\mathbf{I}'$  sono rispettivamente la densità di carica spaziale e la densità di corrente calcolate rispetto al « sistema proprio » del punto  $P$ .

Noi supponiamo che la densità di carica  $\rho'_1$  sia identicamente nulla, giacché uno stato eventuale, in cui codesta densità fosse diversa da zero, avrebbe carattere assolutamente transitorio (valido in un intervallo di tempo estremamente breve) che forse non è nemmeno descrivibile mediante le equazioni conosciute<sup>(3)</sup>.

Con ciò, le (4) si riducono alle<sup>(4)</sup>

$$(4') \quad \begin{cases} \mathbf{I} = \alpha \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \rho_1 = \alpha \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}'. \end{cases}$$

Trattenendo i termini di primo ordine in  $\beta$ , dalle (4') si ha

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \rho_1 = 0, \end{cases}$$

la prima delle quali è stata già considerata da Alfvén (settima delle (I)), mentre la seconda conduce a  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  (quarta delle (I)).

Inoltre (e qui è la novità), al posto delle  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , valide per i mezzi in quiete, abbiamo sostituito le

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{E}, \end{cases} \quad \left( \lambda = \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \right)$$

(3) Cfr. R. BECKER, *Teoria dell'Elettricità*, vol. I, p. 128 e p. 217, (Firenze, Sansone, 1949).

(4) Cfr. R. BECKER, *Teoria dell'Elettricità*, vol. II, p. 394, (Firenze, Sansone, 1950).

che si deducono dalle (3), dove si trascurino i termini di ordine superiore al primo in  $\beta$ .

3. Supponiamo che la densità della corrente di spostamento  $\dot{\mathbf{D}}$  sia trascurabile di fronte alla densità di corrente di conduzione  $\mathbf{I}$ .

Allora, dalla seconda e quinta delle (2), in virtù della quarta, si ottiene

$$\mathbf{E} = \frac{c}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \frac{c}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\mu}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} + \frac{\lambda}{c} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}),$$

e da questa, se si trascurano i termini in  $\beta^2$ , si deduce

$$(5) \quad \mathbf{E} = \frac{c}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\mu}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}.$$

In conseguenza, dalla quarta delle (2) si ricava

$$(6) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

La prima delle (2), per le (5), (6) diventa

$$\left( \mu \mathbf{H} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{H} \right)^* = - \frac{c^2}{\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mu \operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}),$$

mentre la penultima delle (2), per la (6) si può scrivere nella forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \left( \mu \mathbf{H} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Se poi si suppone che il fluido non espliciti la sua comprimibilità, come nel caso di un liquido, l'equazione di continuità si riduce alla

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Quindi, nel caso che si trascuri  $\dot{\mathbf{D}}$  di fronte ad  $\mathbf{I}$  e si supponga il fluido incomprimibile, dalle (2) si ottiene il seguente sistema

$$(7) \quad \begin{cases} \left( \mu \mathbf{H} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{H} \right)^* = - \frac{c^2}{\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mu \operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \left( \mu \mathbf{H} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Mentre, muovendo dalle (1) e ponendosi nelle stesse condizioni semplificatrici, si perviene al sistema

$$(8) \quad \begin{cases} \mu \dot{\mathbf{H}} = - \frac{c^2}{\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mu \operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

che ovviamente è diverso dal sistema (7).

Il problema matematico consiste nello studio del sistema (7), in cui figurano come funzioni incognite l'intensità magnetica del campo  $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ , la velocità della generica particella del mezzo  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  e la pressione  $p$ .

Alle (7) si deve aggiungere l'equazione di condizione

$$(9) \quad \operatorname{div} \left( \mu \mathbf{H} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) = 0$$

proveniente dalla  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ .

4. I due sistemi (7) e (8) conducono alle stesse equazioni

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

nel caso particolare, considerato in un primo momento da Alfvén, di un fluido incompressibile di conducibilità molto grande:  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Inoltre il sistema (7) porta alle stesse equazioni qualora seguendo Alfvén, e allo scopo di considerare l'influenza di un campo magnetico uniforme  $\mathbf{H}_0$  sul moto di una massa nebulosa (di conducibilità  $\sigma$  finita), si ricerchi una propagazione di onde piane nella direzione di  $\mathbf{H}_0$ .

Infatti si scelga il sistema inerziale di riferimento in modo che l'asse Oz abbia la direzione di  $\mathbf{H}_0$ . Con ciò, le grandezze caratteristiche del fenomeno dipenderanno da  $z$  e  $t$ , anzi dal binomio  $\zeta = kz - \omega t$ , con  $k$  ed  $\omega$  costanti non nulle.

Indicando con  $u_1, u_2, u_3$  le componenti di  $\mathbf{v}$ , dalla terza delle (7) si deduce

$$\frac{du_3}{d\zeta} = 0$$

da cui segue che  $u_3$  è indipendente da  $\zeta$ .

Per la natura del processo ondoso considerato, si avrà

$$u_3 \equiv 0.$$

L'intensità magnetica risultante è  $\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}_0$  e, se si trascura  $\mathbf{H}'_3$  di fronte ad  $\mathbf{H}_0$ , le componenti di  $\mathbf{H}$  saranno  $(H_1, H_2, H_0)$ .

Con ciò dal sistema (7) deduciamo:

$$(12) \quad \begin{cases} \mu \dot{H}_1 = \frac{c^2}{\sigma} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + \mu H_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \mu \dot{H}_2 = \frac{c^2}{\sigma} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} + \mu H_0 \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \left( u_1 \frac{\partial H_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial H_2}{\partial z} \right)' = 0 \\ \frac{du_1}{dt} = \frac{\mu}{\rho} H_0 \frac{\partial H_1}{\partial z} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\rho \sigma} \frac{\partial H_1}{\partial z} \left( u_1 \frac{\partial H_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) + X \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{\mu}{\rho} H_0 \frac{\partial H_2}{\partial z} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\rho \sigma} \frac{\partial H_2}{\partial z} \left( u_1 \frac{\partial H_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) + Y \\ 0 = -\frac{\mu}{\rho} \left( H_1 \frac{\partial H_1}{\partial z} + H_2 \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{cases}$$

dove X, Y, Z sono le componenti di  $\mathbf{F}$ .

Dalla terza delle (12), si deduce che  $u_1 \frac{\partial H_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial H_2}{\partial z}$  non dipende da  $\zeta$  e, per la natura del processo ondoso considerato, possiamo supporre

$$u_1 \frac{\partial H_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial H_2}{\partial z} \equiv 0.$$

In conseguenza il sistema (12) diviene

$$(12') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \dot{H}_1 = \frac{c^2}{\sigma} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + \mu H_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \mu \dot{H}_2 = \frac{c^2}{\sigma} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} + \mu H_0 \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{du_1}{dt} = \frac{\mu}{\rho} H_0 \frac{\partial H_1}{\partial z} + X \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{\mu}{\rho} H_0 \frac{\partial H_2}{\partial z} + Y \\ 0 = -\frac{\mu}{2\rho} \frac{\partial}{\partial z} (H_1^2 + H_2^2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z. \end{array} \right.$$

Al sistema (12') si perviene anche partendo dalle (8).

5. Se si vogliono infine ricercare le soluzioni stazionarie del sistema (7), si deve ricordare che

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2.$$

Allora, le soluzioni stazionarie delle (7), possono essere calcolate muovendo dal sistema

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \left( \mathbf{H} \wedge \mathbf{v} + \frac{c^2}{\mu\sigma} \text{rot } \mathbf{H} \right) = 0 \\ \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{rot } \mathbf{H} \wedge \left( \mu \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H} \right) + \\ + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0 \\ \text{div} \left( \mu \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H} \right) = 0, \end{array} \right. \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

dove si è supposto che le forze di massa  $\mathbf{F}$  derivino dal potenziale  $U$ .

Invece partendo dal sistema (8) si perviene alle equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \left( \mathbf{H} \wedge \mathbf{v} + \frac{c^2}{\mu\sigma} \text{rot } \mathbf{H} \right) = 0 \\ \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} - \frac{\mu}{\rho} \text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0 \\ \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{array} \right.$$

che differiscono dalle (13) per la seconda equazione e per l'equazione  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .

Concludiamo pertanto che nei casi particolari considerati da Alfvén il sistema (1) e il sistema (2) conducono alle stesse equazioni. Ma, già nel caso dei fenomeni stazionari, i due sistemi conducono ad equazioni diverse.

**Chimica Inorganica.** — *Sali di bis-trifenilfosfina, tris-carbonile-cobalto (I)* (\*). Nota preliminare di ADRIANO SACCO, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

In una ricerca precedente <sup>(1)</sup> vennero descritti i composti salini del tipo  $[(RNC)_5Co]^+[Co(CO)_4]^-$  ottenuti dalla reazione tra il dicobaltooctacarbonile e gli isonitrili aromatici.

L'analogia reazione tra dicobaltooctacarbonile e le triarilfosfine, già stata presa in esame da altri autori <sup>(2)</sup> che avevano ottenuto un prodotto da essi formulato come  $[P(C_6H_5)_3 \cdot Co(CO)_3]_2$ , reca, come ho potuto ora constatare, a composti salini del tipo  $\{[P(C_6H_5)_3]_2Co(CO)_3\}^+[Co(CO)_4]^-$ ; ciò dimostra che le triarilfosfine si comportano in questo caso in modo analogo agli isonitrili, ossia promuovono nel dicobaltooctacarbonile uno spostamento di cariche che reca in definitiva a composti salini.

Dal tetracarbonilcobaltato (— I) di bis-trifenilfosfina-triscarbonile-cobalto (I) si possono ottenere, mediante reazioni metatetiche, sali con altri anioni: furono così preparati lo ioduro e il perclorato del catione bis-trifenilfosfina-tris-carbonile-cobalto (I), come cristalli giallo chiari, notevolmente stabili sia all'aria che in soluzione, diamagnetici.

L'ossido di carbonio è legato tanto stabilmente nel catione  $\{[P(C_6H_5)_3]_2Co(CO)_3\}^+$ , da non poter essere spostato da iodio e piridina, a differenza di quello legato nell'anione carbonilcobaltato; esso ha potuto essere spostato quantitativamente per azione degli isonitrili aromatici in eccesso.

Queste ricerche, estese ai prodotti di reazione del dicobaltooctacarbonile con i composti del fosforo tricovalente in genere (fosfine aromatiche ed alifatiche, fosfiti, alogenofosfine, alogenofosfiti), saranno oggetto di prossime pubblicazioni.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(I) A. SACCO, « Gazz. Chim. It. », 83, 632 (1953).

(2) W. REPPE e W. J. SCHWECKENDIEK, « Liebigs Ann. Chem. », 560, 109 (1948).

**Chimica.** — *Rapporto tra il contenuto di Uranio e  $P_2O_5$  nei calcari fosfatici del Salento* (\*). Nota di CARLO BETTINALI, presentata (\*\*) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Nella presente Nota vengono esposti i dati delle analisi da noi eseguite relative al contenuto in  $P_2O_5$  ed uranio di campioni di calcari fosfatici pugliesi prelevati in varie località della penisola Salentina. I dati ottenuti vengono confrontati con quelli riportati in letteratura per alcune formazioni fosfatiche naturali. L'uranio è stato determinato col metodo consigliato da Price e coll. [1] adoperando per le misure il fluofotometro descritto precedentemente [2]. L'anidride fosforica è stata determinata con il metodo della doppia precipitazione con molibdato e miscela magnesiacca [3].

I materiali da noi esaminati sono di tre tipi: uno è costituito da campioni della formazione calcareo fosfatica a facies granulare sovrastante il calcare miocenico, detto pietra leccese. Tali materiali sono localmente denominati Mazzaro e Piromafo.

Un secondo tipo di materiale è costituito da campioni delle formazioni a facies nodulare esistenti ai margini della penisola Salentina in località Aia Marsiglia nei pressi di Diso (Lecce), e presso il capo S. Maria di Leuca.

Un terzo tipo è costituito da alcune ossa fossili rinvenute nella formazione sita nei pressi di Diso (1).

Ci limitiamo ad una descrizione sommaria dei campioni esaminati rimanendo per più complete notizie ai lavori geologici di vari autori sull'argomento [4,5,6].

I materiali esaminati sono:

*Calcari fosfatici incoerenti:* campioni 1, 2, 3, 4, 5, 6. — Sono stati prelevati a differenti profondità dal livello del suolo (col. I della tabella) nella cava di calcare da costruzione chiamata Cava Grande di Cursi in provincia di Lecce. Essi sono costituiti da calcare fosfatico incoerente in cui si rinven-  
gono qua e là impronte fosfatizzate di foraminiferi (camp. 7) e frammenti di fossili anche essi fosfatizzati.

Il contenuto in  $P_2O_5$  del calcare tal quale varia dal 2% nel calcare sottostante alla formazione fosfatica all'11% negli strati più ricchi.

In tali calcari si rinven-  
gono granuli ricchi in  $P_2O_5$ , contenenti anche fluoro, come abbiamo accertato, che al microscopio polarizzatore risultano isotropi. Gli spettri di diffrazione di raggi X effettuati sulla polvere dei noduletti, isolati dalla ganga calcarea con acido acetico diluito, risultano in tutto iden-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e inorganica dell'Università di Roma e Centro di Chimica generale del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) Ringraziamo il prof. Marcucci dell'Istituto Tecnico di Lecce per l'aiuto prestato nel prelievo e nella raccolta dei campioni di fosforite esaminati.

tici a quelli dei fosfati marocchini [7] e sono caratteristici dei minerali del gruppo delle apatiti [8].

*Calcarei fosfatici nodulari.* Campioni 8,9. — Sono costituiti da noduli di forma arrotondata, di colore rosso bruno di notevole durezza e di grandezza variabile da qualche millimetro a parecchi centimetri di diametro.

Tali noduli sono immersi in una ganga calcarea compatta in modo da dare struttura tipo breccia.

I noduli, che abbiamo analizzato previa separazione della ganga effettuata meccanicamente, sono a loro volta costituiti da granuli fosfatici di forma simile a quella che costituisce la parte fosfatica del giacimento sovrastante la pietra leccese cementati fortemente fra loro da calcite.

Nei noduli si rinvenivano abbondanti microforaminiferi del tipo globigerina. Non risultano noti i rapporti di genesi fra i due tipi di fosfati. In tali giacimenti si rinvenivano ossa fossili (camp. 9,10).

I dati analitici sia dei campioni da noi analizzati, sia di quelli riportati in letteratura sono stati espressi anche in grammi di uranio per grammo  $P_2O_5$ .

Tre fatti emergono dall'esame della tabella riassuntiva: il contenuto in uranio dei vari campioni di calcari fosfatici del leccese è proporzionale al contenuto in  $P_2O_5$  della roccia: sarebbe più corretto dire al contenuto in idrossifluoroapatite poiché in realtà è sotto questa forma che il fosforo si trova in tali rocce.

Il contenuto in uranio riferito a grammo di  $P_2O_5$  dei calcari fosfatici del leccese e confrontato con quello delle rocce fosfatiche dei vari giacimenti noti è alquanto elevato: esso si aggira attorno a  $5 \times 10^{-4}$  g per grammo di  $P_2O_5$  <sup>(2)</sup>.

Confrontando tali dati coi valori riportati da Sverdlup [17] relativi al « bilancio geochimico » del mare si rilevano alcune analogie non prive a nostro avviso di significato: infatti l'apporto di anidride fosforica e di sali di uranio provenienti dalla disgregazione delle rocce della superficie terrestre, è calcolato dall'autore suddetto in 760 g di fosforo e 0,6 grammi di uranio per tonnellata di acqua marina: si avranno quindi  $3,80 \cdot 10^{-4}$  g di uranio per grammo di  $P_2O_5$ . Tale valore è all'incirca quello riscontrato nei vari giacimenti di fosforiti noti. Inoltre se si osservano le quantità di questi elementi restate in soluzione — 0,23 g di  $P_2O_5$  contro 0,016 g di uranio per tonnellata di acqua di mare, si vede come la precipitazione è praticamente completa. È quindi spiegabile il fatto, messo in rilievo da alcuni autori [9, 10, 11, 12, 13] che il contenuto in uranio delle formazioni fosfatiche sedimentarie si aggira sempre attorno ai valori sopra indicati, con le oscillazioni dovute a fenomeni di dilavamento ed arricchimento locali.

Ringrazio il prof. V. Caglioti per i consigli e i suggerimenti dati nell'impostazione ed esecuzione del presente lavoro.

Il lavoro è stato eseguito col contributo del Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari che qui vivamente ringrazio.

(2) Purtroppo i noduli fosfatici sono fortemente dispersi nella massa calcarea talvolta compatta per cui un eventuale coltivazione del giacimento, è del tutto antieconomica.

TABELLA I.

| Camp. | Profondità<br>del prelievo<br>dal suolo m. | Denominazione fosfati pugliesi       | Uranio<br>g/ton. | P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> % | Uranio/P <sub>2</sub> O <sub>5</sub><br>g uranio<br>per ton. P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> |
|-------|--|--------------------------------------|------------------|---------------------------------|--|
| 1     | 1,50                                       | Mazzaro . . . . .                    | 25               | 4,35                            | $5,74 \cdot 10^{-4}$   |
| 2     | 2,30                                       | Mazzaro . . . . .                    | 32               | 5,59                            | 5,72 »   |
| 3     | 3,75                                       | Piromafo . . . . .                   | 67               | 11,48                           | 5,83 »   |
| 4     | 4,25                                       | Piromafo ricco in Pecten . . . . .   | 70               | 11,4                            | 6,14 »   |
| 5     | 5  | Calcarea . . . . .                   | 28               | 4,80                            | 5,83 »   |
| 6     | 10   | Calcarea pietra di Cursi . . . . .   | 13               | 2,2                             | 5,90 »   |
| 7     |  | Impronta conchigliare . . . . .      | 144              | 25,52                           | 5,64 »   |
| 8     |  | Noduli di Aia Marsiglia . . . . .    | 102              | 15,64                           | 6,54 »   |
| 8     |  | Noduli Capo S. M. di Leuca . . . . . | 7                | 1,28                            | 5,45 »   |
| 10    |  | Vertebra di cetaceo . . . . .        | 750              | 15,6                            |  |
| 11    |  | Costola di cetaceo . . . . .         | 950              | 15,7                            |  |

*Giacimenti fosfatici* [9]

|  |                                   |      |       |                      |
|--|-----------------------------------|------|-------|----------------------|
|  | Marocco . . . . .                 | 119  | 31,44 | $3,84 \cdot 10^{-4}$ |
|  | Marocco . . . . .                 | 102  | 31,44 | 3,29 »               |
|  | Gafsa (Tunisia) . . . . .         | 60   | 32,06 | 1,87 »               |
|  | Gafsa (Tunisia) . . . . .         | 51   | 29,7  | 1,71 »               |
|  | Djebel Midla (Tunisia) . . . . .  | 76   | 32,06 | 2,06 »               |
|  | Djebel Midla (Tunisia) . . . . .  | 59   | 31,14 | 5,25 »               |
|  | Algeria Costantina . . . . .      | 95,7 | 31,44 | 3,04 »               |
|  | Algeria Costantina . . . . .      | 121  | 31,44 | 3,89 »               |
|  | Kosseir Egitto . . . . .          | 78,3 | 29,31 | 2,67 »               |
|  | Kosseir Egitto . . . . .          | 87   | 28,4  | 3,09 »               |
|  | Florida Land Pebble . . . . .     | 93   | 35,35 | 2,63 »               |
|  | Florida Land Pebble . . . . .     | 165  | 35,35 | 4,67 »               |
|  | Society Island . . . . .          | 60   | 37,8  | 1,57 »               |
|  | West Clare Eire. . . . .          | 86   | 21,6  | 3,90 »               |
|  | Nigeria Ososhun Granular Rock . . | 34,8 | 31,99 | 1,08 »               |
|  | Nigeria Ososhun Nodular Rock . .  | 36,9 | 31,38 | 1,81 »               |
|  | Nigeria Nodules di Apon . . . . . | 69,6 | 22,48 | 3,09 »               |

## LETTERATURA.

- [1] PRICE, FERRETTI e coll., «Anal. Chem.», vol. 25, n. 2, p. 322 (1953).
- [2] C. BETTINALI, F. SALVETTI, «Boll. Soc. Geologica Ital.», vol. LXXV, anno 1956.
- [3] *Official methods of Analysis of the AOAC* 6th. ed (1950).
- [4] TARULLI e MARCUCCI, *Analisi chimica applicata*, vol. 18, fasc. 1, Roma 1928.
- [5] MARTELLI, *I fosfati del Leccese*, «Boll. Soc. Geol.», vol. I, fr. 2, p. 171 (1931).
- [6] G. PENTA, Atti Centro studi per l'Italia meridionale «Boll. soc. Natur. Napoli», vol. L e LI.
- [7] Z. S. ALTSCHULER e coll., *X ray evidence of the nature of carbonate apatite*, «Compte rendues du 19eme congres de Geologie d'Alger», sect. XI, p. 6 (1952).
- [8] C. FRONDEL, «Mineralogy of Apatite group American Mineralogist», XXVIII, 215, (1943).
- [9] DAVIDSOD e D. ATKIN, *On The occurrence of uranium in Phosphate rocks*, «Compt. rend. 19eme «Cong. Geol. Alger», sect. II, pp. 45-64.
- [10] V. E. MC KELVEY Y. M. NELSON, *Characteristic of marine uranium bearing sedimentary rocks*, «Econ. Geol.», vol. 45, p. 35 (1950).
- [11] C. F. DAVIDSON, *The distribution of radioactivity Min/Mag*, 1951.
- [12] A. A. GUNTZ, *Sur la presence d'Uranium dans le Phosphates Nord Africain*, «C.R. Ac.», Paris, vol. 234, p. 864 (1952).
- [13] A. LENOBLE, H. SALVAN, H. ZIEGLER, Ved. *Decouverte de l'Uranium dans les niveaux phosphates du Maroc*, «C. R. Ac.», Paris, vol. 234, p. 976.
- [14] GEORGES CHARLES, *Sur l'origine des phosphates de chaux sedimentaires*, «Comptes rendues 19eme Congr. de Geologie Alger», sect. II, pp. 128-163.
- [15] V. E. MC KELVEY, R. W. SWANSON, R. P. SCHELDON, *Permian Phosphorite deposits*, «Comptes rendues 19eme Congres Geolog. Alger», sect. II, pp. 45-64.
- [16] W. C. HRUMBEIN and R. M. GARRELS, *Origin and Classification of chemical sediments in terms of Ph and oxi reduction potentials*, «Journal of Geology», vol. 60, p. I, 33, (1952).
- [17] H. V. SVERDRUP, *The Oceans*, (1942). New York.
- [18] RANKAMA e SAHAMA, *Geochemistry*, p. 295.

**Chimica** (Chimica biologica). — *Sulla glicolisi nella retina* (\*).  
 Nota di CAMILLO LENTI, presentata (\*\*) dal Socio G. LEVI.

In precedenti ricerche <sup>(1)</sup> sulla glicolisi anaerobica di estratti acquosi di retina avevo notato che la produzione di acido lattico da glucoso, da glicogeno, da glucoso-1-fosfato e da glucoso-6-fosfato seguiva solamente, se al sistema sperimentale erano aggiunti cozimasi ed acido adenilico. La velocità del fenomeno era massima, fungendo da substrato il glucoso.

Lo svolgersi del processo glicolitico, condizionato dall'addizione del mononucleotide, fa ritenere verosimile l'avvenimento nell'estratto di retina di una fosforolisi, così come di una rapida inattivazione della transglicosidasi. Con le ricerche, di cui comunico i risultati, ne ho voluto verificare l'eventualità.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica dell'Università di Torino.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) C. LENTI, «Arch. Sc. Biol.», 29, 335 (1943).

Gli esperimenti vennero eseguiti su retine di vitello. Gli occhi erano enucleati dall'animale appena ucciso e subito trasportati in laboratorio in recipiente raffreddato opportunamente. Le retine tosto prelevate venivano ridotte in fine poltiglia in mortaio, raffreddato a 0° C, con sabbia di quarzo ed estratte per 10 minuti con 2 parti di acqua distillata ghiacciata. La miscela era quindi centrifugata per 10 minuti. Il sopranatante, diluito in modo conveniente, serviva per le prove.

Di ogni preparazione si seguiva l'attività glicolitica, secondo le modalità riferite altra volta <sup>(2)</sup>. Componevano le prove: preparato di retina ml 0,2, soluzione regolatrice della reazione di fosfato secondo Sørensen (pH 7,3) ml 0,4, glucoso 0,14 M o glicogeno 2,5% o H<sub>2</sub>O ml 0,2, cozimasi 0,0015 M ml 0,2, MgCl<sub>2</sub> 0,02 M ml 0,1, adenosin-5-fosfato 0,03 M o adenosin-5-difosfato 0,03 M o adenosin-5-trifosfato 0,04 M o H<sub>2</sub>O ml 0,1. Dopo 3 ore a 37° C, si addizionavano ml 0,1 di acido tricloracetico 0,6 M. Allontanato il precipitato mediante centrifugazione, si determinava l'acido lattico secondo Barker e Summerson <sup>(3)</sup>. La tabella I riporta i risultati di un esperimento eseguito su doppie prove.

TABELLA I.

*Effetto della cozimasi, dell'adenosin-5-fosfato, dell'adenosin-5-difosfato, dell'adenosin-5-trifosfato e di Mg<sup>++</sup> sulla formazione di acido lattico dal glucoso e dal glicogeno in estratti di retina.*

| Sostanze aggiunte   | µg acido lattico formato |     |       |
|---|--------------------------|-----|-------|
|   | I                        | II  | Media |
| glucoso . . . . .   | 0                        | 0   | 0     |
| glucoso + Mg <sup>++</sup> + cozimasi + adenosinmonofosfato . . . . .   | 216                      | 164 | 190   |
| glucoso + Mg <sup>++</sup> + cozimasi + adenosindifosfato.              | 282                      | 284 | 283   |
| glucoso + Mg <sup>++</sup> + cozimasi + adenosintrifosfato              | 287                      | 287 | 287   |
| glicogeno . . . . .   | 0                        | 0   | 0     |
| glicogeno + Mg <sup>++</sup> + cozimasi + adenosinmonofosfato . . . . . | 117                      | 117 | 117   |

Con i medesimi preparati di retina si determinava l'attività fosforolitica secondo Cori, Cori e Green <sup>(4)</sup>. Componevano le prove ml 0,2 della preparazione di retina, ml 0,15 di soluzione regolatrice della reazione di cisteina

(2) C. LENTI e N. BARGONI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », 31, 56 (1955).

(3) J. B. BARKER e W. H. SUMMERSON, « J. Biol. Chem. », 138, 535 (1941).

(4) C. F. CORI, G. T. CORI e A. A. GREEN, « J. Biol. Chem. », 151, 39 (1943).

0,0075 M- $\beta$ -glicerofosfato 0,032 M, contenente mg 5 di glicogeno (pH 6,8), ml 0,1 di glucoso-1-fosfato 0,064 M e ml 0,1 di adenosin-5-fosfato 0,015 M o  $H_2O$ . Dopo 5 minuti a 30°C, la reazione era arrestata per addizione di 0,5 ml di acido tricloracetico 0,6 M. Sul liquido limpido separato mediante centrifugazione si determinava il fosforo inorganico secondo Youngburg e Youngburg<sup>(5)</sup>. La tabella II dà i risultati di un esperimento.

TABELLA II.

*Effetto dell'adenosin-5-fosfato sulla fosforolisi in estratti di retina.*

| EFFETTORE                    | $\mu g$ P inorganico liberato |    |       |
|------------------------------|-------------------------------|----|-------|
|                              | I                             | II | Media |
| —                            | 0                             | 0  | 0     |
| adenosin-5-fosfato . . . . . | 26                            | 21 | 23,5  |

Come appare chiaramente dall'esame dei risultati, da glucoso e glicogeno soli il preparato di retina non è capace di formare acido lattico; lo diviene invece, quando  $Mg^{++}$ , cozimasi e adenosin-5-fosfato sono addizionati al sistema sperimentale (Tabella I), confermando i risultati delle indagini precedenti. Il medesimo preparato di retina poi, come si era sospettato, promuove il trasferimento del glucosile dal glucoso-1-fosfato al glicogeno, essendo attivatore adenosin-5-fosfato. Se non è aggiunto il nucleotide, la reazione non avviene (Tabella II). L'addizione dell'effettore sembra giustificata dall'intensa reazione nucleoside-5-fosfatasica che si sa avvenire nella retina<sup>(6)</sup>.

Facendo l'assenza dell'attività fosforilasica da un lato e l'attivazione del processo determinata dal nucleotide dall'altro ritenere che nella retina, così come si sa avvenire in altri tessuti, si trovino due transglicosidasi, l'una attiva e inattiva l'altra, che si formi dalla prima per catalisi enzimatica e svolga la sua attività per addizione di adenosin-5-fosfato, si ricercava nel tessuto una attività fosforilasi-inibente, secondo il metodo di Cori e Cori<sup>(7)</sup>. Si eseguiva l'estrazione della retina con un volume di acqua, in mortaio raffreddato a 0°C; il liquido separato per centrifugazione, che serviva per le indagini, si dializzava per 4 ore contro soluzione regolatrice della reazione di cisteina 0,012 M- $\beta$ -glicerofosfato 0,08 M (pH 9,0). Si preparavano le prove, aggiungendo a ml 0,15 di una soluzione di fosforilasi  $\alpha$  cristallizzata (preparata dal muscolo scheletrico di coniglio<sup>(8)</sup>) e a ml 1,2 di cisteina 0,03 M (pH 6,6) ml 0,15 di preparato di re-

(5) G. E. YOUNGBURG e M. V. YOUNGBURG, « J. Lab. Clin. Med. », 16, 158 (1930).

(6) C. LENTI e M. CAFIERO, « Arch. Sc. Biol. », 37, 55 (1953).

(7) G. T. CORI e C. F. CORI, « J. Biol. Chem. », 158, 321 (1945).

(8) B. ILLINGWORTH e G. T. CORI, « Biochemical Preparations », 3, 1 (1953).

tina. Immediatamente dopo l'addizione della preparazione si prelevavano ml 0,1 della miscela e si determinava l'attività fosforilasica, portandoli in 0,1 ml di una soluzione di glicogeno 2 % e di glucosio-1-fosfato 0,032 M. Trascorsi 20 minuti a 30° C, si eseguiva un secondo prelievo, e sul campione si ripeteva la determinazione dell'attività fosforilasica. La tabella III riporta i risultati di un esperimento. Da essi in effetti è data sicura dimostrazione dello svolgersi nella retina di un processo di inattivazione della fosforilasi  $\alpha$  cristallizzata del muscolo scheletrico di coniglio.

TABELLA III.

*Attività fosforilasi-inibente di estratti di retina.*

|   | $\mu\text{g P inorganico liberato}$ |    |       | Inibizione |
|---|-------------------------------------|----|-------|------------|
|   | I                                   | II | Media | %          |
| fosforilasi $\alpha$ . . . . .  | 17                                  | 17 | 17    | —          |
| fosforilasi $\alpha$ , tenuta per 20' a 30° C con l'estratto di retina. . . . . | 3                                   | 3  | 3     | 82         |

Sostituendo negli esperimenti di glicolisi l'adenosin-5-fosfato con adenosin-5-trifosfato o con adenosin-5-difosfato, il processo nei due casi risulta nettamente più intenso (Tabella I). Portando questa attivazione a dubitare che nel fenomeno glicolitico dell'estratto di retina avvengano reazioni transfosfoferasiche, venivano nel tessuto condotte indagini sulla dismutazione dell'adenosindifosfato ad adenosintrifosfato.

Per l'allestimento del preparato enzimatico la retina appena prelevata era finemente triturrata in mortaio a 0° C ed estratta con 5 volumi di acqua distillata ghiacciata per 10 minuti. Si centrifugava per 5 minuti. Quindi a 6 ml del sopranatante si aggiungevano 0,3 ml di HCl 0,1 N e la miscela si teneva a 90° C, in bagno d'acqua per 3 minuti. Dopo si portava a pH 6,5 con 0,30 ml di NaOH 0,1 N e si centrifugava. Il sopranatante serviva per l'indagine. L'attività adenilico-cinasica era seguita secondo Gilmour e Calaby <sup>(9)</sup> determinando con la miosina (preparata secondo Steyn-Parvé e Gerritsen <sup>(10)</sup>) l'adenosintrifosfato formato dall'adenosindifosfato. Componevano le prove ml 0,4 del preparato di retina, ml 0,4 di miosina, ml 0,2 di soluzione regolatrice della reazione di istidina 0,025 M (pH 7,2), contenente adenosindifosfato 0,006 M e  $\text{MgCl}_2$  0,015 M. Le prove erano condotte a 37° C e duravano 30 minuti. Arrestate con l'addizione di 0,5 ml di acido tricloracetico 1,2 M, si centrifugava e sul sopranatante si determinava il fosforo inorganico. I risultati

(9) D. GILMOUR e J. H. CALABY, « Enzymologia », 14, 34 (1953).

(10) E. P. STEYN-PARVÉ e TH. GERRITSEN, « Biochim. Biophys. Acta », 8, 104 (1952).

di un esperimento sono riportati nella tabella IV. Ne deriva in modo preciso che il preparato di retina promuove la dismutazione dell'adenosindifosfato ad adenosintrifosfato.

TABELLA IV.

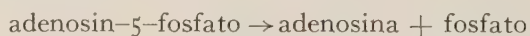
*Formazione di adenosintrifosfato da adenosindifosfato in estratti di retina.*

|                             | $\mu\text{g}$ adenosintrifosfato formato |     |       |
|-----------------------------|--|-----|-------|
|                             | I  | II  | Media |
| —                           | 0  | 0   | 0     |
| adenosindifosfato . . . . . | 370                                      | 390 | 380   |

Complessivamente l'insieme dei fatti osservati porta a concludere che nell'estratto di retina si svolge un processo fosforolitico, così come una reazione fosforilasi-inibente. Accanto è data indubbia dimostrazione dell'avvenimento di reazioni transfosfoferasiche, in particolare di quella adenilicocinasica.

**Chimica** (Chimica biologica). — *Di una adenosin-5-fosfatasi in tessuti vegetali* (\*). Nota di NORA BARGONI e ADA LUZZATI, presentata (\*\*) dal Socio G. LEVI.

Lo svolgersi della reazione



per catalisi di una adenosin-5-fosfatasi<sup>(1)</sup> è da tempo noto in tessuti animali e in batteri, così come in tuberi di *Solanum tuberosum*<sup>(2)</sup>. In questa Nota riferiamo i risultati di ricerche eseguite sulla diffusione dell'enzima in altri tessuti vegetali e su certe proprietà di taluni di essi.

Le indagini sono state condotte su un preparato di diastasi ottenuto dall'*Aspergillus oryzae*, su cotiledoni quiescenti di *Amygdalus communis*, di *Cannabis sativa* e di *Arachis hypogea*, quiescenti e germinanti di *Phaseolus vulgaris* e su foglie e fusti di quest'ultimo.

Dal preparato di diastasi, dai cotiledoni di *Cannabis*, *Arachis*, *Phaseolus*, nonché dalle altre parti della pianta di quest'ultimo, il preparato enzimatico era ottenuto mediante estrazione con acqua del tessuto ridotto in minuti

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica dell'Università di Torino.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) M. LASKOWSKI in B. J. SUMNER e K. MYRBÄCK, *The Enzymes*, vol. I, parte II, p. 956, Acad. Press., New York (1951).

(2) A. KORNBERG e W. E. PRICER Jr., « J. Biol. Chem. », 186, 557 (1950).

frammenti. Per i cotiledoni di *Amygdalus communis* il procedimento per ottenere il preparato enzimatico è stato il seguente: il tessuto sminuzzato in mortaio era estratto tre volte con tre parti di etere; una parte della polvere eterica veniva agitata 5 ore con quattro parti di acqua; la sospensione era centrifugata e il liquido limpido ottenuto trattato con tre volumi di etanolo a 95°; il precipitato, raccolto per centrifugazione e lavato con etanolo ed etere, era disciolto in acqua distillata.

La composizione delle prove era la seguente: preparato enzimatico ml 0,5; soluzione regolatrice della reazione di veronal sodico-acetato sodico, secondo Michaelis, a pH 6,1, ml 1; adenosin-5-fosfato 0,0057 M ml 0,5.

Le prove erano tenute a 37°C per due ore in termostato ad acqua, dopo di che la reazione era bloccata mediante aggiunta di acido tricloracetico 1,22 M. Dopo centrifugazione, su parte del liquido limpido veniva determinato mediante il metodo colorimetrico di Youngburg e Youngburg <sup>(3)</sup> il fosfato inorganico liberato.

TABELLA I.

*Attività adenosin-5-fosfatasi di «Aspergillus oryzae», di cotiledoni quiescenti di «Amygdalus communis», «Cannabis sativa» ed «Arachis hypogea», di cotiledoni quiescenti e germinanti di «Phaseolus vulgaris» e di foglie e di fusti di «Phaseolus».*

| Sistema enzimatico<br>ottenuto da                            | µg P liberato |    |       |
|--|---------------|----|-------|
|  | I             | II | Media |
| <i>Aspergillus oryzae</i> . . . . .                          | 27            | 29 | 28    |
| <i>Amygdalus communis</i><br>cotiledoni quiescenti . . . . . | 12            | 12 | 12    |
| <i>Cannabis sativa</i><br>cotiledoni quiescenti . . . . .    | 49            | 49 | 49    |
| <i>Arachis hypogea</i><br>cotiledoni quiescenti . . . . .    | 10            | 12 | 11    |
| <i>Phaseolus vulgaris</i><br>cotiledoni quiescenti . . . . . | 7             | 7  | 7     |
| cotiledoni germinanti . . . . .                              | 26            | 25 | 25,5  |
| fusticino e radichetta . . . . .                             | 27            | 27 | 27    |
| foglie . . . . .   | 57            | 57 | 57    |
| fusto . . . . .  | 56            | 58 | 57    |

(3) G. E. YOUNGBURG e M. V. YOUNGBURG, «J. Lab. Clin. Med.», 16, 158 (1930).

La tabella I raccoglie i risultati delle indagini concernenti la distribuzione dell'adenosin-5-fosfatasi. Come è ben chiaro, tutte le preparazioni svolgono una netta attività fosfatasi sull'adenosin-5-fosfato. Nei cotiledoni germinanti di *Phaseolus vulgaris*, così come nel fusticino e nella radichetta, è notevole un'attività assai maggiore di quella dei cotiledoni quiescenti. Pure molto intensa essa è nelle foglie e nei fusti del medesimo.

L'idrolisi dell'adenosin-5-fosfato, promossa dal preparato ottenuto da *Aspergillus oryzae*, segue la cinetica di una reazione di ordine zero solo inizialmente. Ha un *optimum* a pH 6,1, essendo il sistema regolatore della reazione una soluzione di veronal sodico-acetato sodico, secondo Michaelis. La temperatura ottimale è di 47°C. Aumentando la concentrazione dell'enzima, aumenta l'attività adenosin-5-fosfatasi, così come si nota, entro certi limiti, aumentando la concentrazione del substrato. La velocità della reazione è massima con adenosin-5-fosfato 0,011 M.  $Mg^{++}$  alla concentrazione di 0,2 M attivano debolmente la velocità della reazione;  $Ca^{++}$  alla concentrazione di 0,1M la inibiscono del 30 %, mentre  $Mn^{++}$  0,001 M risultano indifferenti.

Gruppi carbonilici non sembrano indispensabili per l'attività dell'enzima: indifferente all'azione di idrossilamina 0,004 M, dimedone 0,02 M, cianuro 0,1 M, l'adenosin-5-fosfatasi è inibita solo del 15 % dalla semicarbazide 0,02 M.

Inibitori di enzimi tiolici, monoiodacetato 0,01 M, iodacetamide 0,01 M, p-cloromercuribenzoato 0,007 M, arsenito 0,04 M, non modificano l'attività dell'adenosin-5-fosfatasi; solo o-iodosobenzoato 0,009 M inibisce moderatamente (21 %). Però cisteina 0,03 M è senza effetto e fluoruro sodico 0,06 M inibisce del 36 %. Florizina 0,006 M è indifferente.

Di composti formanti chelati con metalli, senza effetto sono risultati: 8-ossichinolina 0,017 M,  $\alpha$ -benzoinmonossima 0,022 M, dimetilgliossima 0,043 M, salicilaldossima 0,036 M, acido solfosalicilico 0,02 M, nitrato di tallio 0,2 M, acido rubeanico 0,04 M, 2,4-dinitrosoresorcina 0,03 M, urotropina 0,05 M, acetilacetone 0,05 M, idrossietilendiaminotriacetato 0,014 M e diidrossietilglicina 0,036 M. Inibizione hanno svolto invece dietilditiocarbamato 0,022 M (22 %), etilendiaminotetracetato 0,013 M (62 %) e idrossietilaminodiacetato 0,022 M (15 %), talchè può sospettarsi una partecipazione di qualche metallo alla reazione. Però nè l'aggiunta di  $Mg^{++}$  ( $4 \times 10^{-7}$  M), o di  $Mn^{++}$  ( $1,8 \times 10^{-7}$  M), o di  $Cu^{+}$  ( $1,6 \times 10^{-6}$  M), o di  $Cu^{++}$  ( $1,6 \times 10^{-7}$  M), o di  $Fe^{++}$  ( $1,8 \times 10^{-7}$  M), o di  $Fe^{+++}$  ( $1,8 \times 10^{-7}$  M) ha ripristinato l'attività perduta con la dialisi contro acqua distillata protratta per 18 ore.

L'idrolisi dell'adenosin-5-fosfato per catalisi dell'adenosin-5-fosfatasi dei cotiledoni quiescenti di *Amygdalus communis* segue la cinetica di una reazione di ordine zero nei primi 60 minuti. Il suo pH ottimale è 3,88. La temperatura a cui l'attività è massima è 57°C. Il preparato, dializzato per 16 ore contro acqua corrente, perde una notevole parte della sua attività (41 %). Tentativi di separazione della adenosin-5-fosfatasi mediante precipitazione con etanolo e trattamento con allumina e caolino non sono riusciti.

**Zoologia.** — *Schema di classificazione dei protozoi e proposta di una nuova classe* (\*). Nota di ETTORE BIOCCA, presentata (\*\*) dal Socio V. PUNTONI.

Il Doflein (1901) suddivise il Phylum *Protozoa* in due Subphyla distinti e precisamente *Plasmodroma* e *Ciliophora*. La suddivisione veniva basata fondamentalmente sui diversi sistemi di locomozione; i plasmodromi riunivano i rizopodi, flagellati e sporozoi, mentre i ciliofori comprendevano i ciliati. Questo schema è stato seguito da Wenyon (1926) e dalla maggior parte degli studiosi, ma la evoluzione delle nostre conoscenze ha portato a stabilire che il significato funzionale dei nuclei rappresenta un carattere molto più importante che non il diverso sistema di locomozione. La recentissima classificazione di Piekarski (1954) divide il Phylum *Protozoa* nel Subphylum *Plasmodroma* e *Heterokaryota*. Nel primo Subphylum vengono inclusi, oltre ai rizopodi, flagellati e sporozoi anche un gruppo di ciliati, le opaline, provviste di nuclei ad analogo significato funzionale; nel secondo Subphylum invece sono riuniti solo quei ciliati con nuclei a diverso significato funzionale. I caratteri legati agli organi di movimento mantengono tutto il loro valore nella definizione di alcune classi.

La nuova suddivisione quindi è completamente diversa da quella di Doflein, è più comprensiva ed accettabile. Proponiamo dunque di abbandonare anche il nome *Plasmodroma*, che, come il nome *Ciliophora*, non ha più ragione di esistere e di dividere il Phylum *Protozoa* nella maniera seguente:

Phylum *Protozoa*.

Subphylum *Homokaryota*. Protozoi con un nucleo o con più nuclei ad analogo significato funzionale.

Subphylum *Heterokaryota* (Hickson 1903) Piekarski, 1954. Protozoi con nuclei a diverso significato funzionale.

Una grave lacuna esiste nella classificazione dei protozoi, poiché non è possibile trovare sistemazione soddisfacente per importanti gruppi di protozoi parassiti, quali i toxoplasmi, piroplasmii, sarcosporidi ecc.

Lo stesso Piekarski (1954) ha proposto la creazione di una nuova classe *Haemamoeba* (nome usato un tempo per il genere *Plasmodium* poi rimasto libero) destinata a raccogliere babesie e teilerie. Le ragioni che hanno indotto Piekarski a togliere i piroplasmii dagli sporozoi sono, secondo noi, valide. Esistono però altri gruppi di protozoi e precisamente i toxoplasmi e i sarcosporidi, che presentano molti caratteri in comune con i piroplasmii e la cui classificazione non è ancora soddisfacente. L'inclusione dei toxoplasmi e probabilmente dei sarcosporidi tra i tripanosomidi, sostenuta per i toxoplasmi brillantemente da Westphal (1954, 1955) non ci riesce chiara, poiché

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

non riteniamo ammissibile classificare come flagellati questi protozoi i quali in nessun periodo del loro ciclo vitale possiedono veri flagelli, dotati delle caratteristiche affinità tintoriali.

Riteniamo che i piroplasmii non dovrebbero essere considerati una classe a sé, ma probabilmente un ordine di una classe più comprensiva che includa toxoplasmi, sarcosporidi, ecc. Questa classe sarebbe composta da protozoi parassiti, sprovvisti dei comuni organelli di locomozione (pseudopodi, flagelli o ciglia), che si moltiplicano abitualmente per scissione binaria.

Esistono anche altri importanti caratteri comuni a molti protozoi di questa classe: la tendenza dei singoli elementi ad assumere la forma allungata od arcuata, la difficoltà ad essere coltivati nei terreni artificiali di cultura, la larghissima distribuzione geografica, la mancanza di un ciclo di vita in un artropode. Appunto questo ultimo carattere permette di differenziare i piroplasmii dagli altri.

Proponiamo perciò questo schema di classificazione dei protozoi:

## Phylum PROTOZOA.

Subphylum **HOMOKARYOTA** subph. nov..

RHIZOPODEA v. Siebold, 1845.

MASTIGOPHOREA Diesing, 1865.

TOXOPLASMATEA cl. nov.

SPOROZOEAE Leuckart, 1879.

CNIDOSPORIDIEAE Doflein, 1901.

CILIATOIDEAE Ulrich, 1950.

Subphylum **HETEROKARYOTA** (Hickson 1903) Piekarczyki, 1954.

CILIATEAE Perty, 1852.

SUCTORIEAE Claparède e Lachman, 1858.

La classe TOXOPLASMATEA e i suoi ordini verrebbero definiti nella seguente maniera.

Classe TOXOPLASMATEA cl. nov. *Protozoi parassiti, sprovvisti dei comuni organelli di locomozione; moltiplicazione abitualmente asessuata e non per schizogonia.*

1) Ordine **Toxoplasmatida** ord. nov. *Protozoi con i caratteri della classe, parassiti di cellule o di tessuti di vertebrati; generalmente sprovvisti di specificità dell'ospite. Ciclo di vita in artropodi o altri ospiti intermedi assente o ancora ignoto.*

Sottordine **Toxoplasmatina** subord. nov. *Protozoi parassiti di vertebrati nelle cui cellule si moltiplicano formando pseudocisti.*

Famiglia TOXOPLASMATIDAE.

Genere *Toxoplasma*.

*Nota.* - Per le terminazioni dei nomi di classi, ordini e sottordini, abbiamo seguito lo schema proposto da Pearse (1936).

Sottordine **Sarcosporidina** (Balbiani 1882) *Protozoi parassiti di vertebrati: si moltiplicano formando ammassi (cisti) rivestiti da pareti complesse.*

Famiglia SARCOSPORIDAE.

Genere *Sarcocystis*, *Besnoitia*, (*Globidium*?).

2) Ordine **Piroplasmida** Reichenow, 1953. *Protozoi con i caratteri della classe generalmente parassiti di cellule ematiche di vertebrati e con specificità dell'ospite; parte del ciclo di vita in artropodi.*

Famiglia BABESIIDAE.

Genere *Babesia*.

Famiglia THEILERIIDAE.

Genere *Theileria*.

CONSIDERAZIONI. — La proposta di creazione di una nuova classe di protozoi e lo schema di classificazione che abbiamo riportato sono stati sottoposti all'attenzione di numerosi specialisti, che vivamente ringraziamo. Abbiamo seguito nel nostro schema soprattutto i suggerimenti di A. Chabaud dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Parigi e di Piekarski dello Istituto di Parassitologia dell'Università di Bonn.

Sono state sollevate da alcuni studiosi anche critiche contro il nostro tentativo di classificazione. Lo stesso Chabaud ci ha fatto osservare che non è possibile escludere che i caratteri comuni ai protozoi parassiti, da noi riuniti nella classe *Toxoplasmatea*, possano essere dovuti ad adattamento parassitario; D'Ancona infine, pur considerando manchevole l'attuale ordinamento degli sporozoi, preferisce elencare i toxoplasmi, i sarcosporidi ecc. come affini più o meno agli altri sporozoi, poiché non condivide il nostro punto di vista di attribuire al sistema di moltiplicazione un'importanza così decisiva e tale da giustificare la creazione di una nuova classe.

Ci rendiamo perfettamente conto di tutta la serietà di queste osservazioni, ma pensiamo che se anche la nostra proposta non potrà essere esente da giuste critiche, per lo meno contribuirà ad affrontare e risolvere uno dei capitoli ancora più confusi della Protozoologia.

RINGRAZIAMENTI. — Ringraziamo vivamente i seguenti protozoologi per i consigli e per le critiche che hanno voluto amichevolmente rivolgerci durante l'elaborazione del nostro lavoro: Babudieri B., Chabaud A., Corradetti, A., D'Ancona U., Frenkel J. K., Galliard H., Piekarski G., Puntoni V. e Zavattari E.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] DOFLEIN F. (1901). *Die Protozoen als Parasiten und Krankheitserreger*. G. Fischer Jena.
- [2] PIEKARSKI G. (1954) *Lehrbuch der Parasitologie*. Springer, Berlin.
- [3] WENYON C. M. (1926). *Protozoology*. Ballière, Tindall and Cox, London.
- [4] WESTPHAL A. (1954). *Zur Systematik von Toxoplasma gondii* « Zeitschr. f. trop. Med. u. Parasitol », 5, 1-40 (estratto).
- [5] WESTPHAL A. (1955). *Die Toxoplasmen als Trypanosomidae*, « Atti del VI Congr. inter. di Microbiol. », 5, 379-381.

**Zoologia.** — *Opisthorchis starkovi* n. sp. *parassita di Felis serval* (\*). Nota di ETTORE BIOCCA e MARIA PIA BENETTI, presentata (\*\*) dal Socio V. PUNTONI.

Durante ricerche naturalistiche sugli animali morti nel Giardino Zoologico di Roma abbiamo trovato due volte nel fegato (vie biliari e cistifellea) di *Felis serval*, morti poco dopo il loro arrivo dalla Somalia (zona del Basso Uebi Scebeli), rispettivamente nel dicembre 1951 e nel febbraio 1952, numerosi trematodi del genere *Opisthorchis*. I caratteri di questi parassiti giustificano, secondo noi, la creazione di una nuova specie per la quale proponiamo il nome *Opisthorchis starkovi* n. sp. per ricordare il nostro collaboratore O. Starkoff, che ha eseguito l'autopsia e la raccolta dei parassiti.

#### DESCRIZIONE DI *Opisthorchis starkovi* n. sp.

Ospite definitivo: *Felis serval*.

Localizzazione: Vie biliari e cistifellea.

Luogo di provenienza: Giardino Zoologico di Roma, provenienza dalla Somalia (Basso Uebi Scebeli).

Esemplare tipo e cotipi depositati presso l'Istituto di Parassitologia, Università di Roma.

*Esemplare tipo:*

*Corpo* lanceolato appuntito nel suo terzo anteriore, con estremità posteriore arrotondata. Lunghezza mm 6,1. Larghezza mm 1,7.

*Ventosa orale* terminale, di forma elissoidale, con diametro trasverso leggermente maggiore. Lunghezza mm 0,20. Larghezza mm 0,28.

*Ventosa ventrale* situata nel terzo anteriore del corpo in stretta vicinanza dell'unione del terzo anteriore col terzo medio, di forma anche essa elissoidale, di dimensioni leggermente inferiori a quelle della ventosa orale. Lunghezza mm 0,17. Larghezza mm 0,25.

*Faringe* leggermente allungato in senso antero-posteriore. Lunghezza mm 0,18. Larghezza mm. 0,15.

*Esofago:* lunghezza mm 0,33. La lunghezza dell'esofago è alquanto oscillante nei vari esemplari; di regola non supera di due volte la lunghezza del faringe.

*Intestino* con ciechi semplici a pareti piuttosto sottili; i ciechi hanno un decorso leggermente divergente all'inizio, successivamente parallelo ai rispettivi margini del corpo, fin verso l'estremità posteriore del corpo stesso, dove i due opposti ciechi si riavvicinano decisamente. Le anse uterine ripiene di uova e i lobi dei testicoli spingono spesso i ciechi all'esterno e li costringono a descrivere un decorso alquanto ondulato e tortuoso.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

*Vescicola escrettrice* sbocca all'estremità posteriore del corpo e descrive una lunga linea ad S insinuandosi e passando sotto i due testicoli.

*Vitellogeni* disposti ai lati del corpo, esternamente ai ciechi; raramente qualche follicolo interno arriva a raggiungere i ciechi e a ricoprirli parzialmente. I vitellogeni hanno inizio sempre posteriormente alla ventosa ventrale, da cui distano in genere almeno da un minimo di due volte la lunghezza della ventosa ventrale stessa ad un massimo di sei volte ed oltre. Posteriormente terminano ad altezze variabili a livello dell'ovaio, che in qualche esemplare non raggiungono e che in qualche altro sorpassano chiaramente.

Nell'esemplare tipo i vitellogeni hanno inizio mm 0,90-0,95 dal margine posteriore della ventosa ventrale e terminano all'altezza della metà della lunghezza dell'ovaio.

*Vitellodotti* trasversi si dipartono all'altezza dell'ovaio verso il quale si dirigono.

*Ovaio* multilobato, con lobi di forma caratteristica costituiti da espansioni appiattite disposte su piani diversi e terminanti a volte in piccole digitazioni. Queste espansioni sono in comunicazione tra loro verso la parte centrale dell'ovaio, senza che però sia chiaramente visibile un evidente corpo centrale da cui abbiano origine. Nel suo complesso l'ovaio è disposto in senso trasversale nella parte mediana del corpo, in vicinanza dell'unione del terzo medio col terzo posteriore del corpo, avanti ai testicoli.

*Canale di Laurer* tubulare, piuttosto contorto, non sempre chiaramente visibile, si apre posteriormente all'ovaio e in genere verso il lato sinistro del corpo.

*Ricettacolo seminale* molto voluminoso, sacciforme, schiacciato nel senso antero-posteriore; ha origine sotto l'ovaio qualche volta verso la metà dell'ovaio stesso, più spesso verso la metà sinistra dell'ovaio e si dirige trasversalmente verso il lato destro del corpo, leggermente obliquo verso il basso; viene così a disporsi tra ovaio e testicolo anteriore.

*Ghiandola di Mehlis* molto sviluppata, di forma raggiata a ventaglio, situata in posizione immediatamente anteriore all'ovaio, con tendenza ad inclinarsi leggermente verso il lato sinistro del corpo in direzione cioè opposta a quella del ricettacolo seminale.

*Utero* descrive con le sue anse una linea sinuosa tra l'ovaio e la ventosa ventrale. Le anse ripiene di uova raggiungono i ciechi spingendoli spesso all'esterno e facendo loro assumere un decorso leggermente tortuoso. In qualche esemplare gli angoli esterni delle anse uterine si sovrappongono chiaramente ai ciechi, i quali però non sono mai completamente nascosti da esse. Nell'ultima parte del loro decorso ascendente le anse si spostano verso la parte sinistra del corpo; arrivate all'altezza della ventosa ventrale, passano dietro ad essa e terminano immediatamente al di sopra del margine superiore della ventosa, a sinistra e accanto allo sbocco delle vie sessuali maschili.

*Testicoli* disposti posteriormente all'ovaio e al ricettacolo seminale, leggerissimamente obliqui uno dietro l'altro, mai in contatto tra loro; in

genere con quattro lobi il testicolo anteriore e con cinque il testicolo posteriore. I lobi sono eccezionalmente sviluppati e completamente separati l'uno dall'altro con incisure interlobari profondissime e con tendenza a disporsi prevalentemente in senso trasversale, in maniera che i lobi opposti dello stesso testicolo spesso raggiungono i ciechi ai due lati del corpo, spingendoli all'esterno, a volte sovrapponendosi ad essi. I lobi sono a volta frastagliati e suddivisi in lobuli. La forma dei testicoli è varia, a croce, a tridente, a stella, ecc. in conseguenza della lunghezza e della diversa posizione che possono assumere i vari lobi. La eccezionale larghezza dei testicoli li fa apparire uno dietro l'altro; in qualche esemplare è però possibile osservare il testicolo anteriore spostato leggermente verso la parte sinistra del corpo stesso. Nell'esemplare tipo la distanza minima ovaio-testicolo anteriore è di mm 0,08; la distanza minima testicolo posteriore-estremità posteriore del corpo è di mm 0,41.

*Deferenti* originano dai testicoli e disegnano una linea tortuosa ascendente chiaramente visibile nell'ultimo tratto, in prossimità della ventosa ventrale verso il lato destro del corpo, dalla parte opposta a quella occupata dalle ultime anse uterine; sboccano a livello del margine superiore della ventosa ventrale, a destra e accanto allo sbocco delle vie genitali femminili.

*Uova* misurano mm 0,016-0,018 di lunghezza per mm 0,008-0,011 di larghezza.

#### TABELLA.

MISURAZIONI ESEGUITE SU N.39 ESEMPLARI di *Opisthorchis starkovi*.

|                               |                           |
|-------------------------------|---------------------------|
| Verme                         | Faringe                   |
| Lunghezza: mm 4,5-9,8         | Lunghezza: mm 0,13-0,20   |
| Larghezza massima: mm 1,2-2,2 | Larghezza: mm 0,11-0,19   |
| Ventosa orale                 | Esofago                   |
| Lunghezza: mm 0,13-0,26       | Lunghezza: mm 0,15-0,36   |
| Larghezza: mm 0,20-0,33       |                           |
| Ventosa ventrale              | Uova                      |
| Lunghezza: mm 0,14-0,27       | Lunghezza: mm 0,016-0,022 |
| Larghezza: mm 0,17-0,29       | Larghezza: mm 0,008-0,011 |

#### DIAGNOSI DIFFERENZIALE.

La specie da noi descritta appartiene al genere *Opisthorchis* pur presentando alcuni caratteri di atipicità a carico delle gonadi, che la allontanano da tutte le specie conosciute.

Solamente due specie hanno alcuni punti di somiglianza con *O. starkovi* e precisamente *O. felineus* e *O. viverrini*.



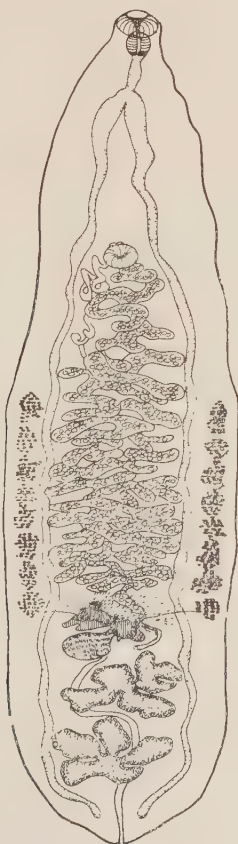
2 mm

*Opisthorchis starkovi* n. sp.  
(Fotografia)



3 mm

*Opisthorchis felineus*.  
(Fotografia)



2 mm

*Opisthorchis starkovi* n. sp.  
(Disegno)



Nella zona di Roma *O. felineus* è particolarmente diffuso tra i gatti randagi (circa il 9% secondo le osservazioni eseguite nel nostro Istituto); è stato così facile raccogliere centinaia di esemplari di *O. felineus* ed eseguire un confronto con la nuova specie.

*O. starkovi* non può essere confuso con *O. felineus* per numerosi caratteri di cui i più evidenti sono:

1° la forma dell'ovaio, globoso tondeggiante in *O. felineus*, lobato e frastagliato in *O. starkovi*;

2° la posizione, la forma e dimensioni dei testicoli disposti su una linea chiaramente obliqua e con lobi piuttosto piccoli in *O. felineus*, disposti su linea leggerissimamente obliqua uno dietro l'altro, molto più larghi, con lobi molto più grandi in *O. starkovi*;

3° le dimensioni maggiori delle uova in *O. felineus* (0,020-0,032 per 0,010-0,015).

Altri caratteri differenziali sono: la diversa posizione della ventosa ventrale rispetto alla lunghezza del corpo; la forma dei follicoli nei vitellogeni; i ciechi più rettilinei; la diversa posizione e forma del ricettacolo seminale; ecc.

*O. viverrini* fu trovato per la prima volta al Giardino Zoologico di Parigi da Poirier nel 1886 in un piccolo felino asiatico, *Felis viverrina*. Il verme accuratamente descritto da Poirier, è stato successivamente studiato da altri autorevoli autori quali Blanchard (1895), Stiles e Hassal (1896), Leiper (1915), ecc. È stato dimostrato che questa specie può parassitare anche l'uomo e le recenti osservazioni di Sadun (1955) in Thailandia mostrano una paurosa diffusione tra la popolazione locale.

Grazie alla gentilezza della London School of Hygiene and Tropical Medicine abbiamo potuto studiare alcuni esemplari di *O. viverrini* provenienti da infestazioni umane e confrontarli con la nostra specie. Neveu-Lemaire (1936) descrive *O. viverrini* come ricoperto di piccole spine, cosa che non abbiamo potuto confermare negli esemplari da noi studiati e che non risulta nella descrizione degli altri autori. Pensiamo si tratti di una svista tipografica di Neveu-Lemaire.

*O. starkovi* può essere differenziato da *O. viverrini* soprattutto per i seguenti caratteri:

1° forma e dimensioni dei testicoli che in *O. viverrini* sono molto simili a quelli di *O. felineus* e per i quali valgono i caratteri differenziali ricordati a proposito di questa specie;

2° vescicola escritrice che in *O. viverrini* e in *O. felineus* si insinua tra i testicoli, mentre in *O. starkovi* passa sotto ai testicoli stessi;

3° lunghezza dell'esofago che può essere lungo fino a tre volte la lunghezza del faringe in *O. viverrini*, mentre di regola non supera mai di due volte la lunghezza del faringe in *O. starkovi*;

4° ventose più grandi in *O. viverrini* che in *O. starkovi*; in *O. viverrini* (negli esemplari da noi studiati) le ventose, orale e ventrale, sono eguali o leggermente più grande la ventrale della orale; in *O. starkovi* è la orale più grande della ventrale;

5° vitellogeni rappresentati da follicoli più tondeggianti e raggruppati in ammassi distinti chiaramente in *O. viverrini*; follicoli allungati trasversalmente e riuniti in ammassi molto più ravvicinati in *O. starkovi*;

6° dimensioni diverse delle uova, più grandi in *O. viverrini* (0,019-0,026 per 0,011-0,017) che in *O. starkovi* (0,016-0,022 per 0,008-0,011). Inoltre anche la forma dell'ovaio, la posizione del ricettacolo seminale, ecc. non corrispondono esattamente nelle due specie.

#### BIBLIOGRAFIA.

BLANCHARD R. (1895). *Animaux parasites*, « Bull. Soc. zool. France », 20, 217.

LEIPER R. T. (1915). *Notes on the occurrence of parasites presumably rare in man*, « Journ. R. Army Med. Corps », 24, 569-575.

NEVEU-LEMAIRE M. (1936). *Traité d'Helminthologie médicale et vétérinaire*, 115.

POIRIER J. (1886). *Trematodes nouveaux ou peu connus*, « Bull. soc. philom. », Paris, 10, 20-41.

SADUN E. H. (1955). *Studies on « Opisthorchis viverrini » in Thailand*, « Am. Jour. of Hygiene », 62, n. 2, 81-115.

STILES CH. W. and HASSALL A. (1896). *Notes on parasites*, n. 42, Veterin. Mag. 3, 151-155; cit. SKRJABIN e coll. (1950). *Trematodi, ecc.* Ed. « Acc. Scienze Mosca », 4, 151.

**Fisiologia vegetale.** — *Sui rapporti di interdipendenza tra gli effetti dell'auxina sul glutatione, sulla respirazione, sul tenore in legami fosferici ad alto contenuto in energia e sulla crescita*<sup>(\*)</sup>. Nota di ERASMO MARRÈ, GIORGIO FORTI e ORESTE ARRIGONI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio S. TONZIG.

Ricerche eseguite recentemente in questo Istituto hanno messo in evidenza come l'azione dell'auxina sulla crescita e sull'attività respiratoria sia accompagnata da variazioni ben definite a carico di tre sistemi metabolici di basilare importanza: quello dell'acido ascorbico [1, 2], quello del glutatione [3, 4], e quello degli adenosinfosfati [5]. Il parallelismo tra gli effetti delle auxine sulla crescita e sul consumo di ossigeno, e quelli su questi sistemi, — insieme alla considerazione del loro necessario intervento nella regolazione di una funzione così complessa come è l'accrescimento — ci ha portati alla conclusione di uno stretto rapporto di interdipendenza tra i due ordini di fenomeni. D'altra parte, numerosi dati, di altri Autori come pure nostri, ci dimostrano come i metabolismi dell'acido ascorbico, del glutatione e degli adenosinfosfati siano strettamente collegati e interdipendenti tra di loro, per cui variazioni eventuali indotte dall'auxina su uno di essi non possono non ripercuotersi sugli altri; situazione che deriva naturalmente dalla stessa

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

profondità e molteplicità d'aspetti del compito che a questi sistemi compete nel quadro della dinamica metabolica e strutturale della cellula.

Queste considerazioni impostano così un problema di estrema complessità ma di altrettanto grande interesse: e cioè quello dell'inquadramento di queste singole reazioni nei loro rapporti di dipendenza dall'azione primaria dell'auxina, delle loro relazioni reciproche, e, infine, della misura in cui esse direttamente intervengono nelle manifestazioni finali, fisiomorfologiche, dell'azione dell'ormone. Il che implicherebbe, in altri termini, la ricostruzione a livello biochimico della via percorsa dallo stimolo auxinico.

Le ricerche riferite in questa Nota rappresentano un primo tentativo verso la soluzione di questo problema. In esse gli eventuali rapporti di interdipendenza tra le reazioni della crescita, della respirazione e dei sistemi del glutatione e degli adenosinfosfati, sono stati studiati mediante l'esame comparativo del loro andamento nei primi momenti del trattamento auxinico.

#### MATERIALE E METODI.

Come materiale abbiamo utilizzato segmenti lunghi 1 cm., e preparati secondo la tecnica consueta, della parte apicale del terzo internodio di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum*, var. Alaska) coltivate per 7-8 giorni in camera oscura, termoregolata a 25° C. I segmenti, lavati in acqua corrente, venivano lasciati per 1-2 ore in acqua distillata, quindi distribuiti in capsule Petri o, per le esperienze sulla respirazione, in vaschette di Warburg contenenti acqua distillata, per i controlli, o soluzioni di IAA a concentrazione di 10<sup>-5</sup> in proporzione di circa 0,5 cc di liquido per segmento. Il successivo trattamento veniva eseguito, in tutti i casi, all'oscurità e a 25° C.

Come nelle ricerche precedenti, glutatione ossidato e ridotto sono stati determinati amperometricamente secondo Stricks e Kolthoff [6], e le variazioni in ATP (o meglio, quelle dei legami fosforici ad alto contenuto energetico) secondo il metodo di Crane e Lipmann [7], come adattato da Forti ai tessuti vegetali [8]. L'azione dell'auxina sull'attività respiratoria è stata determinata aggiungendo l'ormone al mezzo dal braccio laterale delle vaschette di Warburg dopo un periodo di ambientamento tale da permettere il raggiungimento di un valore costante del consumo di ossigeno da parte dei segmenti (circa 90 minuti primi). I valori del contenuto in glutatione ossidato e ridotto e in legami fosforici ricchi di energia, e l'attività respiratoria sono stati sempre riferiti all'unità di peso fresco dei segmenti all'inizio di ogni esperienza; sono quindi da considerare come indipendenti dalle successive variazioni di volume dei segmenti. Le variazioni dell'attività di crescita sono state studiate determinando, a periodi progressivamente crescenti dall'inizio dell'esperienza, l'aumento in peso fresco di lotti di 8-10 segmenti che, per la pesata, venivano prelevati rapidamente e delicatamente, e asciugati su carta da filtro, e disposti in un pesafiltro, quindi rapidamente pesati e riportati nel mezzo liquido iniziale. Questo metodo, che permette di seguire con semplicità le varie fasi di crescita per ogni singolo lotto di materiale, si è rivelato molto preciso, rapido e conveniente al nostro scopo.

Le abbreviazioni usate in questa Nota sono: IAA, acido indolacetico; GSH e GS-SG, glutatione ridotto e ossidato; ATP e ADP, adenosintrifosfato e adenosindifosfato; ~P, legami fosforici ricchi di energia.

#### RISULTATI.

I grafici della fig. 1 mostrano l'andamento della crescita, del tenore in glutatione ridotto e ossidato, del consumo di ossigeno e del contenuto in ~P, in segmenti mantenuti in acqua distillata e rispettivamente in soluzione

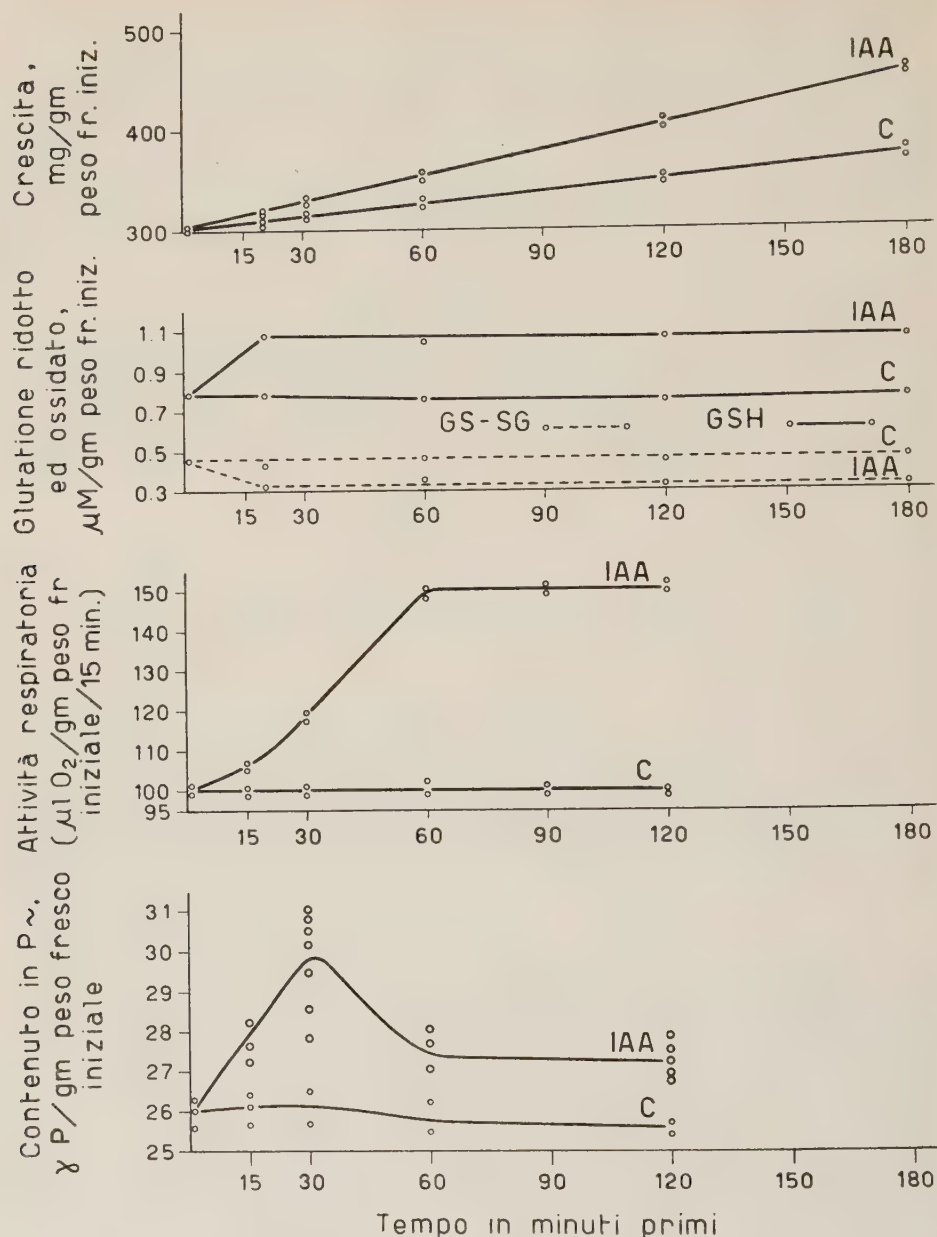


Fig. 1. — Variazioni della crescita, del tenore in GSH e GS-SG, dell'attività respiratoria e del tenore in  $\infty$  P in segmenti di internodio di pisello in IAA a concentrazione 10 p.p.m. e rispettivamente in acqua distillata (controlli, C.).

di IAA per intervalli di tempo da 15 minuti primi a tre ore, in condizioni strettamente controllate e costanti di materiale, temperatura, rapporto tra numero dei segmenti e volume del liquido. I fatti salienti a carico delle singole reazioni studiate possono riassumersi così:

a) La crescita, come aumento di peso fresco (e quindi di volume, o assunzione di acqua), già relativamente attiva nei controlli in acqua, risponde quasi immediatamente alla presenza dell'auxina nel mezzo, passando a valori quasi doppi di quelli dei controlli. Inoltre, e per tutto il periodo considerato, la velocità della crescita si mantiene singolarmente costante, sia per i segmenti in acqua come per quelli in IAA.

b) Glutathione ridotto e glutathione ossidato mantengono livelli pressoché costanti nei segmenti in acqua. L'auxina induce una rapida variazione nell'equilibrio tra le due forme, aumentando considerevolmente quella ridotta alle spese di quella ossidata, cosicché il rapporto GSH/GS-SG passa da un valore di circa due ad un valore di quattro. Questo spostamento dello stato di riduzione del sistema del glutathione ad opera dell'auxina si attua con grande rapidità, tanto che a 15 minuti primi dall'inizio del trattamento ha già raggiunto il suo valore più alto, che si mantiene poi pressoché invariato per tutto il periodo seguente.

c) L'attività respiratoria (come consumo di  $O_2$ ), pur mostrando una lieve tendenza alla diminuzione, si mantiene relativamente costante nei controlli in acqua. In presenza di auxina sono riconoscibili, per contro, tre fasi nettamente distinte: in una prima fase, che potremmo chiamare di induzione e che si estende per circa 15 minuti, la respirazione aumenta prima lentamente quindi con ritmo sempre più accelerato; in una seconda, dal 15° minuto circa fino al termine della prima ora di trattamento, il ritmo dell'accelerazione rispetto i controlli rimane costante; infine, in una terza fase, dopo aver raggiunto un'intensità del 30 % circa superiore a quella dei controlli, la respirazione dei segmenti in auxina si stabilizza su questo valore.

d) Il comportamento dei legami fosforici ad alto contenuto energetico, anch'esso relativamente costante nei controlli, presenta nei saggi in auxina un andamento nettamente distinto da quello degli altri fenomeni finora considerati. Esso infatti aumenta rapidamente, raggiungendo un massimo in corrispondenza del termine della prima mezz'ora di trattamento; quindi bruscamente cade fino a un livello di poco superiore a quello dei controlli, e si mantiene su questo valore per tutto il periodo successivo, con una solo lieve tendenza (rilevabile del resto nei controlli) ad una ulteriore diminuzione.

Ricordiamo, a proposito del significato da attribuire a queste variazioni del tenore in  $\sim P$ , come esse sembrano, secondo ogni probabilità, da interpretare come dovute a variazioni del rapporto ATP/ADP; e cioè non già a cambiamenti del contenuto globale in adenosinnucleotidi, bensì a spostamenti dell'equilibrio tra reazioni sintetiche, accoppiate al metabolismo ossidativo, e reazioni accoppiate all'utilizzazione dei  $\sim P$  nel lavoro metabolico cellulare.

L'esame comparativo dell'andamento nel tempo dei fenomeni sopra descritti riesce più agevole quando le variazioni indotte dall'auxina vengano espresse come variazioni percentuali rispetto i controlli. I grafici della

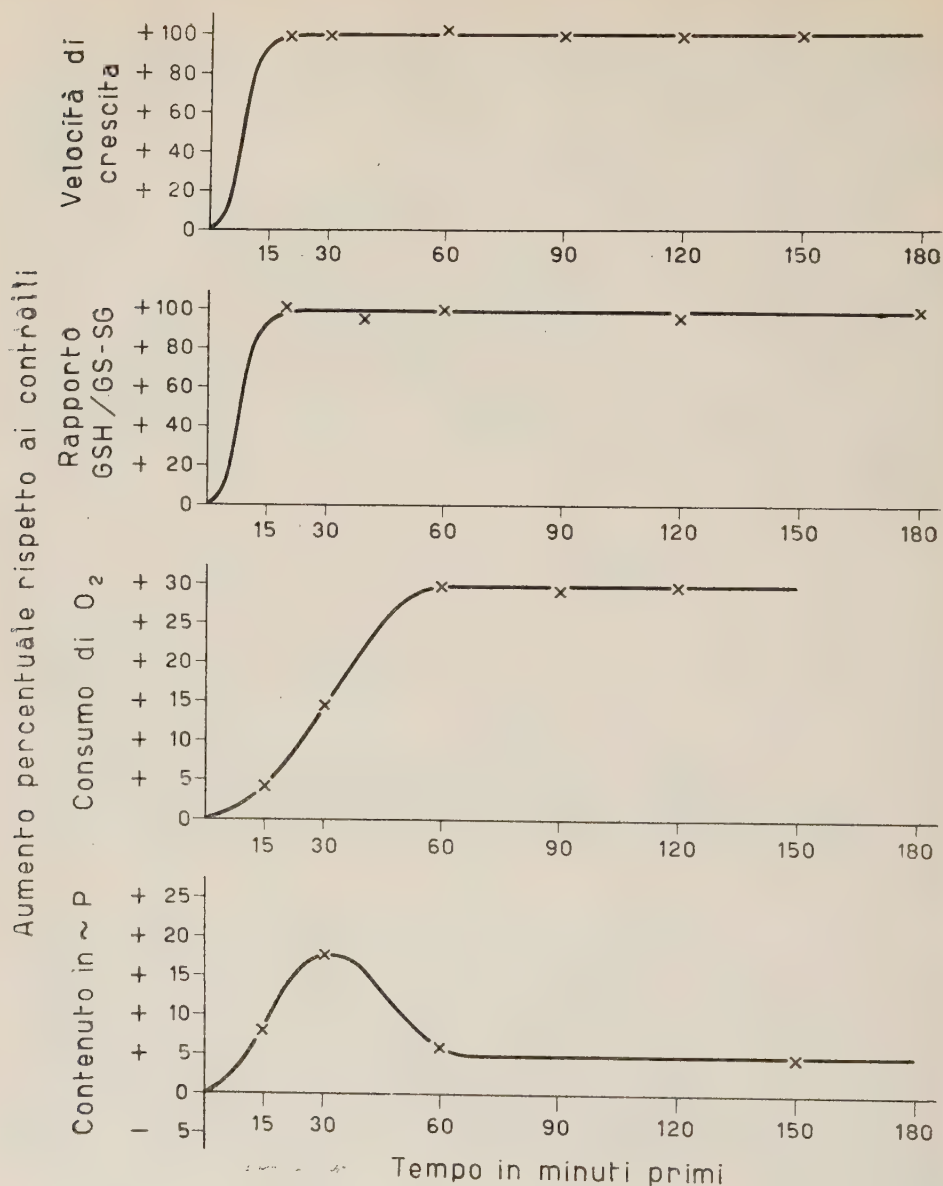


Fig. 2. — Variazioni percentuali indotte da IAA a concentrazioni 10 p.p.m., rispetto al controllo in acqua distillata della velocità di crescita, del rapporto GSH/GS-SG., dell'attività respiratoria e del contenuto in  $\sim P$ .

fig. 2, costruiti seguendo questo criterio, rivelano al primo esame alcuni punti di maggior interesse, che possiamo così riassumere:

1° Le quattro reazioni considerate, malgrado siano tutte già ben evidenti dopo solo 15 minuti primi di trattamento, pure raggiungono i rispettivi massimi in periodi notevolmente diversi: brevissimi per la crescita e il glutathione (meno di 15 minuti), di circa mezz'ora per il tenore in  $\sim P$ , ed esteso ad 1 ora per il consumo di ossigeno.

2° L'andamento dell'attivazione da auxina della crescita, mentre appare strettamente correlato con le variazioni del rapporto GSH/GS-SG, sembra invece nettamente distinto da quelli della respirazione e del contenuto in  $\sim P$ . Di fatto l'attività di crescita in presenza di auxina si mantiene invariata per valori di attivazione respiratoria che vanno da meno del 5 % (15° minuto) a circa il 30 % (30° minuto), e per incrementi del contenuto in  $\sim P$  dal 6 % (15° minuto) al 17 % (30° minuto) e quindi di nuovo al 5 % (2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> ora).

3° L'esame delle curve delle variazioni indotte dall'auxina sulla respirazione e sul contenuto in  $\sim P$  (fenomeni ovviamente associati, seppure il secondo dipenda dal primo, come detto sopra, solo per una componente) rivelano pure delle singolari e interessanti divergenze. Solo le prime fasi dell'attivazione respiratoria si accompagnano ad un aumento del tenore in  $\sim P$ . Dal 30° al 60° minuto, periodo in cui la respirazione sale da un livello del 14 ad uno del 30 % superiore a quello dei controlli, il contenuto in  $\sim P$  ridiscende dal suo massimo fino ad un valore appena più alto di quello dei segmenti in acqua. In una terza fase (seconda e terza ora di trattamento) l'attivazione respiratoria si mantiene costante sul suo massimo livello; e anche il contenuto in  $\sim P$  appare praticamente stabilito, ma su un livello relativamente ridotto, per quanto ancora superiore a quello dei controlli.

#### DISCUSSIONE E CONCLUSIONI.

Nel quadro di insieme sopra delineato un aspetto richiama particolare attenzione tanto per la sua singolarità quanto per il fatto che dalla sua comprensione dipende l'interpretazione degli altri punti del problema. Esso consiste nell'apparente mancanza di correlazione tra crescita, metabolismo ossidativo e metabolismo energetico, che sembrano influenzati dall'auxina in modo del tutto indipendente: e ciò in palese contraddizione con i numerosi dati che provano una stretta interdipendenza tra i tre ordini di fenomeni. Un esame più attento ci sembra però suggerisca considerazioni che, oltre risolvere questa contraddizione, portano qualche luce anche per quanto riguarda lo stesso meccanismo della crescita.

Consideriamo in primo luogo l'andamento delle curve della respirazione e del contenuto in legami ricchi di energia. In un primo periodo esse salgono concordemente; quindi, mentre la respirazione continua a salire, il tenore in  $\sim P$  diminuisce. L'interpretazione più semplice del fenomeno sembra quella per cui ad una prima fase, in cui l'aumento dell'attività ossidativa porta ad un incremento delle fosforilazioni, non bilanciato da quello dell'utilizzazione metabolica dei  $\sim P$  ne segua una seconda, nella quale la comparsa nella cellula di nuovi processi, attivamente consumanti energia porti ad una momentanea prevalenza di reazioni del tipo:  $ATP \rightarrow ADP + [P]$  su quelle fosforilative. Questa nuova situazione, in quanto determinante una maggiore disponibilità di accettori di fosfato, determinerebbe un ulteriore aumento dell'attività ossidativa; ipotesi legittimata sia dalla simultaneità con cui al 60° minuto l'aumento dell'attività respiratoria e la caduta, dopo

il massimo iniziale, dei  $\sim P$  raggiungono i rispettivi punti di stabilizzazione, sia dalla dimostrata capacità di composti che svincolano le ossidazioni dalle fosforilazioni, come il 2-4 dinitrofenolo (Bonner et al [14], French e Beavers [15]), di aumentare considerevolmente il consumo di ossigeno nel materiale da noi studiato come pure in numerosi altri. La curva dell'incremento respiratorio viene così scissa in due fasi: una prima, più direttamente legata all'azione primaria dell'auxina, e non sensibilmente influenzata dai meccanismi di utilizzazione dei  $\sim P$ ; ed una seconda, largamente influenzata dal maggior consumo energetico del tessuto ormai in rapida crescita. Entrambe queste fasi, separatamente considerate, sono suscettibili di correlazione con la crescita; con la differenza che mentre nella prima fase la respirazione appare come un fattore condizionante l'accrescimento, nella seconda l'ulteriore aumento dell'attività ossidativa viene interpretato come conseguenza dell'accrescimento medesimo.

È interessante osservare, d'altra parte, come questa interpretazione, che spezza in due frazioni nettamente distinte per significato e meccanismo di insorgenza la curva dell'incremento della respirazione nei segmenti trattati con auxina, porti come conseguenza all'individuazione di due corrispondenti momenti distinti nell'andamento della crescita, pure apparentemente così omogeneo. In un primo periodo, immediatamente successivo alla comparsa dello stimolo auxinico, il tessuto sembra richiedere una quantità assai limitata di legami ricchi di energia perché venga raggiunto l'optimum della velocità di accrescimento. Questo viene infatti osservato quando l'aumento del consumo di ossigeno è ancora modestissimo, mentre il rapido aumento dei  $\sim P$  dimostra che anche l'utilizzazione dei medesimi non può essere significativamente diverso che nei controlli. Solo in un secondo periodo, quando la distensione delle cellule è ormai avviata, e l'attivazione respiratoria tende al suo massimo, un brusco aumento della richiesta di energia si fa manifesto (caduta del contenuto in  $\sim P$ ), presumibilmente in seguito al rapido aumento del lavoro osmotico e forse di quello di rielaborazione delle stesse strutture del plasma e della membrana.

Consideriamo adesso il comportamento del rapporto GSH/GS-SG. È noto come uno spostamento di questo rapporto a favore della forma ridotta possa promuovere il passaggio di enzimi respiratori (tipico il caso della succinico deidrogenasi, (Hopkins e Morgan[9], Racker [10]) dallo stato inattivo a quello di piena attività. D'altra parte, poiché l'aumento dell'attività respiratoria nella prima fase del trattamento auxinico è, come sopra si è detto, indipendente da variazioni del contenuto in accettori di fosfato, sembra che il suo movente vada ricercato in un'attivazione di enzimi respiratori. È quindi ragionevole supporre che l'aumento del rapporto GSH/GS-SG rappresenti per lo meno una delle cause prime dell'aumento che l'auxina induce sul ritmo delle ossidazioni. Quest'ipotesi, più estesamente trattata in altra sede, sembra trovare una conferma nel fatto che l'optimum dell'azione dell'auxina sul glutatione si raggiunge con singolare rapidità, molto prima che per gli effetti sul consumo di ossigeno e sul contenuto in  $\sim P$ .

In un tentativo di visione unitaria, le relazioni reciproche tra i fenomeni considerati potrebbero così schematizzarsi:

I) Prima fase (o di induzione). L'auxina, tramite un meccanismo il cui esame non rientra negli scopi di questo lavoro ed in cui probabilmente un ruolo importante spetta al sistema dell'acido ascorbico (3,4), sposta il rapporto GSH/GS-SG a favore della forma ridotta. Ne consegue l'attivazione di sistemi enzimatici respiratori la cui attività sia legata alla presenza di gruppi sulfidrilici liberi e quindi un aumento del ritmo delle ossidazioni. Le nuove condizioni createsi nel plasma in seguito all'alto tenore in  $\sim P$  (Ling [11]; Ernster e Low [12]) e forse anche allo stato di riduzione dei gruppi sulfidrilici (Racker [10]; Mazia [13]) si traducono, come effetto finale, in un rapido incremento della crescita per distensione.

II) Seconda fase (o di passaggio allo stato di regime). Il rapporto GSH/GS-SG ha ormai raggiunto il livello più alto, e rimane invariato. Lo stesso avviene per lo stato di attivazione degli enzimi respiratori; ciò nonostante il consumo di ossigeno aumenta ulteriormente perché le condizioni, createsi in seguito all'avvio della crescita, inducono una rapida utilizzazione dei  $\sim P$  e quindi, attraverso all'aumento di accettori di fosfati, una situazione più favorevole all'attività ossidativa. La crescita in questo periodo, a differenza di quello precedente, è caratterizzata da un notevole impiego di energia. Il fabbisogno di questa è fornito dalla respirazione, a stimolare la quale concorrono, insieme ai fattori che ne hanno determinato l'iniziale incremento, altre condizioni (maggior disponibilità di accettori di fosfati) createsi come ripercussioni secondarie del lavoro connesso con la crescita.

Non occorre sottolineare quanto la ricostruzione che abbiamo sopra tentato sia necessariamente provvisoria ed incompleta. Ci sembra peraltro che essa inquadrì soddisfacentemente, in via di ipotesi di lavoro, i dati finora raccolti, e possa costituire un'utile piattaforma per ulteriori indagini su questo centrale problema della fisiologia vegetale.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 758 (1954).
- [2] E. TREZZI, in corso di stampa.
- [3] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 20, 638 (1956).
- [4] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Physiol. Plant. », 10 (1957).
- [5] E. MARRÈ e G. FORTI, in corso di stampa.
- [6] W. STRICKS and I. M. KOLTHOFF, « Anal. Chem. », 25, 1050 (1953).
- [7] R. CRANE and F. LIPMANN, « J. Biol. Chem. », 201, 235 (1953).
- [8] G. FORTI, « Giorn. Bioch. », 1957, vol. 5.
- [9] F. G. HOPKINS and E. J. MORGAN, « Bioch. Jour. », 32, 611, 1829 (1938).
- [10] E. RACKER, in « Glutathione », Academic Press, New York, 1954.
- [11] G. LING, in « Phosphorus Metabolism », vol. II, di McElroy and Glass, J. Hopkins Press, Baltimora, 1952.
- [12] L. ERNSTER and H. LÖW, « Exper. Cell. Res. », Suppl. 3, 133 (1955).
- [13] D. MAZIA, in « Glutathione », Academic Press, New York, 1954.
- [14] J. BONNER, R. S. BANDURSKI and A. MILLERD, « Physiol. Plant. », 6, 511 (1953).
- [15] R. C. FRENCH and H. BEEVERS, « Am. Journ. Bot. », 40, 660 (1953).

**Fisiologia vegetale.** — *Attività respiratoria dei mitocondri di piselli eziolati* (\*). Nota di GIORGIO FORTI e GIUSEPPINA TESTA, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Negli ultimi anni, le ricerche di fisiologia cellulare, sia nel mondo vegetale che in quello animale, hanno sempre più sicuramente confermato l'importanza dei mitocondri nello svolgimento di un processo di basilare importanza per la cellula qual'è la respirazione. Pare infatti accertato che buona parte dell'attività respiratoria avvenga nei mitocondri, e che a questi organuli sia affidata quindi, in prevalenza, la produzione di energia metabolicamente utilizzabile così come la elaborazione di quelle sostanze che, prodotti intermedi del processo respiratorio, vengono utilizzate dalla cellula per la sintesi delle proprie strutture. Di qui l'ovvio interesse di separare e di riuscire a mantenere poi i mitocondri in condizioni di funzionalità il più possibile normale, onde poterne meglio indagare il significato fisiologico.

La preparazione di sospensioni mitocondriali è oggi attuata con tecniche ben definite, che sono venute perfezionandosi negli ultimi anni ed hanno ora raggiunto un notevole grado di standardizzazione; tali tecniche sono sostanzialmente simili per la preparazione dei mitocondri di animali [1, 2] e di quelli di piante [3, 4], pur differendo per i particolari della composizione della soluzione in cui le cellule vengono rotte. Mentre però la preparazione di mitocondri animali, eseguita secondo le tecniche ormai collaudate, dà buoni risultati con una notevole varietà di specie e di organi, per la preparazione dei mitocondri di piante la stessa tecnica può dare risultati opposti con diversi materiali di partenza. Questo fatto potrebbe essere attribuito alla diversa composizione dei succhi cellulari nelle diverse piante, e nei loro diversi organi; al momento della rottura delle membrane cellulari, certe sostanze contenute nei vacuoli potrebbero ad esempio danneggiare la funzionalità strutturale dei mitocondri venendo a contatto con essi, e solo con accorgimenti atti a neutralizzare l'azione di queste sostanze sarebbe possibile in questi casi ottenere la preparazione di mitocondri integri. Tenendo presenti queste considerazioni, non stupisce il fatto che alcuni Autori hanno ottenuto mitocondri capaci di buone attività ossidative e fosforilative, pur preparandoli in condizioni in cui altri, lavorando su materiale diverso, hanno constatato l'irreversibile perdita delle due attività. Così Lieberman e Biale [5] hanno trovato che l'omissione del EDTA<sup>(1)</sup> dal mezzo preparativo ha per conseguenza la perdita quasi totale della capacità

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) Abbreviazioni usate: EDTA, etilendiaminetetraacetato, sale disodico; GSH, glutathione nella forma ridotta; Gl-6-P, glucosio-6-fosfato; AA acido ascorbico; DHA, acido deidroascorbico; ATP, adenosintrifosfato; Tris, triidrossimetilaminometano; TPN, trifosfopiridinucleotide; DPN, difosfopiridinucleotide;  $Q_{O_2}$  (N): ossigeno consumato in 1 ora, in mm<sup>3</sup>, per mg di N proteico.

ossidativa dei mitocondri di cavolfiore, mentre Laties [3] ottiene mitocondri capaci di fosforilazione ossidativa senza l'impiego di questo reagente. E ancora, le condizioni di molarità necessarie secondo Laties [3] per la preparazione dei mitocondri non sono essenziali alle preparazioni mitocondriali di altri Autori [4].

Nelle esperienze qui riportate abbiamo voluto studiare le condizioni necessarie alla preparazione dei mitocondri di piantine eziolate di pisello, e studiarne la capacità ossidativa nei confronti di diversi substrati ossidabili. Dai nostri dati risulta che, oltre i substrati del ciclo di Krebs, vengono ossidati il glutatione ed il glucosio-6-fosfato; questo fatto conferma precedenti ricerche di Marrè e altri [6, 8] [9] e di Servettaz [14] che hanno messo in evidenza, con la tecnica al tetrazolio [7], l'attività Gl-6-P deidrogenasica di preparati mitocondriali da apici di piantine eziolate di pisello.

L'ossidazione del GSH da parte dei nostri mitocondri sembrerebbe inoltre confermare l'esistenza in essi della via di trasporto di idrogeno trifosfopiridinucleotide-glutatione - acido ascorbico [10].

#### MATERIALI E METODI.

I mitocondri sono stati preparati essenzialmente secondo il metodo di Laties [3], dalla parte apicale in crescita di piantine di pisello (*Pisum sativum*, var. Alaska), eziolate, coltivate al buio a 25°C, in camera termostatica. Il materiale, lavato con acqua distillata e tenuto per alcuni minuti a 0°C, è stato triturato in mortaio con quattro volumi di saccarosio o mannite 0,45 M precedentemente raffreddati. La mannite e il saccarosio da noi impiegati, pur essendo reagenti puri per analisi, sono stati precedentemente trattati, essendosi dimostrata la necessità di ulteriore purificazione, mediante passaggio su resine a scambio ionico. Da questo punto in avanti tutte le operazioni sono state condotte a 0°C. L'estratto, filtrato su garza, è stato centrifugato per 10 min. pr. a  $1000 \times g$ , in modo da separarne i frammenti di cellule, le cellule intatte e buona parte dell'amido presente. Il liquido sovranante, separato, è stato centrifugato per 15 min. pr. a  $20.000 \times g$ , sedimentando così i mitocondri. Scartato il sovranante, i mitocondri sono stati lavati 2 volte risospingendoli in saccarosio o mannite e ricentrifugandoli, e finalmente sospesi in saccarosio o mannite, e la sospensione è stata aggiunta alle singole prove.

L'attività ossidativa è stata misurata determinando il consumo di ossigeno secondo la tecnica convenzionale di Warburg.

Le determinazioni dell'azoto sono state eseguite col micrometodo secondo Kjeldhal, distillando l'ammoniaca in corrente vapore.

Tutti i dati sono stati ottenuti come media di prove in triplo in cui le differenze tra le singole prove non superava mai il 10%.

Il TPN, il DPN, il Tris e l' $\alpha$ -chetoglutarato impiegati in queste esperienze erano della Sigma di St. Louis; il malato è stato ottenuto neutralizzando con KOH l'acido malico prodotto dalla Fisher di New York. Gli altri reagenti erano prodotti puri per analisi della Merck. Tutte le soluzioni sono state preparate in acqua distillata, deionizzata con resine a scambio ionico.

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

Osservazioni fatte in questo laboratorio suggerivano l'idea che, durante la preparazione da diversi tessuti di piante superiori, la struttura enzimatica dei mitocondri subisse danni dovuti alla ossidazione di gruppi sulfidrilici di fondamentale importanza per il funzionamento di certi enzimi, fra cui sono note alcune deidrogenasi. Tale ossidazione potrebbe essere il risultato dello

sconvolgimento, producentesi durante la rottura delle cellule, nei rapporti tra forme ridotte e forme ossidate di diverse sostanze il cui stato di ossido-riduzione è controllato, nella cellula fisiologicamente normale, da determinati sistemi enzimatici. Abbiamo voluto perciò sperimentare la possibilità di proteggere i gruppi  $-SH$  delle proteine mitocondriali con GSH e cisteina, due sostanze contenenti entrambe un gruppo  $-SH$ , e come tali capaci di proteggere lo stato ridotto dei sulfidrilici delle proteine. Nel caso del glutathione sembrerebbe logico attendersi che l'azione protettiva sia particolarmente efficace se l'agente dell'inattivazione delle deidrogenasi a sulfidrilici fosse il DHA eventualmente formatosi in quantità insolite per ossidazione dell'AA durante la frantumazione delle cellule. Precedenti ricerche condotte con la tecnica al tetrazolio [7] hanno infatti accertato l'inibizione da parte del DHA dell'attività deidrogenasica di preparati mitocondriali [11]. La presenza di una attiva glutathione-DHA riduttasi, stabilita da Marrè e Laudi [1, 10] in tessuti di pisello eguali a quelli da noi studiati, contribuirebbe, quando si aggiunga GSH alla soluzione in cui i mitocondri vengono preparati, a mantenere alto il rapporto AA/DHA. I dati della Tabella I dimostrano come la capacità di ossidare il succinato, nei mitocondri preparati in presenza di GSH, sia alquanto superiore (del 40%) a quella dei mitocondri preparati senza questo reagente. L'azione protettiva del GSH non sembra tuttavia specifica, potendosi ottenere risultati uguali aggiungendo cisteina anziché GSH al mezzo di preparazione dei mitocondri (fig. 1). Dai dati della figura 1 risulta come i mitocondri preparati in presenza di GSH 0,004 M, o cisteina alla stessa concentrazione, conservino per oltre due ore una buona capacità ossidativa; è da escludere che il GSH e la cisteina aggiunti possano essere ossidati con conseguente aumento del consumo di ossigeno, essendosi lavati i mitocondri con solo saccarosio, o mannite, prima di aggiungerli al mezzo di incubazione, ed essendo molto basso il consumo di ossigeno in assenza di succinato.

TABELLA I.

*Azione del GSH sulla ossidazione del succinato da parte dei mitocondri*

| Aggiunte<br>al mezzo di preparazione | Substrato aggiunto<br>al mezzo di incubazione | $QO_2$ (N) | Attività<br>ossidativa |
|--------------------------------------|---|------------|------------------------|
| GSH 0,004 M                          | Succinato 0,015 M                             | 635        | 140                    |
| nessuna                              | » 0,015 M                                     | 453        | 100                    |
| »                                    | nessuno                                       | 55,5       | 12,3                   |

Mitocondri preparati in saccarosio 0,45 M, EDTA 0,01 M, portato a pH 6,4 con Tris; dove indicato, è stato aggiunto GSH 0,004 M. I mitocondri sono stati lavati una volta con la stessa soluzione, una seconda volta con saccarosio 0,45 M, e risospesi in saccarosio 0,45 M. Il mezzo di incubazione conteneva:  $MgSO_4$  0,005 M, Tris 0,02 M, pH 7,3, tampone di fosfati, 0,001 M a pH 7,3, saccarosio 0,42 M, mitocondri sospesi in saccarosio 0,45 M. Volume finale: 3, 2 c.c. Incubazione a 26° C. Il substrato è stato aggiunto dai bracci laterali delle vaschette del Warburg, dopo 10 minuti primi di ambientamento.

In queste esperienze, come nelle successive, abbiamo aggiunto l'EDTA al mezzo di preparazione dei mitocondri, essendo stato dimostrato da Lieberman e Biale [5] che questo reagente protegge efficacemente la capacità ossidativa dei mitocondri di cavolfiori; inoltre, le ricerche di uno di noi [12] sull'attività ATP-asi dei mitocondri confermano la protezione fornita dal EDTA alla struttura mitocondriale; tale protezione sembra potersi attribuire alla capacità di questo reagente di chelare ioni metallici, quali  $\text{Ca}^{++}$ ,  $\text{Zn}^{++}$ ,

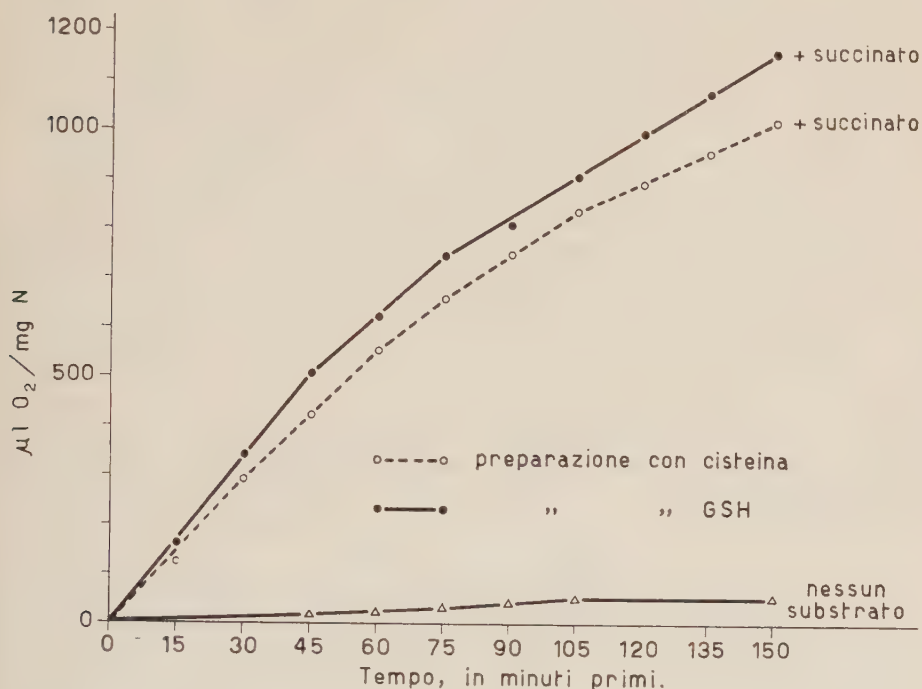


Figura. 1 — Mitocondri preparati in mannite 0,42 M., EDTA 0,01 M., Tris in quantità tale da portare il pH a 6,4, GSH o cisteina 0,004 M, dove indicato

I mitocondri sono stati lavati una volta con la stessa soluzione, una seconda volta con mannite 0,42, infine risospesi in mannite 0,42 M. Mezzo di incubazione come nella Tabella I, eccettuata la sostituzione del saccarosio con mannite 0,42 M. Volume finale, 3,2 cc.; il substrato è stato aggiunto dal braccio laterale delle vaschette di Warburg dopo 10 minuti primi di equilibramento a 26°C.

$\text{Cu}^{++}$  ed altri notoriamente deprimenti le attività ossidativa e fosforilativa dei mitocondri [5, 13]. Mentre era nota da tempo la presenza, nei mitocondri di piante superiori, del corredo enzimatico necessario all'ossidazione dei substrati del ciclo di Krebs e alle fosforilazioni ad esso associate [3, 4] solo recentemente è stata dimostrata la presenza del ciclo di ossidazione diretta degli esosio-monofosfati in preparati mitocondriali di fettine di tubero di patata e di piantine eziolate di pisello [14]. Un nostro esperimento, illustrato nella Tabella II, ha messo in evidenza la ossidazione sia del Gl-6-P che del GSH da parte di mitocondri capaci di ossidare attivamente i substrati del ciclo di Krebs e il glutammato.

TABELLA II.

*Ossidazione di diversi substrati da parte dei mitocondri.*

| Numero dell'esperimento | Substrato                | Cofattori aggiunti | QO <sub>2</sub> (N) |
|-------------------------|--------------------------|--------------------|---------------------|
| 1                       | nessuno                  | —                  | 202                 |
|                         | Gl-6-P 0,004 M           | TPN 80 γ           | 376                 |
|                         | GSH 0,02 M               | —                  | 416                 |
|                         | α-chetoglutarato 0,02 M  | DPN 300 γ          | 368                 |
|                         | Glutammato 0,02 M        | DPN 300 γ          | 368                 |
|                         | Malato 0,02 M            | DPN 300 γ          | 856                 |
|                         | Malato + piruvato 0,02 M | DPN 300 γ          | 562                 |
| 2                       | nessuno                  | —                  | 111                 |
|                         | Gl-6-P 0,004 M           | —                  | 187                 |
|                         | Glutammato 0,02 M        | —                  | 380                 |
|                         | Citrato 0,02 M           | —                  | 595                 |
|                         | α-chetoglutarato 0,02 M  | —                  | 315                 |

Mitocondri preparati come nella figura 1. Mezzo di incubazione e altre condizioni sperimentali come in figura 1.

Dal confronto fra i risultati della 1<sup>a</sup> e della 2<sup>a</sup> esperienza risulta che il funzionamento dei sistemi a DPN non richiede l'aggiunta di questo cofattore. Evidentemente il DPN inizialmente presente nei mitocondri è rimasto a far parte integrante dei sistemi enzimatici mitocondriali; questo fatto è indice, secondo diversi Autori [15, 16], dell'integrità strutturale dei mitocondri. Per quanto riguarda i sistemi a TPN i risultati da noi ottenuti indicano chiaramente che l'aggiunta del coenzima non ha alcuna influenza sulla ossidazione del citrato (fig. 2), mentre rimane dubbio se possa influenzare l'ossidazione del Gl-6-P, troppo piccola essendo la differenza di consumo di ossigeno ottenuta con TPN rispetto al valore ottenuto senza coenzima, quando si sottragga il valore del consumo di O<sub>2</sub> dovuto all'ossidazione dei substrati endogeni.

## CONCLUSIONI.

Le esperienze qui descritte hanno precisato le condizioni in cui i mitocondri preparati dalle piantine eziolate di pisello ossidano attivamente i substrati del ciclo di Krebs, il Gl-6-P ed il GSH e conservano una forte attività ossidativa per oltre 2 ore e 30 min. pr. dall'inizio dell'incubazione, senza richiedere l'aggiunta dall'esterno dei coenzimi piridinici.

Questi fatti testimoniano l'integrità strutturale dei mitocondri, il cui danneggiamento ha come conseguenza, secondo Hunter e Ford [15] e Ernster

e Löw [16], la perdita de DPN, che Ernster e Löw considerano un effetto secondario della perdita dell'ATP mitocondriale.

L'ossidazione del GSH indica la presenza, nei nostri preparati mitocondriali, della via di trasporto di idrogeno piridinnucleotidi-glutatione-acido ascorbico [10].

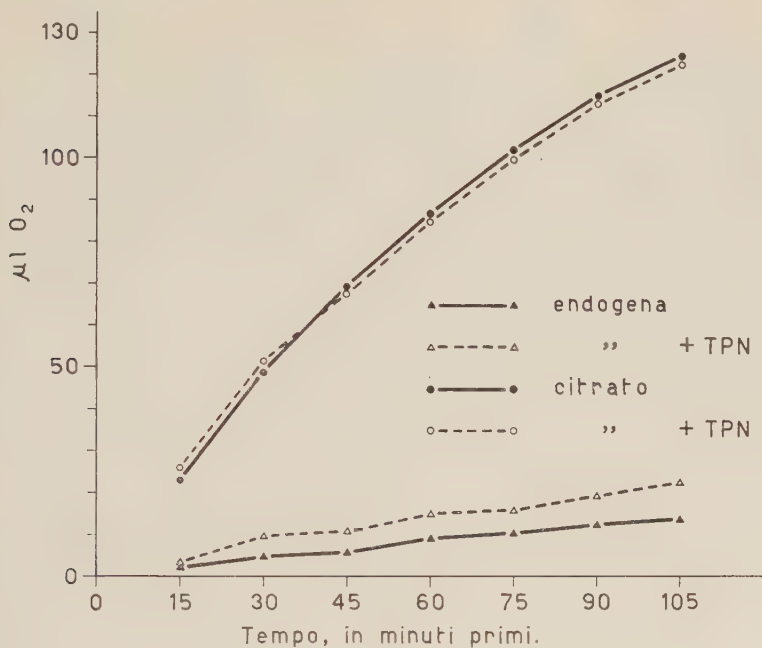


Figura 2. — Preparazione dei mitocondri come nella fig. 1.

Substrato: citrato 0,02 M. TPN 160 γ dove indicato. Citocromo C alla concentrazione finale di 10<sup>-5</sup> M.  
Altre aggiunte come nella fig. 1.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] W. C. SCHNEIDER, and C. H. HOGEBOM, « Jour. Biol. Chem. », 183, p. 123 (1950).
- [2] P. SIEKEVITZ and V. R. POTTER, « Jour. Biol. Chem. », 200, p. 187 (1953).
- [3] G. G. LATIES, « Plant Physiol. », 28, p. 557 (1953).
- [4] J. BONNER and A. MILLER, « Arch. Biochem. and Biophys. », 62, p. 135 (1953).
- [5] M. LIEBERMAN and J. B. BIALE, « Plant Physiol. », 30, p. 549 (1955).
- [6] E. MARRÈ e C. DUGNANI, « N. Giorn. Bot. It. », vol. 41, p. 214 (1954).
- [7] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Giorn. di Biochimica », vol. IV, n. I, p. 10 (1955).
- [8] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Lincei » Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 17, p. 264 (1954).
- [9] O. SERVETTAZ e E. MARRÈ, « Rend. Istituto Lomb. Sc. e Lett. », vol. 88, p. 823, (1955).
- [10] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. XX, p. 806 (1956).
- [11] E. MARRÈ, G. LAUDI e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. XIX, p. 460 (1955).
- [12] G. FORTI, in corso di stampa.
- [13] E. C. SLATER and K. V. CLELAND, « Nature », 170, p. 118 (1952).
- [14] O. SERVETTAZ, « Rend. Atti Acc. Lincei », Cl. Sc. Fis, ser. VIII, vol. XX, p. 255 (1956).
- [15] F. E. HUNTER and L. FORD, « Jour. Biol. Chem. », 216, p. 357 (1955).
- [16] L. ERNSTER and H. LOW, « Exper. Cell Research », 10, p. 704 (1956).

**Fisiologia.** — *Origine e meccanismi di compensazione dei fenomeni dinamici di Luciani* (\*) Nota di CESIRA BATINI, GIUSEPPE MORUZZI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata (\*\*) dal Socio G. C. PUPILLI.

Luciani<sup>(1)</sup> propose di chiamare *fenomeni dinamici* «gli effetti immediati delle ablazioni cerebellari, lasciando indecisa la questione se essi dipendano dallo stato irritativo indotto dal traumatismo operatorio, oppure dall'improvvisa cessazione dell'influenza del cervelletto sugli altri centri» (p. 444). I risultati di tutte le ricerche successive [cfr. Moruzzi<sup>(2)</sup>] hanno avvalorato la seconda ipotesi. Appare oggi pressoché certo che l'opistotono e l'ipertono estensore degli arti anteriori siano dovuti a liberazione (*release*) da un controllo tonico inibitore esercitato dal cervelletto.

Tre problemi rimanevano aperti all'indagine sperimentale: 1° quali siano le parti del cervelletto a cui è dovuta tale azione tonica inibitrice; 2° quali fra gli svariati riflessi posturali vengano liberati dall'influenza inibitrice del cervelletto; 3° con quali meccanismi i fenomeni di liberazione scompaiano nel volgere d'una settimana.

A questi problemi sono rivolte le presenti ricerche, compiute su 46 Gatti.

La cerebellectomia completa veniva eseguita per suzione, in narcosi da Nembutal. La stessa narcosi era utilizzata per la distruzione elettrolitica, con metodo stereotassico, d'entrambi i nuclei del tetto. La narcosi eterica veniva utilizzata solo nei casi in cui si desiderava seguire i sintomi nelle prime ore successive alla lesione.

L'integrità del tronco dell'encefalo e, negli esperimenti di distruzione bilaterale del nucleo del tetto, la completezza della lesione e l'integrità degli altri nuclei cerebellari venivano verificate in ogni caso su sezioni seriate, colorate coi metodi di Nissl o di Weil. La deafferentazione estradurale degli arti anteriori (da C<sub>v</sub> a D<sub>II</sub>, inclusi) si faceva seguire, nei soli esperimenti acuti, da una spennellatura con novocaina all'1 % dei monconi centrali delle radici posteriori. La sezione postbrachiale del midollo spinale (a D<sub>XII</sub>) era sempre totale. La narcosi da Nembutal veniva utilizzata negli esperimenti di deafferentazione cronica, quella da etere o da Diogenal (\*\*\*) negli esperimenti di sezione del midollo spinale.

1° Il primo problema è ormai largamente risolto, giacché è risaputo che fenomeni di liberazione identici o assai simili a quelli del periodo dina-

(\*) Nella seduta del 10 novembre 1956.

(\*\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Pisa e Bologna.

(1) L. LUCIANI, *Fisiologia dell'uomo*. Milano, Società Editrice Libreria, II (1905).

(2) G. MORUZZI, «Proc. XIX int. physiol. Congress, Montreal», 89 (1953).

(\*\*\*) Ringraziamo la ditta Bracco (già Italmerck), che ci ha gentilmente donato il prodotto.

mico di Luciani seguono la topectomia del *lobus anterior* [Rothmann <sup>(3)</sup>, Bremer <sup>(4)</sup>] o la distruzione bilaterale del nucleo del tetto [Sprague e Chambers <sup>(5)</sup>, Chambers e Sprague <sup>(6)</sup>, Batini e Pompeiano <sup>(7,8)</sup>]. L'ipotesi irritativa non è più sostenibile da quando Camis <sup>(9)</sup> ha dimostrato che il semplice raffreddamento del *lobus anterior* aumenta, nettamente e reversibilmente, la rigidità da decerebrazione.

I nostri esperimenti di cerebellectomia completa (25 Gatti seguiti per un tempo variabile da 2 a 61 giorni) o di distruzione bilaterale e totale del nucleo del tetto (5 Gatti seguiti per un tempo variabile da 1 a 13 giorni) confermarono tutti i risultati già conosciuti. Una marcata rigidità degli arti anteriori e un forte opistotono rappresentarono i sintomi più costanti e appariscenti. I controlli istologici, sistematicamente eseguiti, ci permisero inoltre di accertare l'integrità del tronco dell'encefalo e degli altri nuclei cerebellari. Possiamo pertanto concludere che i fenomeni di liberazione, che fanno seguito immediatamente alla cerebellectomia, sono dovuti alla soppressione d'una influenza tonica inibitrice esercitata sul tono dei muscoli antigravitari dai nuclei del tetto o della corteccia cerebellare vermiana che ad essi fa capo.

2° Per contribuire alla risoluzione del secondo problema furono eseguite ricerche su Gatti, i cui arti anteriori erano stati cronicamente deafferentati da 1 a 4 giorni prima. Nonostante la completa eliminazione della componente miotatica del tono, la cerebellectomia totale (7 Gatti) o la distruzione bilaterale e totale del nucleo del tetto (11 Gatti) furono seguite da netta rigidità estensoria negli arti anteriori. Anche l'opistotono fu costantemente presente. L'ipertono degli arti deafferentati si dileguava però in un tempo inferiore, pari a circa la metà di quello osservato negli animali non sottoposti a radicotomia dorsale.

I rapporti fra queste osservazioni ed altre di Stella <sup>(10)</sup> e di Cardin <sup>(11)</sup> saranno discussi in altra nota [Batini, Moruzzi e Pompeiano <sup>(12)</sup>], in cui verranno riportati anche gli esperimenti da noi eseguiti sul preparato decerebrato. Basti qui ricordare che l'opistotono sembra legato principalmente a liberazione di riflessi labirintici dal controllo cerebellare. Per contro una rigidità estensoria può ancora essere presente, negli arti anteriori deafferentati, dopo sezione bilaterale dell'ottavo nervo encefalico.

(3) M. ROTHMANN, «Mschr. Psychiatr.», XXXV, 43 (1914).

(4) F. BREMER, «Arch. int. Physiol.», XIX, 189 (1922).

(5) J. M. SPRAGUE a. W. W. CHAMBERS, «J. Neurophysiol.», XVI, 451 (1953).

(6) W. W. CHAMBERS a. J. M. SPRAGUE, «Arch. Neurol. Psychiat., Chicago», LXXIV, 653 (1955).

(7) C. BATINI e O. POMPEIANO, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXXI, 805 (1955).

(8) C. BATINI e O. POMPEIANO, «Rend. Accad. naz. Lincei», Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. VIII, in corso di stampa.

(9) M. CAMIS, «Arch. int. Physiol.», XX, 340 (1923).

(10) G. STELLA, «Atti Soc. med.-chir. Padova», XXIII, 5 (1944).

(11) A. CARDIN, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXVII, 1178 (1951).

(12) C. BATINI, G. MORUZZI e O. POMPEIANO, «Rend. Accad. naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. nat., Ser. VIII, in corso di stampa.

3° Al terzo problema è dedicata la maggior parte dei nostri esperimenti. Gli interventi operatori furono eseguiti su 41 Gatti utilizzati per le osservazioni precedenti, mentre altri 5 animali servirono per esperimenti di controllo, di cui si riferirà alla fine del presente paragrafo.

L'evoluzione nel tempo dei fenomeni di liberazione ebbe un andamento abbastanza costante. Nei primi tre giorni dopo la cerebellectomia totale lo animale assomigliava in modo sorprendente a un preparato decerebrato; la rigidità estensoria era anzi più accentuata, ma v'era sempre opistotono, che invece manca nell'animale decerebrato secondo il metodo classico [Bazett e Penfield<sup>(13)</sup>]. Verso il 3° giorno ricomparivano i riflessi di raddrizzamento e a partire dal 6° giorno l'animale era di nuovo in grado di reggersi, sia pure con gli arti iperestesi e abdotti. In seguito i fenomeni di liberazione andavano riducendosi, ma un certo grado d'ipertono estensorio si osservava sempre, in determinate posizioni, anche durante il cosiddetto periodo da deficienza. Luciani<sup>(14)</sup> stesso e in seguito Lewandowski<sup>(15)</sup>, Dusser de Barenne<sup>(16,17)</sup> e Rademaker<sup>(18)</sup> avevano osservato questi fatti. La sintomatologia dei Gatti bilateralmente defastigiati risultò pressoché identica, per intensità di sintomi e per il loro evolversi nel tempo. Opistotono e rigidità estensoria apparivano fortemente ridotti circa 5 giorni dopo l'operazione; altri 2 o 3 giorni erano necessari per la totale scomparsa dell'opistotono.

È facile convincersi che questo dileguarsi dei fenomeni di liberazione non è dovuto a deterioramento dei meccanismi nervosi che sostengono il tono antigravitario. La decerebrazione di 19 Gatti cronicamente decerebellati, effettuata quando i sintomi dinamici erano quasi del tutto scomparsi (14-21 giorni dopo il primo intervento), fu seguita costantemente da intensa rigidità da decerebrazione. Analoghi risultati si ottennero in 7 Gatti cronicamente defastigiati (2-8 giorni). Dobbiamo quindi concludere che i fenomeni dinamici si dileguano per la ragione che altre strutture nervose assumono quella funzione di controllo del tono posturale che era andata perduta subito dopo la cerebellectomia. Né è possibile pensare che la perdita temporanea del controllo sul tono posturale sia la conseguenza aspecifica del trauma chirurgico (lesione funzionale del mesencefalo). Lo stesso effetto può essere ottenuto infatti con lesioni elettrolitiche localizzate al nucleo del tetto, mentre manca del tutto se vengono lesi altri nuclei del cervelletto.

I fenomeni del periodo dinamico sono insomma legati alla liberazione di attività posturali da un'influenza inibitrice, tonicamente esercitata su di

(13) H. C. BAZETT a. W. G. PENSFIELD, «Brain», XLV, 185, 1922.

(14) L. LUCIANI, *Il cervelletto*. Firenze, Le Monnier, 1891 (cfr. pp. 121-125).

(15) M. LEWANDOWSKI, «Arch. Anat. Physiol., Lpz.», XXVII, 129 (1903).

(16) J. G. DUSSE DE BARENNE, *Die Funktionen des Kleinhirns. Physiologie und allgemeine Neuropathologie*. In G. Alexander u. O. Marburg, *Handbuch der Neurologie des Ohres*. Berlin u. Wien, Urban u. Schwarzenberg, I, 589 (1923).

(17) J. G. DUSSE DE BARENNE, *Experimentelle Physiologie des Kleinhirns*. In O. Bumke u. O. Foerster, *Handbuch der Neurologie*. Berlin, Springer, II, 235 (1937).

(18) G. G. J. RADEMAKER, *Das Stehen*. Berlin, Springer, 1931.

esse da una parte ben determinata e circoscritta del cervelletto. La scomparsa precoce dei sintomi dinamici non significa affatto che essi abbiano scarsa importanza funzionale, ma solamente che entrano presto in azione meccanismi estracerebellari di compensazione: occorre cercare d'identificarli.

È possibile riprodurre un'imponente sindrome dinamica in un animale in cui i fenomeni di liberazione erano stati del tutto compensati, mediante sezione postbrachiale del midollo spinale.

In 6 Gatti totalmente decerebellati venne eseguita la recisione postbrachiale totale del midollo spinale, da 12 a 59 giorni dopo il primo intervento operatorio, quando cioè i fenomeni del periodo dinamico erano già scomparsi. Ricomparve un intenso ipertono estensore negli arti anteriori e si osservò un marcato opistotono; questi sintomi permasero per tutto il tempo in cui gli animali vennero mantenuti in vita dopo l'ultimo intervento (2 giorni). Analoghi fenomeni vennero rilevati dopo deafferentazione d'entrambi gli arti anteriori, eseguita su 7 Gatti. Gli animali vennero decerebellati da 1 a 4 giorni dopo: comparvero ipertono estensorio ed opistotono, che andarono gradualmente risolvendosi; dopo 2 giorni ricomparvero i primi riflessi di raddrizzamento; l'opistotono si dileguò verso il sesto giorno e intorno al nono giorno la rigidità degli arti anteriori appariva pressoché risolta. La sezione postbrachiale del midollo spinale, eseguita 10-12 giorni dopo la cerebellectomia, fece ricomparire in tutta la sua imponenza la sindrome dinamica. L'ipertono degli arti anteriori e l'opistotono comparvero non appena si dileguò la narcosi da etere o da Diogenal (10-15 min dopo l'intervento), e si osservarono per tutto il tempo in cui l'animale venne mantenuto in vita (2 giorni). La ricomparsa dei fenomeni di liberazione del periodo dinamico si accompagnò a una nuova scomparsa dei riflessi di raddrizzamento. Quest'ultima osservazione ci sembra una prova convincente che la primitiva loro abolizione, nei giorni che immediatamente seguirono la cerebellectomia, era dovuta alla profonda disorganizzazione dei meccanismi posturali prodotta dall'eliminazione improvvisa del freno inibitore cerebellare, non ad alterazioni funzionali del mesencefalo legate al trauma operatorio [cfr. Rademaker <sup>(19)</sup>].

Identici risultati si ottennero quando la cerebellectomia completa venne sostituita dalla distruzione elettrolitica, bilaterale e totale, del nucleo del tetto. In 2 Gatti quest'operazione rappresentò il primo intervento, mentre in 4 essa seguì la deafferentazione di entrambi gli arti anteriori, eseguita 1-2 giorni prima: dopo 3-5 giorni, l'opistotono e la rigidità degli arti anteriori erano assai ridotti, mentre ricomparivano i riflessi di raddrizzamento; dopo circa 7 giorni, ogni traccia di opistotono era scomparsa. La sezione postbrachiale del midollo spinale, eseguita 13 giorni dopo l'intervento sul nucleo del tetto nei Gatti normali e 3-6 giorni dopo tale operazione nei Gatti deafferentati, fece ricomparire o rispettivamente accentuò in grado notevole sia l'ipertono estensorio sia l'opistotono. Nel primo gruppo di animali, i fenome-

(19) Cfr. <sup>(18)</sup>, pp. 366-367.

meni di liberazione rimasero immutati nei 2 giorni di sopravvivenza; nel secondo gruppo, la sopravvivenza fu assai più prolungata (6-11 giorni) e si poté assistere nuovamente al declinare della sindrome dinamica.

Queste ultime osservazioni inducono a credere che altri meccanismi inibitori entrino in azione per compensare la soppressa funzione dei nuclei del tetto e della corteccia cerebellare sovrastante: risultati di Batini e Pompeiano<sup>(20)</sup> fanno pensare alla zona corticale motrice. A ogni modo è certo che la decerebrazione, in un Gatto decerebellato o defastigiato, fa ricomparire anche l'opistotono; tale sintomo manca, quando la sezione del mesencefalo viene effettuata nell'animale a cervelletto integro.

Esperimenti di controllo furono eseguiti, sottoponendo 2 Gatti normali a sezione postbrachiale del midollo spinale. Cessata l'azione della narcosi, si osservò una modica rigidità degli arti anteriori, ma l'opistotono risultò costantemente assente; dopo poche ore l'animale riuscì a sollevare il treno anteriore sugli arti toracici estesi e a camminare trascinando il treno posteriore. Il giorno dopo il primo intervento si eseguì la distruzione bilaterale e totale del nucleo del tetto: la rigidità estensoria degli arti anteriori si accentuò fortemente, e comparve protrusione delle unghie con abduzione delle dita. Insorse, marcatissimo, l'opistotono. Questa sindrome si mantenne veramente imponente per circa 6 giorni. Successivamente essa andò riducendosi d'intensità, ma fu ancora possibile osservarla 12 giorni dopo l'intervento cerebellare, quando gli animali vennero uccisi.

Altri tre esperimenti di controllo furono eseguiti su Gatti, i cui arti anteriori erano stati cronicamente deafferentati. L'intervallo di tempo fra questo intervento e la sezione postbrachiale del midollo spinale (7-14 giorni) era quello medesimo che si era prescelto nel gruppo corrispondente d'esperimenti, in cui fra le due operazioni era stata eseguita la distruzione del nucleo del tetto. In tal modo se fra i sintomi ottenuti nei due gruppi d'esperimenti si osservavano differenze, esse erano dovute alla lesione fastigiale, non ad un diverso grado di sensibilizzazione alla Cannon. In questo gruppo di esperimenti la sezione postbrachiale del midollo spinale fece comparire un modico ipertono estensore negli arti anteriori, ma l'opistotono fu costantemente assente. Il giorno dopo la sezione del midollo venne eseguita la distruzione elettrolitica, totale e bilaterale, del nucleo del tetto: comparve un nettissimo opistotono, che permase per 5 giorni, cioè fino al momento in cui l'animale venne ucciso. La rigidità degli arti anteriori aumentò considerevolmente, in parte per effetto della posizione del capo (riflessi di Magnus).

La sezione postbrachiale del midollo spinale (effetto Schiff-Sherrington), da una parte, e la cerebellectomia o la defastigiatura, dall'altra, liberano quindi da controlli inibitori meccanismi posturali parzialmente differenti. Vedremo in un altro lavoro [Batini, Moruzzi e Pompeiano<sup>(12)</sup>] che l'opistotono è dovuto alla liberazione di riflessi tonici labirintici, mentre la rigidità degli arti anteriori deafferentati non è unicamente legata ad impulsi vestibolari.

(20) C. BATINI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXI, 1223 (1955).

L'opistotono è prodotto dall'ablazione del cervelletto, ma non dalla sezione postbrachiale del midollo spinale.

I riflessi tonici inibitori che sono alla base del fenomeno di Schiff-Sherington, sono però in grado di contribuire in modo determinante alla compensazione della funzione inibitrice del cervelletto (o del nucleo del tetto), quando questa venga a mancare. Essi estendono allora gradualmente il loro controllo inibitore ai riflessi tonici vestibolari. Ai riflessi di Schiff-Sherrington si deve, in buona parte almeno, la graduale scomparsa dell'opistotono e la marcata riduzione dei fenomeni di liberazione che si osserva verso la fine del periodo dinamico e durante il cosiddetto periodo di deficienza. Gran parte della rapida compensazione della sindrome dinamica è appunto opera di questi riflessi inibitori estracerebellari, che interessano probabilmente il midollo spinale e il tronco dell'encefalo.

In conclusione, il periodo dinamico di Luciani è propriamente l'espressione dell'abolita funzione d'una parte del cervelletto. Pertanto è esso pure un periodo da deficienza. I sintomi dinamici sono dovuti all'abolizione d'una funzione cerebellare che viene semplicemente compensata prima, e con maggiore efficienza, di altre attività del cervelletto, la cui scomparsa si lega ai sintomi più duraturi che sono alla base della triade di Luciani. Come logico corollario di queste affermazioni, il periodo di deficienza di Luciani deve considerarsi, in realtà, anche come un periodo di compensazione: i meccanismi estracerebellari che vicariano la funzione inibitrice del cervelletto, raggiungono infatti in questo periodo il loro pieno sviluppo.

**Fisiologia.** — *Le proprietà della corteccia cerebrale dei Cani predisposti e di quelli non predisposti alla epilessia riflessa, indagate dopo recisione delle connessioni nervose estrinseche della corteccia stessa* (\*). Nota di PAOLO CREPAX e di FRANCESCO INFANTELLINA, presentata (\*\*) dal Socio G. C. PUPILLI.

Le poche ricerche eseguite per individuare il sostrato neurofisiologico della predisposizione alla epilessia riflessa riguardano esclusivamente la corteccia motrice. I fatti accertati si compendiano in una conclusione di carattere negativo e cioè che la maggiore eccitabilità della corteccia motrice [Amantea <sup>(1,2)</sup>; Gliozzi <sup>(3)</sup>; Martino <sup>(4)</sup>; De Finis <sup>(5)</sup>; Ozorio de Almeida e Mar-

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) G. AMANTEA, « Boll. r. Acc. Med. Roma », XLVI, 121 (1920).

(2) G. AMANTEA, « Pflüger's Arch. », CLXXXVIII, 287 (1921).

(3) S. M. GLIOZZI, « Arch. Fisiol. », XXV, 479 (1927).

(4) G. MARTINO, « Anal. Inst. nac. Parasitol. », V, 1 (1932).

(5) M. L. DE FINIS, « Arch. Fisiol. », XXX, 494 (1931-32).

tino <sup>(6)</sup>] dei Cani predisposti rispetto a quella dei non predisposti è una manifestazione dello stato di predisposizione, ma non ne costituisce una componente essenziale [Amantea <sup>(7)</sup>; Martino <sup>(7)</sup>], giacché è possibile abbassare con diversi mezzi la soglia dell'eccitabilità faradica della corteccia motrice senza che la epilessia riflessa diventi perciò provocabile in un animale non predisposto [cfr. Moruzzi <sup>(8)</sup>].

Il significato di tale conclusione rispetto al problema più generale dell'importanza che le proprietà funzionali della corteccia cerebrale assumono nella predisposizione, è invero limitato: le osservazioni riferite concernono infatti un aspetto particolare delle proprietà della corteccia motrice; e d'altra parte la irradiazione riflessa dell'attività convulsiva può dipendere non tanto dai caratteri dell'attività medesima nell'area motrice stricninizzata, quanto dalla diversa recettività che la corteccia circostante presenta agli impulsi epilettogeni originati nell'area stessa. Inoltre, nell'animale a nevrassa integro, le reazioni della corteccia cerebrale sono determinate sia dalle proprietà degli elementi che costituiscono la corteccia medesima, sia dall'azione che su tali elementi esercitano i sistemi di proiezione diffusa.

Con le ricerche di cui riferiamo nella presente Nota ci siamo proposti d'indagare le proprietà funzionali della corteccia cerebrale di Cani predisposti e di non predisposti alla epilessia riflessa, in condizioni tali da escludere ogni interazione tra corteccia e strutture sottocorticali; esse sono state infatti eseguite in lembi di corteccia cerebrale, le cui connessioni nervose con le restanti parti dell'encefalo sono completamente recise e la cui nutrizione è assicurata mediante i vasi piali lasciati indenni.

Il preparato di corteccia cerebrale isolata di Cane è stato allestito con una tecnica analoga a quella ideata da Burns <sup>(9)</sup> per il Gatto e largamente utilizzata in questo Laboratorio [Infantellina <sup>(10)</sup>; Crepax e Infantellina <sup>(11)</sup>].

Avanti l'allestimento del preparato, veniva indagato in ciascun animale lo stato di predisposizione alla epilessia riflessa, il che veniva fatto sempre con un medesimo procedimento. Mentre per i dettagli di questo rimandiamo alla Memoria *in extenso*, facciamo presente che l'accesso epilettico provocato negli animali predisposti era interrotto mediante inalazione di etere etilico per evitare che una prolungata attività convulsiva potesse facilitare nel lembo isolato le successive risposte alle stimolazioni ripetitive. La quale possibilità è stata esclusa mediante altre prove che riferiremo appresso. La tecnica adottata per registrare l'attività elettrica del preparato e per effettuare la stimolazione è quella medesima descritta in lavori precedenti ai quali rimandiamo <sup>(10,11)</sup>.

(6) M. OZORIO DE ALMEIDA e G. MARTINO, « Arch. Fisiol. », XXXII, 593 (1933).

(7) G. MARTINO, « Riv. Assoc. paulista Med. », II, 128 (1933).

(8) G. MORUZZI, *L'épilepsie expérimentale*, Paris, Hermann (1950).

(9) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXI, 50 (1950); CXII, 156 (1951).

(10) F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XXXIX, 209 (1955); XL, 81 (1956).

(11) P. CREPAX e F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XL, 147 e 297 (1956).

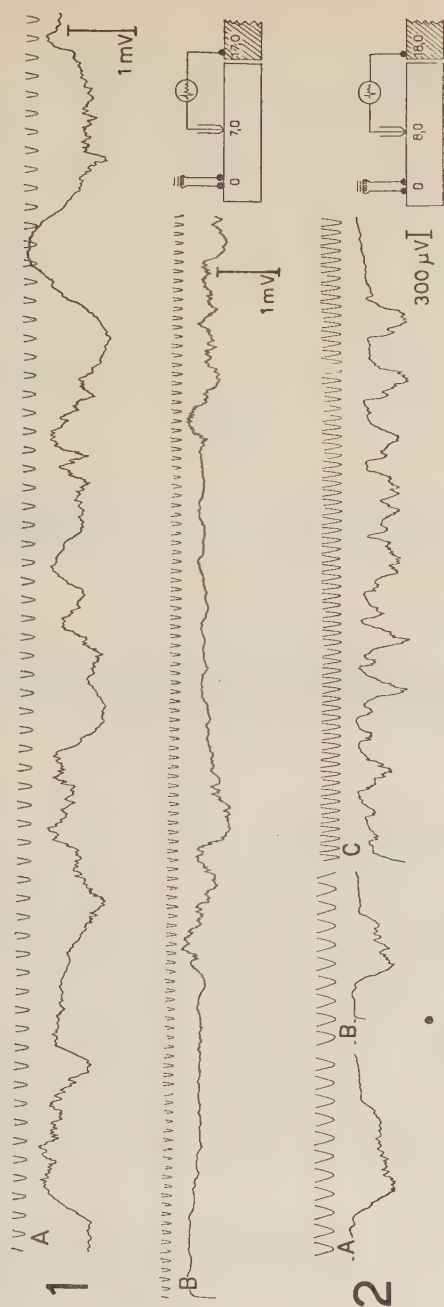


Fig. 1. - Attività elettrica spontanea e provocata da stimoli elettrici isolati ovvero ripetuti nel lembo isolato di corteccia cerebrale di Cani non predisposti alla epilessia riflessa.

La stimolazione elettrica è indicata con un cerchio pieno. La deflessione del tracciato verso l'alto corrisponde a una variazione negativa del potenziale. Gli schemi disegnati sul lato destro indicano la posizione degli elettrodi di derivazione e di stimolazione e i valori in millimetri della distanza rispettiva; la parte tratteggiata corrisponde alla zona di corteccia elettrocoagulata. Ciascuno schema e ciascun valore di amplificazione si riferisce al grafico a cui è affiancato e inoltre a tutti i precedenti che ne sono privi. Tempo = 0,1 sec.

1) A: attività spontanea. B: registrazione iniziata subito dopo la fine di una stimolazione iterativa costituita da impulsi di 12 V e della durata di 0,5 msec, succedentisi alla cadenza di 120 Hz e durata per 5 sec.

2) A: attività spontanea costituita da una oscillazione assai simile a quella riprodotta nel grafico successivo B, la quale è stata provocata da uno stimolo di 7,2 V; 0,5 msec. C: registrazione iniziata subito dopo la fine di una stimolazione iterativa (15 V; 0,5 msec; 50 Hz; 5 sec).

Il lembo isolato di corteccia cerebrale di Cane presenta nel 70 per 100 ca. <sup>(12)</sup> dei casi un'attività elettrica spontanea. Questa si palesa generalmente con deflessioni superficie-positive: quando le singole oscillazioni sono separate

(12) La percentuale indicata si riferisce a preparati, nei quali la successiva indagine anatomica ha accertato la completa recisione delle connessioni nervose tra lembo e corteccia circostante.

da intervalli piuttosto lunghi (5-10 sec), esse sono assai simili a quelle provocate dallo stimolo elettrico isolato (cfr. nella fig. 1 il grafico 2 A con quello 2 B e nella fig. 2 il grafico A con quello B); hanno invece caratteri più variabili se si presentano in modo quasi continuo (fig. 1, 1 A). Le diverse forme di attività elettrica spontanea si osservano con caratteri in tutto simili nei preparati di animali predisposti (fig. 2 A) e non predisposti (fig. 1, 2 A) e in una eguale percentuale di essi <sup>(13)</sup>.

La risposta della corteccia isolata di Cane allo stimolo elettrico isolato (impulsi rettangolari, della durata di 0,5 msec e di voltaggio compreso

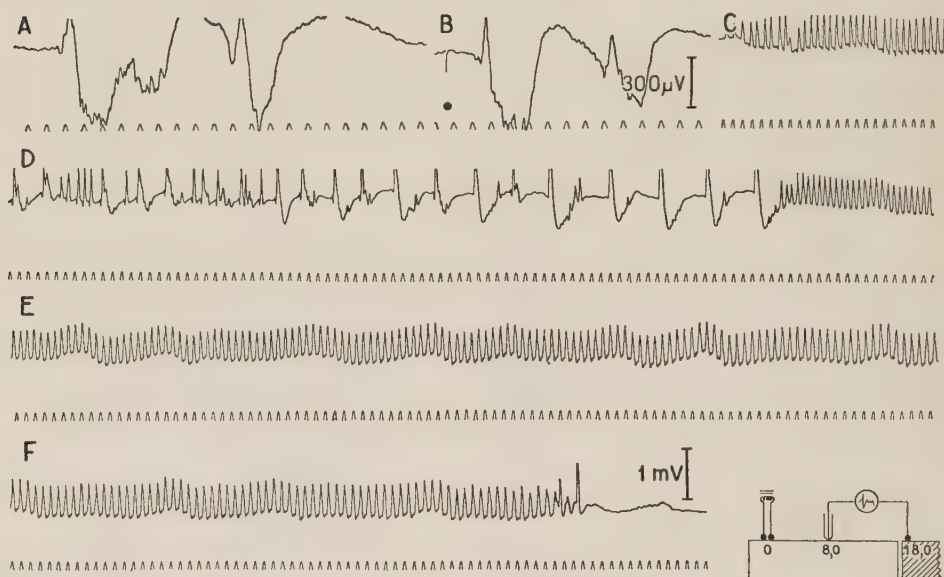


Fig. 2. - Attività elettrica spontanea e provocata da stimoli elettrici isolati ovvero ripetuti nel lembo isolato di corteccia cerebrale allestito in un Cane predisposto alla epilessia riflessa.

Per la polarità delle deflessioni e le altre indicazioni affiancate ai grafici si veda la leggenda della fig. 1. Tempo = 0,1 sec.

A: oscillazioni di potenziale insorte indipendentemente da ogni stimolazione, B: risposta a uno stimolo elettrico isolato di voltaggio liminale (7 V; 0,5 msec). C: effetti di una stimolazione iterativa (13 V; 0,5 msec; 50 Hz; 5 sec) registrati subito dopo la fine della stimolazione. D: continuazione di C. E: inizia 23 sec dopo la fine della stimolazione, i cui effetti iniziali sono registrati in C e D. F: continuazione di E.

generalmente tra 4 e 8V), è costituita da una deflessione superficie-positiva preceduta, quando la distanza tra gli elettrodi di stimolazione e quello critico di derivazione è inferiore a 5-10 mm, da una deflessione superficie-negativa <sup>(10)</sup>. Tale risposta non è diversa nel lembo di Cane predisposto e in quello di Cane non predisposto, per quanto concerne sia l'aspetto della

(13) Facciamo presente che il 65 per 100 degli animali da noi impiegati è risultato predisposto alla epilessia riflessa e tale valore corrisponde a quelli generalmente rilevati in questo Laboratorio dal 1953 ad oggi su oltre 150 Cani. Com'è noto le percentuali di Cani predisposti determinate dai diversi Autori variano notevolmente [cfr. AMANTEA <sup>(1)</sup>; MARTINO <sup>(4)</sup>; ALIBRANDI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXIX, 719 (1953)].

risposta stessa (fig. 1, 2 B e 2 B), sia i valori liminali del voltaggio dello stimolo.

Una serie d'impulsi della durata di 0,5 msec e di voltaggio pari al doppio di quello liminale per lo stimolo singolo, che si succedono per 5 sec con la frequenza di 50–120 Hz, provoca nel lembo corticocerebrale del Cane non predisposto la comparsa di una o poche scariche di onde durante la stimolazione e talora nei primi 1–2 sec successivi: l'aspetto delle oscillazioni postume<sup>(14)</sup> è lo stesso di quelle destate dallo stimolo elettrico isolato (fig. 1, 1 B e 1, 2 C). Nel lembo di Cane predisposto, le oscillazioni osservabili dopo la fine della stimolazione sono manifeste per un tempo più lungo (da 10 a 60 sec, con massimi di 4–5 min) e inoltre assumono, *ab initio* ovvero dopo alcune stimolazioni, un aspetto convulsivo. Possono presentarsi come oscillazioni difasiche simmetricamente sviluppate nelle due fasi (fig. 2 C, E, F), della frequenza di 12–18 Hz, ovvero come ampie onde, negative o positive, di notevole complessità (*bursts*: fig. 2 D). L'alternarsi di onde difasiche e di *bursts* costituisce la modalità della risposta più frequente dei preparati (fig. 2 C–F).

Abbiamo indagato quali siano i parametri della stimolazione iterativa coi quali si ottiene più facilmente l'effetto convulsivante nel lembo corticale isolato di Cane predisposto. Essi sono i seguenti: voltaggio pari a circa il doppio di quello liminale per la risposta isolata; durata di ciascun impulso 0,5 msec; frequenza 50–120 Hz; durata della stimolazione, 5 sec. Per altro la stimolazione iterativa risulta assai spesso efficace quando il valore di uno solo dei suoi parametri sia ridotto fino a un minimo che rispettivamente è: voltaggio pari al 150 per 100 di quello liminale per la risposta isolata; durata del singolo impulso, 0,1 msec; frequenza, 15 Hz; durata della stimolazione, 2 sec.

L'attività precedente del preparato ne modifica la reattività, la quale all'inizio dell'esperimento va saggiata effettuando a intervalli di 5 min<sup>(15)</sup> alcune stimolazioni con le caratteristiche più efficacemente convulsivanti. Si osserva allora spesso come le risposte si facciano via via più prolungate e le oscillazioni che le costituiscono, assumano caratteri sempre più nettamente convulsivi. Manifestatisi tali caratteri una prima volta, un'attività convulsiva tipica risulta generalmente evocabile anche impiegando impulsi di bassa cadenza, come 15–30 Hz; all'opposto una stimolazione di tale frequenza solo in rari casi riesce efficace quando venga impiegata in preparati, nei quali non si sia ottenuta un'attività di tipo convulsivo. L'effetto «facilitante» della precedente attività convulsiva è di solito manifesto per 30 min, non oltre.

(14) L'analisi dei fenomeni oscillatori provocati durante la stimolazione, non si può fare a causa degli artefatti provocati dalla stimolazione stessa: gli elettrogrammi derivati nel corso di questa permettono semplicemente di accertare la presenza ovvero l'assenza delle risposte.

(15) Tale intervallo di tempo abbiamo costantemente lasciato trascorrere tra due successive stimolazioni, la durata dell'intervallo essendo computata a partire dal momento in cui cessavano gli effetti destati dalla prima stimolazione.

Ciò che si è testé riferito intorno ai parametri della stimolazione iterativa apparsi più efficaci nel provocare l'attività convulsiva del lembo di Cane predisposto, ci ha permesso di studiare gli effetti di tale stimolazione nella corteccia cerebrale isolata di Cane non predisposto, operando nelle condizioni che avrebbero dovuto essere più convenienti per ottenere fenomeni convulsivi nel preparato stesso. Abbiamo sistematicamente indagato gli effetti di 7-10 stimolazioni, ripetute a intervalli di 5 min ed eseguite con le caratteristiche indicate dianzi, a fine di escludere che l'assenza di ogni effetto convulsivo potesse dipendere dal fatto, rilevato in alcuni dei Cani predisposti, che all'inizio delle prove fosse nel preparato scarsamente manifesta la proprietà di presentare fenomeni elettrici convulsivi e abbiamo anche utilizzato parametri inconsueti (aumentando la frequenza fino a 300 Hz; ovvero la durata del singolo impulso fino a 2 msec o ancora la durata complessiva della stimolazione fino a 20 sec) per accertare che le caratteristiche di stimolazione più efficacemente convulsivanti nel Cane non predisposto non fossero diverse da quelle dell'animale predisposto. In nessun caso abbiamo osservato nel lembo di Cani non predisposti il manifestarsi di una attività convulsiva come conseguenza della stimolazione effettuata.

Era necessario infine indagare se la comparsa dell'attività convulsiva nel lembo di Cane predisposto potesse essere la conseguenza di un effetto facilitante che sia riferibile all'accesso convulsivo provocato nel saggiare lo stato di predisposizione. La qual cosa poteva invero apparire poco probabile, tenuto conto del tempo che di solito intercorre tra l'accesso epilettico e le stimolazioni del lembo medesimo (1 h e 30 min, in media): si è visto che in tale preparato la durata degli effetti facilitanti esercitati dall'attività convulsiva non supera i 30 min; d'altra parte si era sempre avuto cura d'interrompere, al suo primo apparire, l'accesso degli animali predisposti. Tuttavia abbiamo esaminato l'attività del lembo isolato di corteccia di Cani predisposti, nei quali avanti di allestire il lembo stesso si era provocato un accesso di epilessia faradica: la stimolazione iterativa di tali preparati non ha dato risultati diversi da quelli esposti nelle pagine che precedono.

In conclusione, soltanto nel Cane predisposto alla epilessia riflessa i neuroni del lembo isolato di corteccia cerebrale sono capaci di mantenere un'attività convulsiva duratura, cessato il bombardamento degli impulsi elettrici epilettogeni che hanno avviato l'attività stessa. Nel lembo corticale di Cane non predisposto, la stimolazione iterativa non desta mai una attività ritmica che perduri a lungo, ma solo qualche scarica di onde durante l'applicazione stessa degli stimoli e talora dei primi 1-2 sec successivi. E i controlli eseguiti provano che il manifestarsi dell'attività convulsiva nel lembo di Cane predisposto non è la conseguenza di un effetto facilitante dovuto all'accesso epilettico provocato nel saggiare lo stato di predisposizione.

Quindi si deve dire che la separazione della corteccia dalle strutture sottocorticali e la riduzione dei circuiti intracorticali, attuate nel preparato di corteccia isolata, importano conseguenze diverse nel Cane predisposto e

in quello non predisposto, tanto che si fanno manifeste differenze di reazione che non hanno riscontro negli animali a corteccia integra. Si sa che l'epilessia faradica è un fenomeno praticamente costante, ossia indipendente dallo stato di predisposizione dell'animale alla epilessia riflessa.

Quanto al problema della predisposizione, riguardato sotto l'aspetto della fisiologia speciale, tali differenze possono avere un significato nel solo caso che si dimostri come il carattere autonomo e persistente dell'attività convulsiva destata dalla stimolazione iterativa nel lembo di Cane predisposto costituisca una componente della predisposizione stessa, vale a dire sia la espressione di una proprietà funzionale che nell'animale a nevrasse integro valga a spiegare l'irradiazione a tutta la corteccia di un'attività convulsiva circoscritta.

Ci sembra che la condizione ora prospettata possa ritenersi attuale. Invero, la propagazione dell'attività convulsiva nella corteccia appare subordinata al fatto che gl'impulsi originati dal gruppo di neuroni le cui pulsazioni hanno assunto per una causa qualsiasi un carattere ipersincrono, possano avviare in aree collegate anatomicamente [Rosenblueth e Cannon <sup>(16)</sup>; Rosenblueth, Bond e Cannon <sup>(17)</sup>] un'attività convulsiva che acquista carattere autonomo; e possano quindi, in modo mediato, estendere progressivamente la loro azione a tutta la corteccia. Quando invece gli effetti destati dal bombardamento degli impulsi epilettogeni in aree contigue al *focus* non assumono un carattere autonomo, la propagazione dell'attività convulsiva diventa a distanza, ossia con l'aumentare del numero delle sinapsi interposte, sempre meno probabile: il focolaio che funge da *pace-maker* del ritmo convulsivo [Rosenblueth e Cannon <sup>(16)</sup>] viene infatti intrattenendo tutt'intorno ritmi pulsatori meno frequenti di quello suo proprio per effetto del *décalage* di frequenza inevitabilmente collegato con la trasmissione sinaptica degli impulsi [Moruzzi <sup>(8)</sup>] e la sua azione epilettogena progressivamente si attenua per ogni nuova sinapsi interposta.

Rammentiamo come nel Cane predisposto e a nevrasse integro la frequenza delle onde convulsive nell'area stricninizzata, frequenza che progressivamente si accresce per effetto degli impulsi destati dalle ripetute stimolazioni periferiche, raggiunga i valori massimi di 10-18 Hz; e come la propagazione dell'attività convulsiva a tutta la corteccia si manifesti generalmente solo quando la frequenza delle onde stricniniche tocchi tali valori [Crepax e Fadiga <sup>(18)</sup>]. Come si è fatto presente, la frequenza minima della stimolazione iterativa capace di destare un'attività convulsiva nella corteccia isolata del Cane predisposto è 15 Hz. Potrebbe essere una coincidenza non casuale il fatto che i valori di frequenza efficaci siano quasi eguali nei due casi.

(16) A. ROSENBLUETH a. W. B. CANNON, « Amer. J. Physiol. », CXXXV, 670 (1941).

(17) A. ROSENBLUETH, D. D. BOND a. W. B. CANNON, « Amer. J. Physiol. », CXXXVII, 681 (1942).

(18) P. CREPAX e E. FADIGA, « Arch. Sci. biol. », in corso di stampa.

**Patologia.** — *Sulle glomeruliti nella nefropatia sperimentale « tipo Masugi » nel ratto* (\*). Nota di E. L. BENEDETTI e G. COPPOLA, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. BOMPIANI.

Molti autori hanno riprodotto, dopo i primi esperimenti di Masugi [9, 10], una grave nefropatia nel ratto, iniettando per via endovenosa il siero di conigli vaccinati con il tessuto renale del primo animale. Il quadro anatomo-clinico della malattia indotta sperimentalmente talora corrisponde a quello della glomerulonefrite diffusa come si verifica nell'uomo (Lippmann e coll.ri [8]), talaltra a quello della nefrosi lipoidea. Sono stati individuati alcuni fattori che favorirebbero ora l'uno ora l'altro quadro morboso, quali ad esempio l'età degli animali, la potenza del siero nefrotossico e le dosi con le quali esso viene somministrato ai ratti. Negli animali giovani o con dosi elevate di siero fortemente nefrotossico, il tipo delle alterazioni riprodotte sarebbe più simile a quello della nefrosi lipoidea (Ehrich e coll.ri [4]; Hymann e coll.ri [6]).

Nelle prime esperienze di Masugi [9] ed anche nelle ulteriori di Smadel [13] e di Ehrich e collaboratori [4], l'antigene utilizzato per vaccinare i conigli era l'intero tessuto renale; ma altre ricerche hanno dimostrato (Salomon e collaboratori [12]) che le sole membrane basali della parete dei capillari glomerulari sono in grado di provocare nel coniglio la formazione della nefrotossina; e che la stessa proprietà è posseduta dalla sola frazione corticale, priva dei glomeruli (Baxter [1]), come se la proprietà antigene fosse legata a strutture comuni presenti sia nella frazione glomerulare che in quella tubulare.

#### TECNICA DELLA RICERCA E RISULTATI.

Le membrane basali dei glomeruli e dei tubuli, il tessuto reticolare, e il tessuto collagene interstiziale (che nei ratti è scarsissimo) sono state isolate dalle cellule mediante dissoluzione in apparecchio « Waring Blendor » e con prolungata lisi osmotica; il materiale così ottenuto per ripetute centrifugazioni è stato liofilizzato. Per la produzione del siero immune sono stati scelti conigli di ambo i sessi del peso di circa 3 Kg., nei quali venivano iniettati per via intramuscolare, per due volte, a distanza di 4 giorni, 50 mg. di antigene sospesi in 30 cc. di soluzione fisiologica; al trentesimo giorno si praticava una terza iniezione di 50 mg. di antigene. Al 40° giorno il coniglio veniva salassato, ed il siero liofilizzato. I sieri immuni sono stati adoperati isolatamente, non mai mescolati tra loro, come è stato fatto da altri Autori.

Nei nostri esperimenti abbiamo adoperato ratti giovani, di peso variante tra 50 e 100 g. Gli animali sono stati suddivisi in tre gruppi.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia patologica dell'Università di Roma (Dir.: prof. Gaetano Bompiani).

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

PRIMO GRUPPO. — A ciascuno di questi ratti sono stati iniettati complessivamente 180 mg. di siero liofilizzato, suddivisi in quattro dosi, somministrate in quattro giorni successivi, impiegando come solvente 0,75 cc. di soluzione fisiologica per ciascuna dose.

Rapidamente gli animali presentavano abbondante proteinuria, edemi, modica elevazione dell'azotemia.

*Nella prima settimana di malattia* le lesioni istologiche osservate corrispondono ad una grave alterazione della membrana basale delle anse glomerulari, che appare rigonfia, parzialmente dissolta, intensamente colorabile con il metodo di Mac Manus per i polisaccaridi, e colorabile vitalmente con il Bleu Evans. Il lume dei capillari è ristretto e talora obliterato per l'accumulo di materiale polisaccarideo che diffonde dalla membrana basale e dallo stroma periampollare. Non si nota proliferazione delle cellule endoteliali ed epiteliali, né di quelle situate nello stroma glomerulare.

*Nella seconda settimana*, gli animali presentano ancora più imponente proteinuria, iperazotemia, edemi, ipercolesterolemia ed ipoproteinemia.

Le lesioni istologiche non sono dello stesso tipo in tutti gli animali; si osservano infatti lesioni diverse a seconda del siero nefrotossico iniettato.

Alcuni sieri determinano nei ratti il quadro istopatologico della *glomerulite membranosa*.

Altri animali presentano un quadro diverso nel senso che si sviluppa, a partire dal 9° giorno dall'inizio del trattamento, una grave *glomerulite proliferativa ed essudativa* e talora *necrotizzante*. In alcuni glomeruli si è notata una lesione non segnalata sino ad ora nella nefropatia sperimentale tipo Masugi. Si tratta di *dilatazioni aneurismatiche* del lume di gruppi di capillari, occupate da numerosi globuli rossi diversamente conservati, commisti a densi depositi di polisaccaridi; altro materiale polisaccarideo si deposita all'esterno della membrana basale, formando su di essa « cuffie » che occupano lo spazio capsulare. Nella sostanza PAS-positiva, con i metodi istologici adatti, si mettono in evidenza goccioline di materiale lipidico. Le cellule endoteliali ed epiteliali nella sede di questa lesione sono distrutte.

SECONDO GRUPPO. — Nei ratti di questo gruppo è stato iniettato un terzo della dose adoperata nel gruppo precedente, con le stesse modalità. In questi animali la malattia si è sviluppata in modo meno grave, ma con gli stessi caratteri clinici, nel senso della presenza di proteinuria, di modici edemi e di elevazione dell'azotemia incostante e meno marcata che quella osservata nel gruppo precedente. Le lesioni istologiche nella prima settimana corrispondono al quadro di una lieve *glomerulite membranosa*, con positività della colorazione del Bleu Evans *in vivo*. Nella seconda settimana sono più marcate le *lesioni glomerulari proliferative* delle cellule endoteliali, mentre sono assenti le lesioni essudative e necrotizzanti, nonché la dilatazione aneurismatica del lume capillare descritta precedentemente.

TERZO GRUPPO. - I ratti appartenenti a questo gruppo sono stati trattati con la dose completa (180 mg.) di nefrotossina proveniente da uno dei conigli immunizzati. Descriviamo separatamente le lesioni in essi riscontrate poiché l'effetto di questo siero è stato sostanzialmente diverso da quello prodotto dagli altri. In questi animali non si sono avute, né nella prima, né nella seconda settimana, sintomi clinici patologici. L'esame istologico dei reni degli animali sacrificati nella prima settimana non ha messo in evidenza lesioni glomerulari o tubulari apprezzabili. Nei ratti sacrificati nella seconda settimana si osservano invece *lesioni glomerulitiche parcellari*, caratterizzate da intensa proliferazione delle cellule endoteliali non associata ad alterazione delle membrane basali dei capillari. Talora tra le cellule endoteliali proliferate si osservano sottili filamenti PAS-positivi. Le membrane basali non si colorano vitalmente con il Bleu Evans.

#### COMMENTO AI RISULTATI.

Utilizzando la sola frazione metaplasmatica della corticale renale del ratto è stato possibile produrre nel coniglio sieri immuni fortemente nefrotossici per il ratto, e, con questo risultato, dimostrare che la frazione specifica del tessuto renale che induce la produzione di anticorpi nell'animale vaccinato si identifica con le *membrane basali* dei glomeruli e dei tubuli e con il *tessuto reticolare*. Queste strutture vengono, nell'insieme, definite con il termine di « reticolina », che è composta da complessi glicoproteici e lipidici (Windrum e coll. [15]).

La malattia che si produce sperimentalmente, nella grande maggioranza dei casi, è una nefropatia che presenta delle varianti nel quadro clinico e morfologico, paragonabili a volte alla glomerulonefrite umana diffusa, a volte alla nefrosi lipoidea. Nei nostri esperimenti uno dei fattori che si è visto essere responsabile di queste varianti corrisponde alle *caratteristiche intrinseche dei sieri* prodotti dagli individui, diversi, animali produttori del siero (i singoli conigli). Pur essendo i conigli vaccinati con l'identico antigene e con le stesse modalità, i sieri immuni hanno proprietà differenti. Abbiamo notato infatti che nei ratti (dello stesso sesso ed età) trattati con i sieri di alcuni dei conigli, si è avuto come risultato quella lesione che nell'uomo sta alla base della così detta nefrosi lipoidea: la *glomerulite membranosa*, che inizia già nella prima settimana e procede nel tempo, senza essere accompagnata da proliferazione cellulare. Nei ratti invece trattati con sieri di altri conigli, mentre nella prima settimana si osserva il quadro della glomerulite membranosa, successivamente le lesioni glomerulari sono sostanzialmente diverse, del tipo proliferativo od essudativo, come si osservano nella glomerulonefrite diffusa umana, e compaiono anche lesioni nodulari aneurismatiche, simili a quelle riproducibili con il cortisone. Ancora un altro siero ha provocato, in tutti gli animali con esso trattati, una lesione, clinicamente asintomatica, nella quale la nota dominante era la proliferazione delle cellule endoteliali, senza alterazione della membrana basale; la

lesione era limitata solo ad alcuni capillari glomerulari, vale a dire una lesione glomerulitica proliferativa parcellare, che Bell [2] ha definito come nefrite preclinica.

Somministrando dosi minori di quegli stessi sieri – che, con le dosi maggiori, avevano provocato la glomerulite membranosa o quella proliferativa – il quadro che si determina è caratterizzato prevalentemente dalla proliferazione delle cellule endoteliali ed epiteliali del glomerulo.

Ove si voglia formulare un'ipotesi patogenetica basata sulle osservazioni istopatologiche, si può dire che la nefrotossina, nella grande maggioranza dei casi, ha un'azione immediata al momento dell'assorbimento di essa a livello dei capillari glomerulari. Con ogni verosimiglianza l'effetto che si produce corrisponde alla *denaturazione delle glicoproteine*, che costituiscono le membrane basali e lo stroma glomerulare, con parziale depolimerizzazione di esse. Questo diverso stato di aggregazione delle glicoproteine, nelle nostre ricerche è stato messo in evidenza con la tecnica della colorazione vitale con Bleu Evans, che è un colorante, conosciuto anche con la sigla T 1824, il quale, come hanno dimostrato Gersh e Catchpole [5], ha la proprietà, una volta iniettato nell'animale vivente, di fissarsi elettivamente là dove si sia verificato un processo di depolimerizzazione, vuoi delle sostanze fondamentali e cementanti del tessuto connettivo, vuoi delle membrane basali. Altri Autori, con altra metodica, studiando l'assorbimento dei raggi ultravioletti da parte delle strutture glomerulari in svariate nefropatie, sono giunti alle stesse conclusioni, che cioè le strutture metaplasmatiche possono essere denaturate e le sostanze mucopolisaccaridee che costituiscono il materiale cementante essere depolimerizzate (Sommers e coll.ri [14]).

La denaturazione delle membrane basali e delle sostanze cementanti determina aumento, o comunque una modificazione, della permeabilità delle anse glomerulari, tanto è vero che nei nostri ratti si è osservata una notevole filtrazione di Bleu Evans anche nello spazio capsulare e nel lume tubulare.

Questa alterazione sta alla base della così detta glomerulite membranosa, che è anche caratterizzata dal progressivo ispessimento della membrana basale delle anse e dello stroma glomerulare. L'aumento di spessore di dette strutture può essere interpretato come fenomeno di apposizione di sostanze che si legano alle glicoproteine depolimerizzate, alcune delle quali di provenienza ematica (albumine, globuline, fibrinogeno); è noto infatti che le sostanze depolimerizzate divengono più capaci di assorbire e di fissare sostanze (sostanze coloranti, proteine, ecc.) in virtù della maggiore quantità ed attività dei gruppi chimici che si sono liberati nel processo di depolimerizzazione.

La g. membranosa è dunque caratterizzata dall'assenza di processi proliferativi che invece sono propri dell'altro tipo di glomerulite descritta, prodotta per azione di sieri differenti, sebbene preparati con le stesse modalità. Tuttavia le lesioni proliferative si sviluppano dopo un certo intervallo di tempo, e da questo si arguisce che la nefrotossina mette in movimento un

meccanismo patogenetico più complesso di quello prima ricordato, che impiega circa una settimana a svilupparsi.

Nella nefrite sperimentale del coniglio - sia da nefrotossina che da proteine eterogenee (Masugi [10], More e Waugh [11]) - è stato provato che il verificarsi della glomerulite proliferativa è in rapporto alla produzione di anticorpi anti-nefrotossina, che, per la loro formazione, avrebbero necessità di un lasso di tempo di circa 7 giorni (Kay [7]); infatti se con Raggi X o con cortisone si impedisce la formazione di anticorpi, la proliferazione glomerulare provocabile con le modalità sopradette è fortemente impedita (Bibliografia ed esame critico nella conferenza del prof. Bompiani [3]). La differenza sostanziale di ordine patogenetico tra la glomerulite membranosa e quella proliferativa, corrisponde al fatto che si possano formare anticorpi anti-nefrotossina (glomerulo-nefrite), oppure che questa produzione sia impedita od insufficiente (nefrosi lipoidea). In rapporto alle caratteristiche del siero nefrotossico, varia anche la reazione dell'organismo nei suoi confronti, ma la produzione di anticorpi-antinefrotossina può essere difettosa o del tutto assente in relazione alle caratteristiche intrinseche dell'organismo nel quale essa viene iniettata, come hanno dimostrato le ricerche di molti autori (Hymann e coll.ri [6]; Lippmann e coll.ri [8]; Ehrich e coll.ri [4]) i quali hanno visto variare il quadro anatomoclinico utilizzando ratti di età differente o di sesso differente, o modificando i fattori ormonici della produzione di anticorpi mediante surrenalectomia, somministrazione di cortisone, di ACTH o di acetato di desossicorticosterone.

La determinazione del quadro anatomoclinico dell'affezione renale è un processo complesso nel quale entrano fattori che dipendono dall'agente eziologico (nefrotossina), dalla reazione anticorpale che esso determina nell'organismo, e dalle caratteristiche intrinseche di quest'ultimo.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BAXTER A., *Proceedings 5th. annual conference on the nephrotic syndrome*, 1954.
- [2] BELL E. T., *Renal diseases*. Lea Febiger, Philadelphia 1947.
- [3] BOMPIANI G., *Precisazioni in tema di anatomia patologica delle nefropatie* (Conferenza). *Attualità in medicina*, vol. III, Roma 1956.
- [4] EHRLICH F., FORMAN C., SEIFER S., « Arch. Path. », 54, 463 (1953).
- [5] GERSCH I., CATCHPOLE H. R., « Am. J. Anat. », 85, 457 (1949).
- [6] HYMAN W., LUND M., « Pediatrics », 7, 691 (1951).
- [7] KAY C. F., « J. Exper. Med. », 72, 559 (1940).
- [8] LIPPMANN R. W., MARTI H. U, CAMPBELL D. H., « Arch. Path. », 53, 1, (1953).
- [9] MASUGI M., « Beitr. path. Anat. », 91, 82 (1933).
- [10] MASUGI M., « Beitr. path. Anat. », 92, 429 (1934).
- [11] MORE R. M., WAUGH D., « J. Exper. Med. », 89, 341 (1949).
- [12] SALOMON D. H., GARDELLA S., FANGER H., DETHIER S., FERREBEE J. N., « J. Exper. Med. », 90, 267 (1949).
- [13] SMADEL J. E., « J. Exper. Med. », 65, 541 (1937).
- [14] SOMMERS S. C., CROZIER R., WARREN S., « Am. J. Path. », 30, 919 (1954).
- [15] WINDRUM G. M., KENT P. W., EASTOE J. E., « Brit. J. Exper. Path. », 36, 49 (1955).

**Biologia.** — *Il nucleo della cellula nervosa dei Vertebrati. Osservazioni in Anfibi anuri.* Nota<sup>(\*)</sup> di GIORGIO M. BAFFONI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

In questi Rendiconti sono stati già riferiti alcuni risultati di una ricerca sulle strutture nucleari della cellula nervosa di Vertebrati, relativi alle modificazioni che si verificano durante lo sviluppo ed all'esame comparativo di neuroni di diverso tipo in Mammiferi<sup>(1)</sup> ed in un Anfibio urodelo<sup>(2)</sup>. Da tali osservazioni appare che all'inizio del differenziamento del neurone la cromatina (materiale Feulgen-positivo) perde l'uniformità di distribuzione che presenta nel karioplasma del neuroblasta, dirigendosi in parte verso la membrana nucleare ed in parte attorno al nucleolo ribonucleico (formazione della cromatina nucleolo-associata di Caspersson); inoltre, al termine dello sviluppo, la cromatina, in particolare quella diretta contro la membrana nucleare, assume un aspetto diverso in rapporto con il volume nucleare dei diversi neuroni; le uniche differenze messe in evidenza tra Mammiferi ed Anfibi urodela consistono nell'aspetto (filamentoso nei primi, granulare nei secondi) e nella quantità (minore nei Mammiferi) della cromatina del neuroblasta.

In questa Nota riferisco i risultati emersi dall'esame del nucleo nelle cellule nervose di Anfibi anuri. È noto infatti, fin dalle classiche ricerche di Levi (1896)<sup>(3)</sup>, che il nucleo dei neuroni degli Anfibi anuri presenta caratteri intermedi tra quello dei Vertebrati superiori e degli Anfibi urodela. Sorvolo sulle osservazioni compiute sul nucleo di cellule nervose di Anfibi anuri da Holmgren (1899), Rhode (1903), Havet (1906) e da altri Autori che si sono interessati più che altro della struttura del nucleolo e dei suoi rapporti con l'elaborazione della sostanza basofila; mi soffermo invece su una più recente ricerca di Olzewski (1947)<sup>(4)</sup> il quale, avendo per primo applicato una reazione istochimica (di Feulgen) su questo materiale, descrive nel nucleo una struttura di fini granulazioni eucromatiche e di grossi granuli eterocromatici (cromocentri o nodi della rete); secondo l'Autore questi ultimi durante lo sviluppo del neurone divengono più evidenti e voluminosi; inoltre Olzewski conferma lo stretto parallelismo tra grandezza del nucleolo e quantità della sostanza basofila.

Le presenti osservazioni sono ricavate dall'esame di una serie di stadi

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 17<sup>o</sup>, p. 70 (1954); *Ibidem*, vol. 20<sup>o</sup>, p. 125 (1956).

(2) M. MARINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 20<sup>o</sup>, p. 373 (1956).

(3) G. LEVI, « Riv. Patol. nerv. ment. », vol. 1<sup>o</sup>, p. 141 (1896).

(4) J. OLZEWSKI, « Biol. Zentralbl. », vol. 66<sup>o</sup>, p. 265 (1947).

di sviluppo (quelli larvali classificati sec. Taylor e Kollros<sup>(5)</sup> in *Rana pipiens*) di rospo (*Bufo bufo* L.) e di rana (*Rana esculenta* L.); ho seguito con particolare attenzione gli stadî pre- e postmetamorfici. Ho scelto centri nervosi di facile identificazione, a varia altezza del neurasse e che diversificassero tra di loro per attività funzionale, epoca e velocità di sviluppo e per dimensioni dei loro elementi; perciò ho esaminato le modificazioni nucleari di elementi di gangli spinali (lombari e toracici), di centri motori del midollo spinale, di gangli e centri rombencefalici (complessi IX-X, VII-VIII, motorio del V), di un centro mesencefalico (del V), di centri diencefalici (preottici), del cervelletto, dei lobi olfattori e della retina.

Su sezioni seriali di spessore diverso, in genere sottili (3-5  $\mu$ ), ho applicato la reazione di Feulgen (sec. Stowell 1945); su altre ho provato i metodi istochimici per il riconoscimento del nucleolo ribonucleico (metodo di Brachet sec. Gerola e Vannini) e per quello delle strutture proteiche (metodi di Mazia, Brewer e Alfert 1953, e di Yasuma e Ichikawa 1953)<sup>(6)</sup>; inoltre ho eseguito preparati per schiacciamento: alcuni in soluzione fisiologica per l'immediata osservazione in contrasto di fase, ed altri per la colorazione *in toto* dei nuclei con il carminio acetico.

Il nucleo del neuroblasta del tubo neurale di rospo e di rana (embrioni allo stadio di bottone caudale) è di forma allungata (nel rospo misura in media 7,3  $\mu$  di diametro) ed al contrasto di fase presenta un aspetto finemente granulare. Il materiale Feulgen-positivo nel nucleo del neuroblasta di Anfibi anuri si presenta costituito da granuli di diversa grossezza<sup>(7)</sup> misti a filamenti (fig. 1); granuli e filamenti appaiono sparsi in tutto il carioplasma, tranne che nel piccolo nucleolo ribonucleico. L'aspetto del neuroblasta di Anfibi anuri è perciò intermedio tra quello osservato nei Mammiferi (filamentoso) e quello dell'Anfibio urodelo (granulare); la differenza di aspetto delle strutture cromatiniche del neuroblasta dei diversi Vertebrati con tutta probabilità è dovuto alla distanza ed alla grossezza dei cromomeri lungo i cromonemi despiralizzati del nucleo intercinetico. Nei preparati colorati con carminio acetico il nucleo del neuroblasta di Anfibi anuri assume un aspetto filamentoso; la differenza tra questo e quello ottenuto con il metodo di Feulgen può esser dovuta al fatto che il carminio acetico colora con minor precisione i granuli desossiribonucleici o che esso ha affinità per altre parti Feulgen-negative.

Nei neuroni che raggiungono notevoli dimensioni (elementi tegmentali, motori del midollo spinale, alcune cellule gangliari) l'inizio del differenziamento si manifesta con un aumento di volume, accompagnato da cambiamenti della cromatina; dalla seriazione dei nuclei presumo che questa si diriga in parte preponderante contro la membrana nucleare ed in parte a

(5) A. C. TAYLOR e J. J. KOLLROS, « Anat. Rec. », vol. 94<sup>o</sup>, p. 7 (1946).

(6) Per maggiori ragguagli ved.: G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. 16<sup>o</sup>, p. 113 (1954); « Arch. Zool. Ital. », vol. 41<sup>o</sup>, p. 1 (1956).

(7) Non impiego il termine *cromocentro* per le ragioni esposte nella nota alla p. 53 del mio lavoro nell'« Arch. Zool. Ital. » (vol. 41<sup>o</sup>, 1956).

ridosso del minuto nucleolo ribonucleico: infatti ho osservato in un primo momento i granuli più grossi (in genere 6) contro la membrana nucleare (fig. 2), quindi i granuli più minuti ed i filamenti; i granuli minuti sembrano unirsi a quelli più grossi formando estese zolle appiattite aderenti alla membrana; i filamenti si uniscono alle zolle conferendo ad esse inizialmente un aspetto raggiato e quindi, al termine della migrazione, facendole apparire come anastomizzate le une con le altre, così che contro la membrana nucleare la cromatina assume un aspetto di reticolo (fig. 3), in un primo momento a maglie irregolari ed a travate relativamente robuste e infine a maglie strette, regolari ed a travate sottili (fig. 4). La cromatina che si dirige verso il nucleolo ribonucleico si unisce al sottilissimo rivestimento Feulgen-positivo del neuroblasta ispessendolo, specialmente in 2-3 punti (zolle di Levi), e costituendo la cromatina nucleolo-associata (figg. 2-4). Modificazioni ed aspetti simili a quelli osservati per le strutture Feulgen-positive li ho constatati con i metodi per le proteine.

L'aspetto della cromatina come un reticolo contro la membrana nucleare e come un rivestimento con qualche rilievo attorno al nucleolo ribonucleico, è tipico delle cellule nervose che hanno compiuto il proprio differenziamento: si osserva già all'inizio della vita larvale in alcuni elementi (nei tegmentali, in parte dei centri e gangli VII-VIII e IX-X, dei centri motori e nelle cellule di Rohon-Beard del midollo spinale); in altri elementi, invece, è raggiunto lentamente a vita larvale più o meno inoltrata (neuroni mesencefalici e rombencefalici del V, del centro preottico magnocellulare, ecc.); in certi, infine (elementi cerebellari, molti neuroni sensitivi e motori del midollo spinale in rapporto con l'innervazione degli arti), dove il differenziamento inizia molto tardi (agli stadî XV-XVII), si verifica dopo il termine della metamorfosi.

Nel nucleo dei neuroni che hanno terminato il proprio differenziamento (è il caso di alcuni elementi motori del midollo spinale dopo la metamorfosi), il karioplasma appare quasi vuoto di cromatina; ai più forti ingrandimenti ed in sezioni molto sottili (2-3  $\mu$ ), ho però osservato alcuni (3-6) esili filamenti (nella fig. 7 ne sono indicati 5 dalle frecce) che originano dai rilievi della cromatina nucleolo-associata (zolle di Levi) e si dirigono verso la membrana nucleare, spesso raggiungendola (fig. 7); tali immagini le avevo osservate nei Mammiferi e nell'Anfibio urodelo, ma le avevo ritenute artefatti di fissazione; la costanza e l'evidenza con cui esse si presentano nei preparati di Anfibi anuri fissati con i diversi liquidi da me usati (di Sanfelice, di Carnoy e di Helly), mi hanno portato ad un diverso convincimento, tanto più che esse risultano straordinariamente simili a quelle osservate di recente in nuclei intercinetici di ratto da Ohno e Kinoshita (1955-56)<sup>(8)</sup> ed interpretate come dovute a SAT cromosomi; sarei di questo avviso se avessi potuto appurare la duplicità dei filamenti.

(8) S. OHNO e R. KINOSHITA, « Expl. Cell. Res. », vol. 8°, p. 558 (1955); *Ibidem*, vol. 10°, p. 66 e p. 569 (1956).

Nei nuclei che non raggiungono cospicue dimensioni, l'inizio del differenziamento si manifesta solo con le modificazioni della cromatina, non essendo evidente in essi aumento volumetrico.

Durante l'accrescimento somatico, l'aumento del territorio d'innervazione influisce sulla maggior parte dei neuroni, i quali subiscono un accrescimento più o meno marcato (legge di Levi); questo si ripercuote sul nucleo con un aumento di volume ed una concomitante rarefazione del materiale Feulgen-positivo: il reticolo cromatinico addossato alla membrana nucleare, infatti, appare tanto più delicato quanto maggiori sono le dimensioni raggiunte dal nucleo (figg. 5 e 6); nei neuroni voluminosi i granuli nodali divengono minuti, le travate si interrompono e nei più grossi (multipolari motori del midollo spinale) esse scompaiono del tutto, restando contro la membrana nucleare solo granuli più o meno distanziati (fig. 8); con l'aumento delle dimensioni nucleari la cromatina nucleolo-associata si modifica molto meno, divenendo tutt'al più un sottile rivestimento di spessore quasi uniforme attorno al voluminoso nucleolo ribonucleico (fig. 8). Durante il periodo di maggior accrescimento del neurone ho spesso osservato che i nucleoli ribonucleici sono due.

Anche negli Anfibi anuri, come è stato riferito per i Mammiferi e per l'Anfibio urodelo, la migrazione della cromatina nel nucleo di neuroni che presentano un rapido sviluppo (elementi tegmentali, cellule di Rohon-Beard, neuroni motori del midollo spinale) non riesce a tener dietro alla velocità dell'aumento volumetrico nucleare e pertanto al termine del differenziamento essa è ancora incompleta (presenza di granulazioni Feulgen-positive nel carioplasma); in alcuni di questi neuroni la migrazione si completa in periodi successivi dello sviluppo, in altri, invece, resta incompleta.

Le modificazioni verificatesi nel nucleo dei diversi neuroni durante lo sviluppo risultano con chiara evidenza all'esame degli elementi nervosi dell'adulto. La seriazione delle immagini nucleari dei neuroni esaminati nell'adulto di Anfibi anuri (come quella di Mammiferi e dell'Anfibio urodelo) è risultata in rapporto con il volume nucleare e quindi, per le note relazioni tra nucleo e citoplasma, con il volume del neurone; infatti tra i neuroni differenziati ho distinto:

A) neuroni di notevoli dimensioni, quali i multipolari motori del midollo spinale ed i più voluminosi elementi del centro mesencefalico del V: il loro nucleo, di solito ellissoidale (da 17 a 12  $\mu$  di diametro), presenta materiale Feulgen-positivo contro la membrana nucleare con aspetto di granuli di diversa grossezza e distanziati tra loro, qualche delicata granulazione nel carioplasma ed attorno al voluminoso nucleolo un sottile rivestimento su cui esternamente aderisce qualche granulo (fig. 8);

B) neuroni di media grossezza, quali sono tipicamente le cellule di Purkinje del cervelletto, ma anche molti elementi del centro mesencefalico del V, di centri rombencefalici, delle radici dorsali del midollo spinale e di gangli: essi presentano un nucleo lievemente ellissoidale o rotondeggiante (da 12 a 7  $\mu$  di diametro) la cui cromatina è per la massima parte addossata

alla membrana nucleare con aspetto di un reticolo a maglie strette, a travate delicate (a volte di aspetto granulare) ed a granuli nodali minuti, ad eccezione di qualcuno di essi che è tanto più evidente e marcato quanto minori sono le dimensioni nucleari; nel karioplasma si osserva solo il rivestimento del nucleolo ribonucleico, di spessore uniforme tranne che in corrispondenza di 2-3 punti (zolle di Levi) (figg. 5 e 6);

C) neuroni di piccole dimensioni, quali i *granula* del cervelletto e del bulbo olfattorio, le cellule dello strato molecolare della corteccia cerebellare, i neuroni di alcuni centri diencefalici e la gran massa degli elementi che circondano lo strato ependimale: sono elementi con nucleo sferoidale (diametro da 5 a 7  $\mu$ ) sulla cui membrana si osserva un reticolo Feulgen-positivo a maglie relativamente larghe con alcune (sei) grosse zolle nodali unite da filamenti; negli elementi più piccoli (*granula* e cellule dello strato molecolare del cervelletto) il reticolo appare più marcato, e le sei zolle nodali più estese ed evidenti (fig. 9); in sezioni molto sottili (1-2  $\mu$ ) il karioplasma di questi elementi appare privo di cromatina, ad eccezione del rivestimento nucleolare, che in genere appare ispessito ad un polo.

Si discostano da questi elementi i neuroni della retina poiché in essi la cromatina addossata alla membrana nucleare si presenta come un reticolo molto fitto e delicato; inoltre, a differenza dei neuroni di eguali dimensioni del neurasse, in sezioni molto sottili (1  $\mu$  di spessore), il karioplasma non appare vuoto, ma dalla membrana il reticolo si estende invadendo il karioplasma fino a raggiungere la cromatina nucleolo-associata, divenendo però a maglie sempre più rade e prive di granuli nodali (fig. 10); gli elementi del ganglio retinico (6,6  $\mu$  di diametro) diversificano da quelli del ganglio cerebrale (7,7  $\mu$  di diametro) per la minore delicatezza del reticolo e per la maggior evidenza dei granuli nodali addossati alla membrana nucleare; nei neuroni del ganglio cerebrale, inoltre, il sottile rivestimento di cromatina che avvolge il nucleolo è più esile. Dall'osservazione di qualche stadio embrionale, appare che la migrazione della cromatina nel nucleo degli elementi della retina si arresta subito dopo l'arrivo dei granuli più grossi contro la membrana nucleare, non compendosi, probabilmente a causa della rapidità del differenziamento, quella dei granuli più minuti e dei filamenti che, in un secondo tempo, assumono l'aspetto reticolare.

Dall'esame in contrasto di fase, nel nucleo dei neuroni in differenziamento e di adulti, appaiono zolle scure tanto più evidenti ed estese quanto minori sono le dimensioni nucleari; nei nuclei più voluminosi le zolle risultano sulla membrana nucleare: il loro aspetto coincide con quello dei granuli più grossi e delle zolle di cromatina messi in evidenza nei preparati trattati con il reattivo di Feulgen; in elementi della retina ed in qualche altro elemento (probabilmente ependimale) si osservano granulazioni anche nel karioplasma; l'osservazione in contrasto di fase ha offerto la visione delle travate dell'apparente reticolo soltanto in elementi sofferenti (osservazione protratta) o trattati con fissativi. Nei preparati colorati con carminio acetico appare, con maggior evidenza che in quelli trattati con il reat-

tivo di Schiff, l'aspetto reticolare o filamentoso della cromatina aderente alla membrana nucleare; le zolle nodali nel nucleo dei piccoli neuroni (*granula*, ecc.) sembrano internamente vuote.

Nei preparati trattati con i metodi per le proteine, ho seguito le modificazioni nucleari e l'aspetto dei neuroni di diverso tipo: essi sono risultati molto simili a quelli messi in evidenza dai metodi per la cromatina, per quanto con minor chiarezza di dettagli; i nucleoli ribonucleici sono apparsi appena o niente affatto reattivi.

Accenno infine ad un sommario esame compiuto sull'aspetto della cromatina in elementi i quali, pur avendo origine in comune e facendo parte del tessuto nervoso, non sono neuroni: intendo gli elementi che tappezzano le cavità ventricolari ed il canale endimale (cellule endimali). Dall'aspetto del nucleo, nell'endima si possono distinguere i seguenti tipi di elementi:

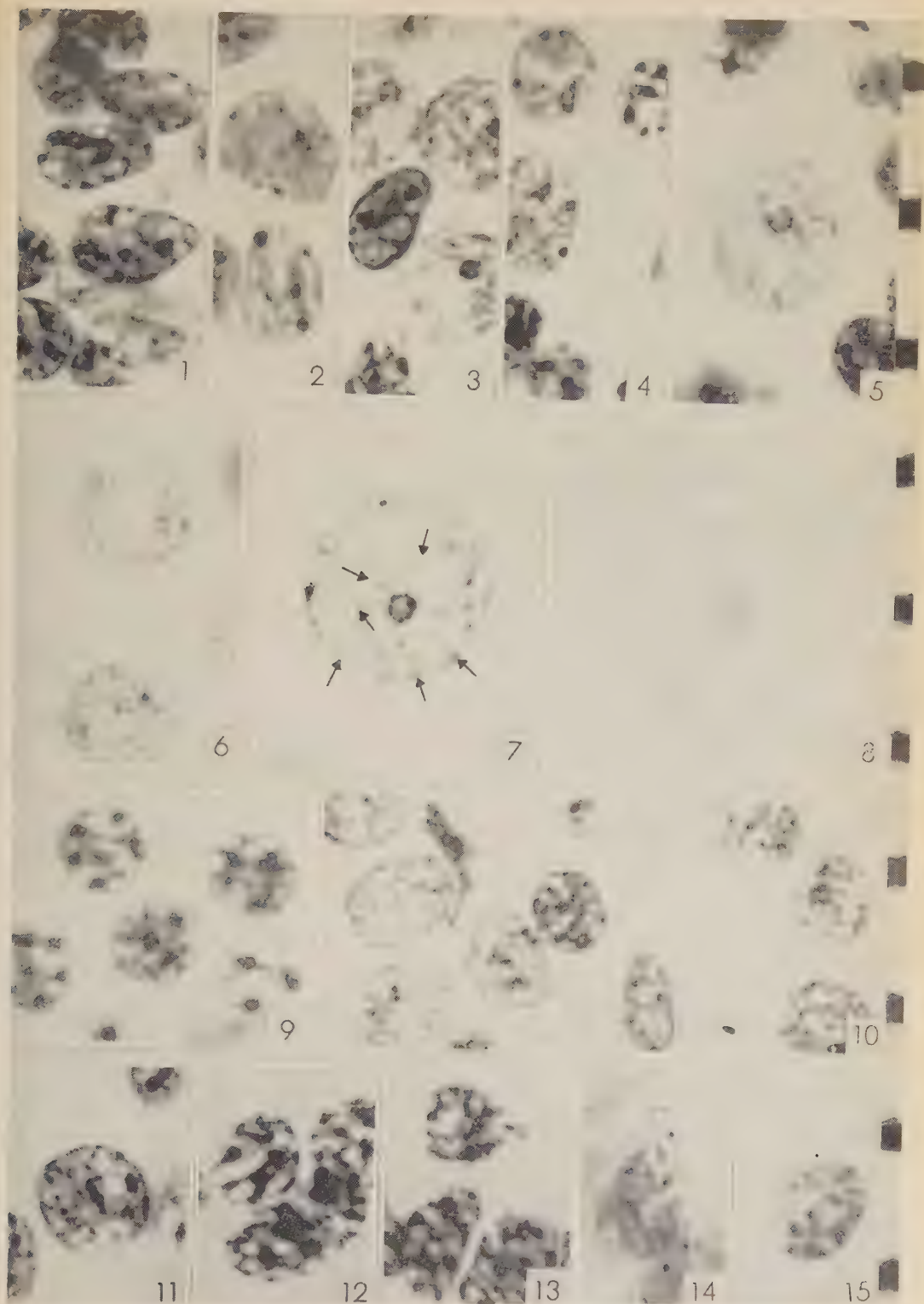
a) alcuni, con nucleo ovoidale (diametro medio  $6,6 \mu$ ), che costituiscono la maggior parte delle cellule endimali; quelle che tappezzano il lungo *philum terminale* negli adulti presentano cromatina addossata alla membrana nucleare di aspetto filamentoso (fig. 13); lungo il midollo spinale ad esse subentrano cellule con cromatina sempre meno decisamente filamentosa (fig. 12) e sempre più reticolare; i nuclei degli elementi che tappezzano i ventricoli encefalici, infatti, assumono un aspetto tipicamente reticolare, con travate sottili, spesso interrotte, e piccoli granuli nodali di diversa grossezza (fig. 11); i nuclei di tutte queste cellule presentano un rivestimento relativamente robusto attorno al nucleolo ribonucleico;

b) altri elementi con granuli di pigmento melanico, lungo i solchi longitudinali, presentano un nucleo allungato e sottile ( $12 \times 4,5 \times 3,5 \mu$ ) la cui cromatina ha un aspetto di reticolo delicato, a maglie strette e con qualche granulo nodale più evidente degli altri (fig. 14);

c) negli elementi che tappezzano internamente le tele corioidee, il nucleo presenta una forma sferoidale (diametro  $6,8 \mu$ ) e cromatina di aspetto granulare, simile a quella osservata in elementi dell'epidermide di Anfibi anuri: i granuli sono minuti, quelli più grossi disposti contro la membrana e quelli più piccoli sparsi nel carioplasma (fig. 15);

d) disseminati lungo il neurasse, abbondanti nel midollo spinale caudale, ma sempre meno frequenti con il procedere dello sviluppo larvale e sporadici nell'adulto, ho osservato elementi i quali conservano dimensioni ed aspetti della cromatina simili a quelli del neuroblasta. Sono in corso esperienze allo scopo di precisare il significato dei diversi elementi endimali, in particolare l'eventuale ruolo di quelli che conservano l'aspetto del neuroblasta, nel corso dei processi riparativi e rigenerativi del neurasse degli Anfibi (ved.: Stefanelli 1943-51<sup>(9)</sup>).

(9) Al. STEFANELLI e Allievi: « Ricerche di Morfologia », voll. 20-21<sup>o</sup>, p. 605 (1944); *Ibidem*, voll. 23-24<sup>o</sup>, p. 183 (1947); « Mem. Acc. Naz. Lincei », s. VIII, vol. 1<sup>o</sup>, p. 27; « Riv. di Biol. », vol. 42<sup>o</sup>, p. 239 (1950); « Boll. di Zool. », vol. 18<sup>o</sup>, p. 279 (1951).





*Concludendo:* le strutture Feulgen-positive del neuroblasta di Anfibi anuri presentano un aspetto (a granuli e filamenti) intermedio tra quello osservato nei Mammiferi (a filamenti<sup>(1)</sup>) ed in un Anfibio urodelo (a granuli<sup>(2)</sup>): probabilmente tali differenze sono da ascriversi alla diversa quantità di DNA nel nucleo dei differenti animali e quindi alla grossezza e distanza dei cromomeri. Come negli altri Vertebrati, l'inizio del differenziamento della cellula nervosa si manifesta nel nucleo con la migrazione della cromatina che si dirige contro la membrana nucleare, tranne una piccola parte di essa la quale si dispone a ridosso del nucleolo ribonucleico. Al termine del differenziamento l'aspetto della cromatina nel nucleo dei diversi neuroni è risultata in rapporto a due distinti fenomeni: la velocità di sviluppo, che può incidere sulla migrazione interrompendola a diversi stadi, e l'accrescimento volumetrico che riduce di volume i granuli nodali del reticolo disposto contro la membrana e rende le travate tanto più delicate e discontinue quanto esso è maggiore. Durante l'accrescimento somatico le strutture Feulgen-positive si assottigliano ed assumono una distribuzione più regolare. Sono stati descritti i diversi aspetti della cromatina nel nucleo degli elementi che tappezzano le cavità ventricolari ed il canale ependimale.

## SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Figg. 1-5. — Aspetti del nucleo durante il differenziamento di neuroni cerebellari (1 neuroblasta allo stadio IV; 2 allo stadio XV; 3 allo stadio XXIII; 4 a sette giorni dalla metamorfosi; 5 nell'adulto).

Fig. 6. — Nuclei di medie dimensioni delle radici sensitive del midollo spinale.

Figg. 7-8. — Nuclei di elementi delle radici motorie del midollo spinale lombare (7 a venti giorni dalla metamorfosi; 8 nell'adulto).

Fig. 9. — Nuclei di *granula* del bulbo olfattorio.

Fig. 10. — Nuclei di elementi retinici.

Figg. 11-15. — Nuclei di cellule ependimali (11 del 3° ventricolo; 12 del canale ependimale; 13 del *philum terminale*; 14 del solco longitudinale; 15 della tela del 4° ventricolo).

(Microfotografie da preparati fissati in Sanfelice e trattati con il metodo di Feulgen; sezioni di 5  $\mu$  di spessore tranne la 7 - 3  $\mu$  - e la 10 - 1  $\mu$  -;  $\times 1140$ . Ogni intervallo delle scale a fianco = 10  $\mu$ ).

**Biologia.** — *Studio delle lipasi e dei lipidi nello sviluppo embrionale e larvale di «Bufo vulgaris» e «Rana esculenta»*<sup>(\*)</sup>. Nota di ENRICO URBANI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

Il problema della ontogenesi dei fermenti costituisce uno dei capitoli più interessanti della embriologia chimica in quanto i risultati ottenuti possono essere considerati e discussi sotto molteplici aspetti. Da alcuni anni i miei Collaboratori ed io stiamo esaminando il comportamento degli enzimi nello sviluppo embrionale degli Anfibi, il materiale classico della embriologia sperimentale, ed i nostri risultati ci hanno permesso di trarre delle conclusioni precise sul significato di questi enzimi nei vari stadi morfologici di sviluppo e sulle relazioni tra fermenti ed utilizzazione delle riserve deutoplasmatiche che si sono accumulate nella vitellogenesi.

L'esame di alcune specie di Anuri ed il confronto con quanto si conosce sulle stesse questioni negli Urodeli (Urbani 1955 *a*, 1955 *b*) ha consentito di impostare inoltre un piano di ricerche tendenti a riconoscere le uguaglianze e le differenze di ordine biochimico nello sviluppo di queste forme in relazione alla loro posizione zoologica ed alle condizioni ecologiche di vita.

Si è potuto così vedere come determinati atteggiamenti enzimatici abbiano un differente comportamento negli Anuri e negli Urodeli ed altre differenze possono essere messe in evidenza nello sviluppo di *Rana esculenta* e di *Bufo vulgaris* (Urbani 1956). Si rimanda per l'analisi di questi dati a quanto già è stato pubblicato sull'argomento; in questa Nota verranno esposti i risultati ottenuti dallo studio delle lipasi in *Rana esculenta* e in *Bufo vulgaris*. Questi enzimi hanno infatti dimostrato di possedere un differente comportamento nelle due specie di Anuri, offrendo così una prova concreta di come in specie zoologicamente vicine si possa avere un diverso atteggiamento dello stesso sistema biochimico e ciò in conseguenza della posizione sistematica delle forme e molto probabilmente (ma questo dovrà ancora essere dimostrato) in dipendenza delle condizioni ecologiche di sviluppo.

Vengono chiamati con il nome generico di *lipasi* quegli enzimi capaci di idrolizzare i grassi neutri: si tratta in ultima analisi di esterasi che rompono i legami tra glicerina ed acidi grassi. Per una discussione sulla specificità delle lipasi si rinvia al trattato di Sumner e Somers (1953). Nel caso dei nostri studi si è proceduto alla determinazione dell'attività enzimatica secondo la tecnica di Glick (1949) opportunamente adattata al materiale embriologico.

Una - due gocce di tributirina (Merck) sono state emulsionate in 3 ml di mezzo alcalino (glicocola-soda pH 8,8-9,0).

(\*) Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia comparata della Università di Camerino.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

Dopo soggiorno della emulsione in frigorifero per 30 minuti sono stati prelevati 1,6 ml del supernatante, abbandonando le piccole goccioline di tributirina che si sono depositate nel fondo della provetta.

Gli embrioni sono stati omogenati in numero di 10 in 1 ml di glicerina al 30 % in acqua distillata, dallo stadio di branchie esterne in poi si sono omogenati 5 individui in 1 o 2 ml. L'omogenato è stato centrifugato a 2000 giri per 3 minuti e 0,4 ml del supernatante uniti a 1,6 ml della emulsione substrato. Dopo vari tempi di incubazione a 38°C sono stati prelevati 90 µl della miscela estratto enzimatico-substrato ed aggiunti, per bloccare l'idrolisi, 53 µl di soluzione indicatrice al fenolo (10 ml di fenolo al 2 % + 1,5 ml bleu di bromotimolo al 0,04 %).

Quindi si è titolato con HCl 0,06 N alcoolico (alcool a 95°) fino al viraggio dell'indicatore dal bleu violetto al verde giallastro.

La quantità di HCl necessaria a raggiungere il colore di viraggio è inversamente proporzionale all'attività enzimatica. I bianchi sono stati eseguiti al *tempo zero*.

Per le ragioni che verranno esposte appresso è stato anche dosato il tenore in lipidi dell'uovo di Anfibi dalla fecondazione fino al primo periodo di vita larvale e precisamente sono stati considerati quei lipidi che vengono estratti con due parti di metanolo e una parte di cloroformio operando nella seguente maniera.

Per ogni stadio di sviluppo 50 e 100 uova od embrioni o giovani larve sono stati omogenati in una siringa di vetro siliconata e l'omogenato raccolto in filtro Schleicher e Schull N. 603,9 × 40 mm. I filtri contenenti gli omogenati sono stati essiccati sotto vuoto su Drierite e quindi i lipidi estratti in piccoli Soxhlet con 2 pp. metanolo 1 p. cloroformio. Dopo tre ore di lavaggio la estrazione è completa, il palloncino del Soxhlet posto in stufa a 100° C è portato a peso costante. I lipidi estratti sono stati valutati per pesata su bilancia analitica a 0,1 mgr.

I primi risultati sulla attività lipasica nello sviluppo embrionale e larvale di *Rana esculenta* sono stati già oggetto di una breve Nota preliminare (Urbani e Scollo-Lavizzari 1955). Dall'esame del grafico riportato in quel lavoro risulta che già durante la segmentazione è rilevabile attività lipasica che praticamente comincia ad aumentare in modo deciso dallo stadio di bottone caudale in poi.

Durante lo sviluppo embrionale si ha un intensificarsi dell'attività di questo enzima fino a circa due giorni dopo il passaggio dalla vita embrionale alla vita larvale.

A proposito di questo stadio del ciclo di sviluppo degli Anfibi è opportuno ricordare che il passaggio alla vita larvale è stato da Cotronei (1922, 1930, 1932) identificato come quel momento nel quale, terminato il riassorbimento del deutoplasma, l'embrione divenuto larva inizia l'alimentazione dal mondo esterno e si modificano le sue correlazioni umorali e le attività metaboliche.

Tutti gli enzimi e gli altri composti chimici che i miei Collaboratori ed io abbiamo studiato mostrano, col termine della vita embrionale, un preciso comportamento della loro attività o tenore. Alcuni diminuiscono come gli enzimi proteolitici e l'RNA (Urbani e De Cesaris Coromaldi 1954, 1955, De Cesaris Coromaldi 1954), altri aumentano come le amilasi (Urbani e Scollo Lavizzari 1955, Scollo Lavizzari 1955), altri ancora rimangono costanti (De Cesaris Coromaldi 1955).

Vi è perciò nell'atteggiamento dei fermenti una precisa conferma della concezione di Cotronei che lo stadio di *fine vitello* ha alla sua base delle profonde modificazioni biochimiche.

Le lipasi continuano ad aumentare per poco tempo dopo la fine del vitello e quindi nelle giovani larve tenute a digiuno mostrano una brusca caduta della loro attività.

Queste osservazioni preliminari su *Rana esculenta* hanno avuto un seguito ed una estensione nel lavoro affidato al mio Collaboratore Russo-Caia (1956) il quale con la stessa metodica ha studiato il comportamento delle lipasi nello sviluppo embrionale e larvale di *Bufo vulgaris*.

I dati ottenuti da Russo-Caia hanno mostrato una singolare differenza dai precedenti su *Rana*. Se infatti si osserva il grafico che l'A. riporta nella sua Nota si vede che l'aumento di attività enzimatica, che si inizia con lo stadio di gastrula-bottone caudale, è seguito da una brusca caduta e quindi da un secondo forte aumento che si protrae fino all'inizio della vita larvale. Il tenore in enzima anche in *Bufo* mostra una brusca caduta nelle giovani larve non alimentate.

Questo comportamento nettamente diverso nelle due specie di Anuri mi ha spinto a riprendere le osservazioni su *Rana* eseguendo su questo materiale un elevato numero di dosaggi.

Avendo poi avuto a disposizione una deposizione contemporanea di uova di *Rana* e di *Bufo* ho potuto eseguire un controllo finale sulle due specie usando gli stessi reattivi chimici in animali allevati in identiche condizioni di sviluppo<sup>(1)</sup>.

I risultati di questi controlli hanno pienamente confermato che le lipasi hanno un diverso atteggiamento in *Bufo vulgaris* e in *Rana esculenta* come è chiaramente dimostrato nelle figg. 1 e 2.

Lo studio delle amilasi, proteasi e lipasi durante lo sviluppo embrionale è utile venga accompagnato dalle analisi dei substrati che vengono idrolizzati da questi enzimi e che sono presenti nell'uovo fecondato.

Così in altri lavori il comportamento delle proteasi è stato confrontato con il tenore in azoto totale dalla fecondazione alla vita larvale e la stessa cosa è stata fatta nei riguardi dei carboidrati totali e del glicogeno in rapporto all'attività amilasica. I risultati ottenuti saranno oggetto di altre pubblicazioni nelle quali verranno discussi criticamente in confronto con altri dati

(1) Ringrazio il mio allievo G. Scollo-Lavizzari per l'aiuto datomi nei dosaggi di attività enzimatica.

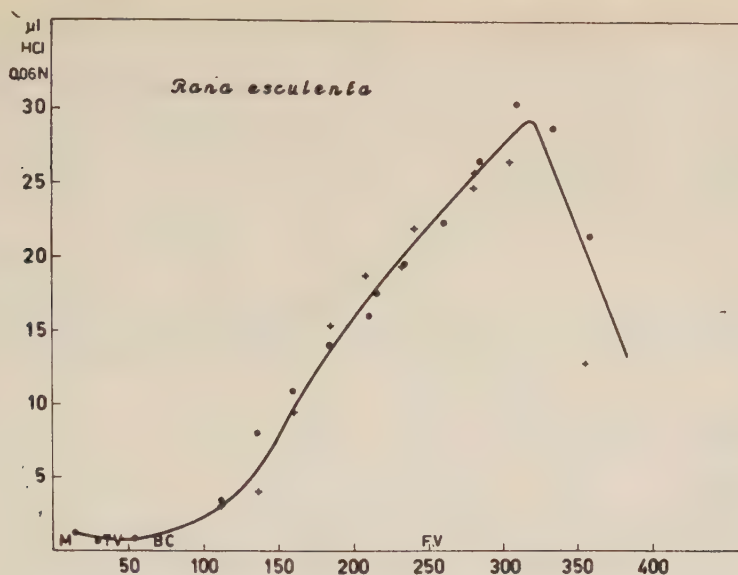


Fig. 1. - Attività lipasica nello sviluppo di *Rana esculenta*.

In ascisse le ore di sviluppo a 16°-18° C; M = morula, TV = tappo vitellino, BC = bottone caudale, FV = fine del riassorbimento del vitello. In ordinate l'attività enzimatica espressa in  $\mu$ l di HCl 0,06 N. Le croci e i cerchi indicano due differenti lotti esaminati, oltre quelli del 1955.

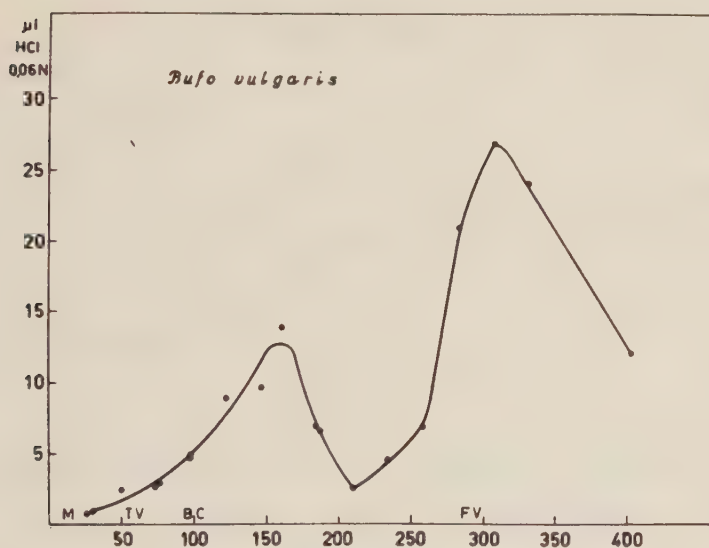


Fig. 2. - Attività lipasica nello sviluppo di *Bufo vulgaris*.

Temperatura di sviluppo ed indicazioni identiche a quelle della fig. 1; la curva conferma pienamente quella ottenuta e pubblicata da Russo Caia (1956).

già esistenti in letteratura (Needham 1931, Gregg e Ballentine, 1946, Gregg 1948, Løvtrup 1953, 1955).

In questa Nota si può però già indicare quale sia il comportamento dei lipidi dell'uovo di *Rana* e di *Bufo* dalla fecondazione all'inizio della vita larvale.

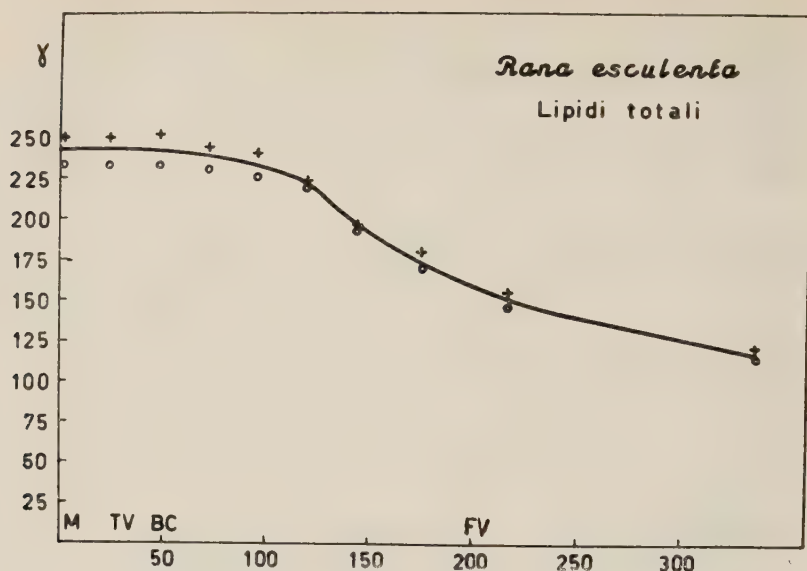


Fig. 3. - Tenore in lipidi nei vari stadi di sviluppo di *Rana esculenta*.

In ascisse le ore di sviluppo, in ordinate i lipidi estraibili in metanolo cloroformio espressi in gamma per uovo od embrione. Indicazione degli stadi di sviluppo come negli altri grafici.

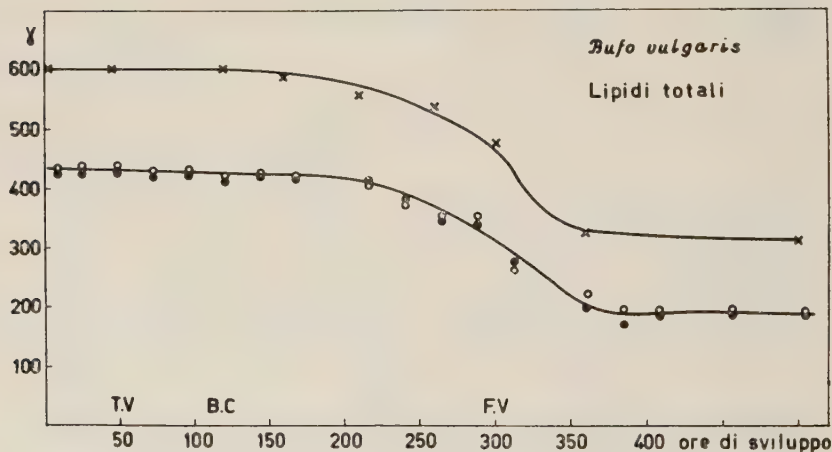


Fig. 4. - Tenore in lipidi nei vari stadi di sviluppo di *Bufo vulgaris*.

Temperatura di sviluppo 16°-18°C. Indicazioni come nel grafico N. 3. Le due curve riportate sono state ottenute da due differenti lotti di uova.

Con la tecnica descritta si è potuto vedere che una diminuzione dei lipidi è sicuramente avvertibile dallo stadio di inizio contrazione. Proseguendo nello sviluppo, i lipidi diminuiscono regolarmente, indice questo di una loro combustione per le necessità energetiche dell'embrione e della giovane larva non alimentata (figg. 3, 4).

Secondo i dati di Lovtrup (1953) ottenuti sugli Urodela con la tecnica della bilancia a diavoleto di Cartesio e con lo studio del consumo di  $O_2$ , in queste forme la utilizzazione dei lipidi inizierebbe allo stadio di neurula-bottone caudale, ossia in un periodo più precoce di quello da me messo in evidenza sugli Anuri. Non è da escludere che la tecnica usata di estrazione in metanolo-cloroformio non sia sufficientemente sensibile per rivelare una precoce ridotta combustione dei lipidi ed è questo un aspetto sperimentale del problema che è ancora in esame.

Il confronto dell'attività lipasica con il tenore in lipidi mostra che il forte consumo dei lipidi è accompagnato da una energica attività enzimatica, ma non ci chiarisce le differenze di comportamento delle lipasi in *Rana* e in *Bufo*.

In conclusione i nostri risultati hanno accertato che la differente posizione zoologica della *Rana* e del *Rospo* è rivelata anche da un singolare comportamento biochimico. È possibile che questo diverso atteggiamento delle lipasi sia una conseguenza di condizioni ecologiche diverse: l'embrione di *Bufo* si sviluppa in acque fredde mentre quello di *Rana* in acque più temperate. Si prospetta interessante una estensione delle presenti ricerche a specie di Anfibi appartenenti allo stesso genere e questo argomento fa parte del nostro attuale piano di studio.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] COTRONEI G., « Arch. Zool. ital. », 10, 85 (1922).
- [2] COTRONEI G., « Mon. Zool. Ital. », 41, 8 (1930).
- [3] COTRONEI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15 (1932).
- [4] DE CESARIS COROMALDI L., « Ric. Sci. », 25, 319 (1954).
- [5] DE CESARIS COROMALDI L., « Ric. Sci. », 25, 2323 (1955).
- [6] GLICK D., *Techniques of Histo & Cytochemistry*, Intersci, Pubb.; Co. N.Y. (1949).
- [7] GREGG J. R., « J. Exp. Zool. », 109, 119 (1948).
- [8] GREGG J. R. e BALLENTINE R., « J. Exp. Zool. », 103, 143 (1946).
- [9] LÖVTRUP S., « C. R. Lab. Carlsberg, Sér. Chim. », 18, 371 (1953).
- [10] LÖVTRUP S., « C. R. Lab. Carlsberg, Sér. Chim. », 28, 400 (1953).
- [11] LÖVTRUP S., « C. R. Lab. Carlsberg, Sér. Chim. », 29, 261 (1955).
- [12] NEEDHAM J., « Chemical Embryology », Cambridge Univ. Press (1931).
- [13] RUSSO CAIA S., « Ric. Sci. », 26, 2529 (1956).
- [14] SCOLLO LAVIZZARI G., « Ric. Sci. », 26, 2146 (1956).
- [15] SUMNER J. B. e SOMERS G. F., *Chemistry and Methods of Enzymes*, Acad. Press, Inc. N. Y. 1953.
- [16] URBANI E., « Experientia », 11, 209 (1955).
- [17] URBANI E., « Ric. Sci. », 25, 2258 (1955 a).
- [18] URBANI E., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 19, 89 (1955 b).
- [19] URBANI E. — Notiz. Med. Argo, Anno IV<sup>o</sup>, n. 5 (1956), Sunto della relazione *Moderne prospettive della Embriologia Chimica* tenuta al XVII Convegno Naz. di Anatomia, Roma, novembre. 1956.
- [20] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., « Ric. Sci. », 24, 2364 (1954).
- [21] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 8, 341 (1955).
- [22] URBANI E. e SCOLLO LAVIZZARI G., « Ric. Sci. », 25, 1151 (1955).
- [23] URBANI E. e SCOLLO LAVIZZARI G., « Ric. Sci. », 25, 2119 (1955).

**Biologia.** — *Citocromo-ossidasi nei mitocondri dell'uovo di Sphaerechinus granularis (Echinodermi)* <sup>(\*)</sup>. Nota di VINCENZO MANCUSO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

La presenza di citocromo-ossidasi nelle uova di riccio di mare è stata ripetutamente constatata (cfr. Runnström, 1930 <sup>(1)</sup>; Krahl et al., 1941 <sup>(2)</sup>; Hutchens, Kopac e Krahl, 1942 <sup>(3)</sup>; Deutsch e Gustafson, 1952 <sup>(4)</sup>). È discusso se essa sia localizzata nei mitocondri o « sciolta » nel citoplasma.

Secondo Hutchens et al. <sup>(3)</sup>, poiché i mitocondri possiedono soltanto l'1 % dell'attività totale della citocromo-ossidasi, mentre il citoplasma residuo ne possiederebbe il 67 %, sarebbe da ritenere che essa è sciolta nel citoplasma, o fissata in granuli di diametro inferiore a 1 micron e comunque di natura non mitocondriale (Krahl, 1950 <sup>(5)</sup>).

Nell'uovo fecondato l'attività della citocromo-ossidasi risulta aumentata: essa si abbassa, invece, nella gastrula mesenchimale (Deutsch e Gustafson) <sup>(4)</sup>. È stata avanzata l'ipotesi che essa si trovi in soluzione nel citoplasma ai primi stadi di sviluppo, e che divenga mitocondriale man mano che lo sviluppo procede (Krahl, 1950 <sup>(5)</sup>; Deutsch e Gustafson, 1952 <sup>(4)</sup>; Gustafson, 1952 <sup>(6)</sup>). Secondo Weber (cfr. Boell e Weber, 1955 <sup>(7)</sup>) invece i mitocondri possiedono citocromo-ossidasi in tutti gli stadi di sviluppo.

Le seguenti ricerche apportano qualche contributo a tale questione.

#### MATERIALE E TECNICA.

Per mettere in evidenza la citocromo-ossidasi mi sono servito della Nadi reazione. Il Nadi reagente era preparato diluendo in 8 ml di acqua di mare 1 ml di alfa naftolo 1 % e 1 ml di cloruro di dimetilparafenilendiamina 1 %.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Zoologia della Università di Palermo. L'Autore ringrazia il prof. G. Reverberi per i consigli datigli. Ringrazia inoltre il prof. G. Montalenti, Direttore del centro di studio per la Biologia del CNR, per l'assegnazione di una borsa di studio ed il Direttore della Stazione Zoologica di Napoli, dott. P. Dohrn, per la generosa ospitalità.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) J. RUNNSTRÖM, « Protoplasma », 10, 106 (1930).

(2) M. E. KRAHL, A. K. KELTCH, C. E. NEUBECK, G. H. A. CLOWES, « J. Gen. Physiol. », 20, 597 (1941).

(3) J. O. HUTCHENS, M. J. KOPAC, M. E. KRAHL, « J. Cell. Comp. Physiol. », 20, 113 (1942).

(4) H. F. DEUTSCH e T. GUSTAFSON, « Arkiv Kemi », 4, 221 (1952).

(5) M. E. KRAHL, « Biol. Bull. », 98, 175 (1950).

(6) T. GUSTAFSON, *Nitrogen metabolism, enzymic activity and mitochondrial distribution in relation to differentiation in sea urchin egg*. Almqvist e Wiksells, Uppsala (1952).

(7) E. J. BOELL e R. WEBER, « Exp. Cell Research », 9, 559 (1955).

(cfr. Mancuso, 1955 <sup>(8)</sup>). La reazione fu applicata sia a uova che erano state centrifugate, sia ai mitocondri isolati, *in vitro*. Usai allo scopo uova fecondate di *Sphaerechinus granularis*. Nel primo caso le uova furono private della membrana di fecondazione, centrifugate per 30' a 12.000  $\times$  g e sottoposte al Nadi reattivo.

Nel secondo caso i mitocondri isolati furono ottenuti da uova omogeneizzate in saccarosio (0,44 M con aggiunta di  $\beta$ -glicerofosfato di sodio 0,1 %). I mitocondri, separati con centrifugazioni differenziali (cfr. Lindberg e Ernster, 1954 <sup>(9)</sup>) dopo ripetuti lavaggi in saccarosio (0,44 M o 0,25 M) vennero risospesi in un volume di saccarosio eguale al supernatante residuo. Tutti i passaggi furono fatti a 0°C. La Nadi reazione fu fatta a temperatura ambiente: ml 1 della sospensione di mitocondri fu aggiunta a ml 2 di acqua distillata (nei controlli, ml 2 di azide sodico 0,1 M). Si aggiunse successivamente ml 1 di Nadi reagente preparato come sopra, ma con acqua distillata al posto di acqua di mare.

## RISULTATI.

### A) *Sulle uova centrifugate.*

Le uova centrifugate di *Sphaerechinus* sono state già descritte da Harvey <sup>(10)</sup>. L'uovo appena tolto dalla centrifuga, ha la forma allungata con una parte mediana più rigonfia. Si stratificano (fig. 1): i grassi (a) che formano una piccola zona opaca posta al polo centripeto dell'uovo; un plasma perfettamente ialino (b) privo di granulazioni e posto immediatamente sotto i grassi; segue un plasma anch'esso ialino (c) in cui però sono immersi dei granuli trasparenti che, secondo Harvey <sup>(10)</sup>, sono mitocondri; la parte più rigonfia (d) è interamente occupata dai granuli del tuorlo, più grandi, opachi, di colore giallo: tali granuli si continuano anche per un breve tratto della parte più assottigliata dell'uovo; segue infine un plasma ialino (e) privo di granulazioni e situato al polo centrifugo.

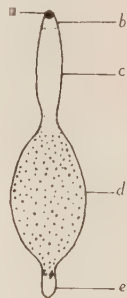


Fig. 1. — Uovo centrifugato di *Sphaerechinus* (spiegazione nel testo).

La Nadi reazione risulta positiva *esclusivamente* nella zona (c) cioè nella zona a mitocondri. Tale reazione è inibita dall'azide sodico 0,01 M e dal cianuro di potassio 0,01 M. Essa inoltre è totalmente negativa dopo trattamento col calore (30' a 60°C) o con fissativi (formalina neutra 5 %; acetone; potassio bicromato 2 %; sublimato 2 %; soluzione di Lugol).

(8) V. MANCUSO, « Ric. Scient. », 25, 2843 (1955).

(9) O. LINDBERG e L. ERNSTER, *Chemistry and physiology of mitochondria and microsomes*, « Protoplasmatologia », III B 4 (1954).

(10) E. B. HARVEY, « Biol. Bull. », 64, 125 (1933).

È da rilevare un fatto importante: le membrane di fecondazione danno Nadi positiva; tale reazione però è insensibile all'azione della formalina e dell'acetone.

B) *Sugli omogenati.*

I mitocondri isolati presentano una intensa Nadi reazione. Essi inoltre si colorano intensamente col verde Janus B.

Poiché il supernatante residuo non dovrebbe contenere mitocondri, la Nadi reazione applicata ad esso, dovrebbe risultare negativa: al contrario risulta debolmente positiva: questo risultato è discusso qui appresso.

CONSIDERAZIONI.

La Nadi reazione, come è ben risaputo, non è specifica per la citocromo-ossidasi. Sostanze Nadi positive sono infatti anche alcuni grassi e altre sostanze resistenti all'azione dei fissativi (cfr. Lison 1953<sup>(11)</sup>). Anche il rame catalizza la Nadi reazione (Pongratz, 1950<sup>(12)</sup>).

Nell'uovo di *Sphaerechinus*, come fu detto, la membrana di fecondazione dà la Nadi reazione; questa colorazione nasconde completamente l'uovo. La reazione della membrana di fecondazione non è però dovuta alla citocromo-ossidasi. Questo enzima è infatti estremamente labile e viene totalmente distrutto dall'azione dei fissativi: ora la Nadi reazione della membrana di fecondazione non risente per nulla l'azione della formalina e dell'acetone. La presenza di una sostanza Nadi positiva posta nella membrana di fecondazione è stata già notata da Schreiber (1929)<sup>(13)</sup>: quest'ultimo la riferisce alla presenza di ossidasi, ma la cosa appare poco verosimile.

La sostanza Nadi positiva localizzata nei mitocondri è totalmente distrutta dalla formalina e da altri fissativi e viene inibita dall'azide sodico e dal KCN. In conseguenza la ritengo identica alla citocromo-ossidasi di Keilin e Hartree (1938)<sup>(14)</sup>. Ciò è avvalorato dal fatto che i mitocondri isolati *in vitro* si colorano con verde Janus B. Che il supernatante residuo si presenti Nadi positivo può spiegarsi o ammettendo una incompleta rimozione di mitocondri da esso, o un passaggio in soluzione dell'enzima.

(11) L. LISON, *Histochimie et cytochimie animales*, Gauthier-Villars, Paris (1953).

(12) E. PONGRATZ, « *Helv. Chim. Acta* », 33, 410 (1950).

(13) G. SCHREIBER, « *Boll. Soc. It. Biol. Sper.* », 4, 1190 (1929).

(14) D. KEILIN e E. F. HARTREE, « *Proc. Roy. Soc. London* », 125 B, 171 (1938).

## COMMEMORAZIONI

## Commemorazione del Corrispondente Michele Cipolla

tenuta (\*) dal Socio GIOVANNI SANSONE

*Signor Presidente, cari Colleghi Accademici,*

nella seduta del 22 febbraio del passato anno accademico io ebbi l'altissimo onore di esser designato dall'Accademia per la commemorazione del compianto Socio Michele Cipolla.

Due ragioni portarono forse a questa mia designazione: l'aver io avuto nel primo periodo della mia attività di studioso molti interessi scientifici a comune con Lui e l'amicizia e la stima che ci legarono per molti anni.

Di Lui parlarono degnamente all'Accademia Gioenia di Catania il 1° febbraio 1948 Vincenzo Amato e all'Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Palermo il 20 marzo 1949 Gaspare Mignosi ed entrambi, facendo vibrare le corde dell'affetto, ne tessero un elogio veramente magistrale, ed io designato per questo doveroso omaggio accademico alla Sua Memoria sarò costretto a ripetere molte delle cose dette da questi chiarissimi Colleghi.

Una figura come quella di Michele Cipolla può farsi rivivere attraverso una visione panoramica delle Sue più significative ricerche e attraverso i ricordi della Sua vita di Maestro e questo mi accingo ora a fare nella speranza di non riuscire troppo impari al mio compito.

Io parlerò quindi delle Sue ricerche strettamente matematiche e successivamente della Sua opera di filosofo e storico della matematica, di trattatista, di Maestro.

## 1. LE RICERCHE ARITMETICHE.

a) *Ricerche di analisi indeterminata.*

G. Loria nell'annunciare, nel 1917, nel T. XXIV de l'« Intermédiaire des Mathématiciens » l'edizione faentina delle Opere complete di Evangelista Torricelli richiamava l'attenzione dei cultori di teoria dei numeri sul seguente problema proposto dallo stesso Torricelli:

« Trovare un triangolo rettangolo con i lati interi che soddisfi la condizione che la lunghezza dell'ipotenusa, la somma delle lunghezze dei due cateti, e la somma delle lunghezze dell'ipotenusa e del cateto maggiore riescano quadrati di numeri interi ».

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

Il problema dipende dalla soluzione delle equazioni indeterminate  ${}_2X^4 - Y^4 = Z^2$ ,  $X^4 - 2Y^4 = Z^2$ ,  $X^4 + 8Y^4 = Z^2$ , già considerate da Eulero (1738), Lagrange (1777), V. A. Lebesgue (1853), ma si debbono al Nostro delle formule risolutive vantaggiose ed elegantissime per la risoluzione autonoma di queste equazioni, una sottile dimostrazione dell'esistenza di infiniti triangoli rettangoli che soddisfano il problema di Torricelli, e insieme un algoritmo teoricamente sufficiente per la loro determinazione. L'ipotenusa minima dei triangoli di questa classe è un numero con 165 cifre e questa circostanza pone in luce la grande difficoltà che sarebbe stato necessario superare nel voler determinare un tale triangolo per tentativi od anche con l'uso delle macchine.

b) *Ricerche sulle congruenze numeriche.*

La prima ricerca del Cipolla in questo campo risale al 1903 e riguarda i numeri composti  $P$  che verificano la congruenza di Fermat  $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$ , la quale, come è ben noto, se  $P$  è primo, è verificata da tutti i numeri  $a$  inferiori a  $P$  e sotto questa forma fornisce anzi un criterio per riconoscere se un numero è o no primo.

Per i moduli  $P$  composti erano state fatte alcune asserzioni erronee dovute come dice E. Lucas nella sua *Théorie des Nombres* (p. 423) e come ricorda il Nostro, alla non osservanza del precetto « ... qu'il ne faut pas toujours se hâter de conclure par induction dans l'étude des propriétés des nombres ». Il Cipolla risolve completamente il problema: dato  $a$  determinare i numeri composti  $P$  per i quali vale la congruenza di Fermat, e così pure quello inverso e ne deduce delle interessanti conseguenze.

Un gruppo compatto di ricerche del Nostro che vanno dal 1903 al 1906 riguarda la risoluzione delle congruenze numeriche.

Una formula risolutiva relativa alle congruenze di secondo grado trovavasi nel Trattato di Legendre *Essai sur la Théorie des Nombres* e il Cipolla riprendendo la questione consegue una formula esplicita risolutiva per le congruenze di grado  $2^m$ . Passando alle congruenze binomie di grado qualunque rispetto ad un modulo primo, nel 1906, Egli dimostra l'esistenza di formule risolutive, formule estese poi nel 1917 ad un corpo quadratico da Vincenzo Amato. Nel 1926 una felice ed acuta Nota di Gaetano Scorza riapri la questione; egli mostrò che l'esistenza delle formule apiristiche per le congruenze binomie in un corpo finito qualunque si conseguiva con la formula di interpolazione di Lagrange.

Successivamente chi ha il privilegio di parlarvi determinò le formule esplicite risolutive delle congruenze biquadratiche e di quelle cubiche, e in alcuni casi di quelle di ordine superiore e Gaspare Mignosi con un'opportuna interpretazione del metodo classico arrivò alla formula apiristica risolutiva delle congruenze cubiche secondo un modulo primo in un corpo finito.

Il Cipolla nel 1930 concludeva sotto un certo aspetto il problema dimostrando l'esistenza di formule risolutive assai semplici delle congruenze

di qualsiasi grado in un corpo finito; aperta resta però la questione di ottenerne almeno una, in forma esplicita, in funzione dei coefficienti dell'equazione stessa.

Sotto la guida del Cipolla, il Suo allievo Giuseppe Mignosi passava nel 1946 alla risoluzione dei sistemi di congruenze e lo stesso Cipolla si accingeva, come ci avverte Gaspare Mignosi, a redigere una monografia con una trattazione organica della materia, poco prima della Sua prematura fine nel 1947.

c) *Ricerche di calcolo aritmetico integrale.*

Per le funzioni numeriche  $f(n)$ , definite cioè per ogni intero positivo  $n$  era stato istituito, soprattutto per opera del russo Bougajeff e di E. Cesàro (1883) un calcolo speciale «calcolo numerico integrale». Il Nostro nel 1908 redasse uno *Specimen de Calculo Arithmetico-Integrale* e l'offrì alla Memoria di E. Cesàro «che alla teoria dei numeri dedicò tanta parte della sua Opera geniale e feconda», e che spesso accese il Suo animo «con la parola e l'esempio».

Per queste funzioni si definiscono i concetti di prodotto integrale, di integrale e di derivata numerica e si crea così uno strumento che al Cipolla, in alcune Sue ricerche aritmetiche del 1915, 1928 e 1930 permise di ritrovare sistematicamente ed in modo brillante tanti e tanti risultati dovuti a celebri studiosi ed altri risultati ancora tra i quali ricordo quello ritenuto dallo stesso Cipolla il più importante: la costruzione di espressioni generali per la somma dei valori che prende una funzione numerica per tutti i numeri primi che non superano  $n$ , noti soltanto i numeri primi che non superano  $\sqrt{n}$ .

Il Cipolla attribuiva al Calcolo aritmetico integrale un grande valore ed i seguenti versi tratti dal *Contrasto* di Giovanni Pascoli, che Egli premise al Suo *Specimen* ne fanno testimonianza:

...Prendo un sasso, tra mille, a quando a quando  
lo netto, arroto, taglio, lustro, affino:  
chi mi sia, non importa: ecco un rubino;  
vedi un topazio; prendi un'ametista.

d) *Aritmetica asintotica.*

Ho lasciato per ultima, in questo gruppo di ricerche aritmetiche del Nostro la Sua tesi di laurea del 1902. Il tema, «La determinazione asintotica dell' $n$ -esimo numero primo» Gli era stato posto dal Suo maestro Gabriele Torelli, che nel 1900 aveva scritto una poderosa monografia «Sulla totalità dei numeri primi fino ad un certo numero assegnato».

Il Torelli aveva affidato al suo giovane scolaro un tema assai arduo, quello dell'approfondimento della formula per l' $n$ -esimo numero primo  $n \log n + n \log \log n - n + 5n/\log n + n/24 (\log n)^2$  trovata, probabilmente in modo empirico, dal pope russo Pervouchine e corretta e stabilita come formula asintotica dal Cesàro: il Cipolla arriva al traguardo scoprendo la legge per calcolare i termini degli ordini  $n/(\log n)^3$ ,  $n/(\log n)^4$ , ... Passa successiva-

mente all'espressione asintotica della differenza di due numeri primi consecutivi, o come dice Abel, al « teorema fondamentale della distribuzione dei numeri primi » ed infine alla determinazione asintotica dell' $n$ -esimo numero primo contenuto in una progressione aritmetica.

Se si inquadra la ricerca nel tempo, chè il grande trattato di E. Landau *Handbuch der Lehre von der Vertheilung der Primzahlen* è del 1909 e la creazione di nuovi potenti mezzi di indagine si è sviluppata lentamente in questo ultimo mezzo secolo e, come diremo tra poco, soprattutto dopo il 1937, ad opera di I. M. Vinogradoff, noi possiamo rendere onore al Nostro che affrontava con la passione dei neofiti il problema propostogli dal Maestro e che alla Nota a stampa che riproduce le Sue ricerche permetteva con consapevole compiacimento i versi dell'Infinito di Leopardi:

...Così tra questa  
immensità s'annega il pensier mio;  
e il naufragar m'è dolce in questo mare.

Indubbiamente la teoria dei numeri esercitò un fascino immenso sullo spirito di Cipolla: la Sua conferenza tenuta nel febbraio 1922 a Catania per l'inaugurazione di quel Seminario Matematico «Sulle bellezze palesi e bellezze ascose dell'aritmetica» e quella del 1938 alla Biblioteca filosofica di Palermo «Mistica dei numeri. Aritmetica magica e satanica» sono tutte pervase dal culto della bellezza della scienza dei numeri.

Egli, nel chiudere la Sua prima conferenza e nell'accennare alla dimostrazione di Dirichlet dell'esistenza di infiniti numeri primi in una progressione aritmetica, per la quale si richiede l'uso raffinato dell'analisi infinitesimale, passando successivamente alla congettura di Goldbach (1741) «ogni numero pari è la somma di due numeri primi» o a quella meno forte «ogni numero intero è la somma di non più di tre numeri primi» aggiungeva che «la proposizione di Goldbach... è di natura diversa da quelle finora superate, che dubito possa esser vinta allo stato attuale dell'Analisi». A gloria della matematica, nel 1937, I. M. Vinogradoff con la valutazione delle somme  $\sum_{p < n} e^{2\pi i \alpha p}$ , ( $\alpha$  costante,  $p$  primo) passava ai nuovi strumenti auspicati dal Cipolla e dai cultori della teoria dei numeri, dimostrando che «ogni intero dispari, abbastanza grande, si può rappresentare come somma di tre numeri primi».

L'Aritmetica escogita continuamente nuovi mezzi e apre nuove vie per scoprire risultati appena intravisti, cosicchè il Nostro ha ben ragione di dire «L'avvenire dell'Aritmetica è l'avvenire stesso della Matematica».

## 2. LE RICERCHE ALGEBRICHE.

Una Nota (1917) riguarda lo sviluppo di un determinante secondo i minori di due matrici complementari. Questo sviluppo, dato in un caso particolare dal Nicoletti, presenta nel caso generale alcune difficoltà, superate dal

Nostro con l'introduzione della nozione di classe di una matrice e con la definizione di un nuovo simbolo « che nella rappresentazione della classe ha giuoco agile ed interessante ». Una precedente Nota (1912) riguarda il teorema di Hadamard sul massimo modulo di un determinante; l'A. dà la prima dimostrazione « diretta e semplicissima » di questo teorema, rimanendo nel campo combinatorio.

Particolare interesse ha una ricerca sulle sostituzioni ortogonali non cayleyane. Eulero (1767) aveva risolto il problema per le matrici del 2° e 3° ordine ortogonali e fermandosi a quelle del 4° ordine dichiarava: « nulla certa methodo potius quasi divinando ». A. Cayley nel 1846 costruiva le matrici ortogonali destrorse di ordine  $n$  qualunque, le quali dipendono razionalmente da  $(1/2)n(n-1)$  parametri indipendenti; Lipschitz nel 1890 risolveva in maniera definitiva il problema della determinazione di tutte le sostituzioni ortogonali simmetriche e Prym nel 1892 dimostrava il teorema, intravisto dal Kronecker, nel 1890, che ogni sostituzione ortogonale non cayleyana si si può sempre ottenere da una sostituzione cayleyana cambiando il segno nella matrice di quest'ultima ad alcune righe (o colonne).

Il Nostro nel 1923 completava e perfezionava notevolmente il teorema, del Prym ponendo il Suo risultato a base di una nuova classificazione in « ispecie » delle sostituzioni ortogonali non cayleyane. Ed Egli diceva nella conclusione dell'Introduzione alla Sua Memoria: « Raggiungo così, e in un modo che mi sembra notevole anche per la sua eleganza, lo scopo prefissomi, cioè quello di ottenere qualunque sostituzione ortogonale in un sol modo », e ancora: « il metodo di cui mi giovo... mi consente una tale concisione e semplicità nella trattazione che val proprio la pena di presentare... ».

Ricordo altre due ricerche algebriche del Cipolla: una Nota del 1914, con la determinazione delle condizioni necessarie e sufficienti perché un'equazione algebrica a coefficienti reali o complessi abbia le sue radici tutte radici dell'unità, e una Nota del 1931 sulla tecnica del calcolo delle funzioni simmetriche elementari delle radici primitive  $m$ -esime dell'unità, dove viene stabilito un procedimento assai vantaggioso, fondato su di una relazione ricorrente, con un numero piccolo di termini.

Uno sguardo a tutta questa produzione relativa all'Algebra superiore classica permette di concludere che il Cipolla era per istinto portato a scegliere per ogni questione un simbolismo espressivo perfettamente idoneo al suo scopo, a segnare ogni Sua conclusione parziale con una formula che artisticamente tutta la racchiudesse e ad arrivare a teoremi che avessero contenuto sostanziale e facilmente intelligibili all'universale.

Deve essere ancora menzionata una Nota sulla definizione di funzione  $f(A)$  di una matrice  $A$  quando  $A$  è una matrice quadrata di ordine finito ed  $f(z)$  una funzione analitica. Si tratta di una definizione già posta in forme diverse, in relazione alle rispettive esigenze, da L. Fantappiè e G. Giorgi, ed a cui Egli arrivava « in modo semplice ed elementare, senza uscire dal campo proprio della teoria delle matrici », ponendola al riparo da ogni eventuale critica.

### 3. LE RICERCHE SULLA SOMMAZIONE DELLE SERIE E SUI SISTEMI DI FUNZIONI ORTOGONALI.

È noto come i procedimenti di sommazione aritmetica delle serie, scoperti ed introdotti sistematicamente nell'Analisi da E. Cesàro (1890) abbiano dato un contributo potente alla teoria della rappresentazione analitica delle funzioni di variabile reale, ed è pure nota l'importanza dei criteri di inversione che dalle cosiddette somme generalizzate fanno passare alle somme ordinarie. Tale è il teorema di Hardy-Landau (1910) di cui il Nostro nel 1920 stabilisce una semplice dimostrazione riportata poi nel Suo trattato di *Analisi algebrica e introduzione al calcolo infinitesimale*, insieme ad altri criteri riducibili a quello di Hardy-Landau e con alcuni finissimi completamenti del teorema di Riemann-Dini.

Un'altra ricerca del 1915 riguarda la cosiddetta chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali. Egli risolve in maniera indipendente dalle note condizioni di chiusura di G. Lauricella (1910) e di C. Severini (1910) il problema di trovare le condizioni necessarie e sufficienti perché un sistema di funzioni ortogonali possa diventare completo con l'aggiunta di un numero finito di funzioni, ottenendo così come immediata conseguenza tutte le condizioni di chiusura fino ad allora note. Qui conviene ricordare che una Nota posteriore (1921) di G. Vitali portava ad un criterio di chiusura che può impiegarsi sistematicamente e con successo in tale ordine di questioni.

### 4. LE RICERCHE SUI GRUPPI FINITI.

La teoria dei gruppi finiti, che Egli aveva appresa a Pisa alla scuola del Bianchi, nel torno di tempo che va dal 1908 al 1921, Lo interessò potentemente e sulle Sue ricerche originali e sul Suo aureo volume *Teoria dei gruppi di ordine finito e sue applicazioni* conviene ora fermarsi.

Già nell'ottobre dell'anno scorso al V Congresso dell'Unione Matematica Italiana di Pavia-Torino, Vincenzo Amato in una Sua magistrale conferenza «Struttura dei gruppi finiti secondo Cipolla» mise in luce le idee che condussero il Nostro ad una prima classificazione strutturale dei gruppi e il nostro giovane ed agguerrito algebrista Guido Zappa nella successiva conferenza «La teoria del Cipolla, l'ampliamento dei gruppi e la coomologia», nello stesso Congresso, mostrò «... come un'opportuna generalizzazione del problema dell'ampliamento, consistente nella costruzione di un gruppo a partire dai successivi gruppi fattoriali di una serie centrale» conduca alla «... utilizzazione dei concetti propri della teoria dei sottogruppi fondamentali di Cipolla».

Il primo lavoro del Nostro sui gruppi riguarda la teoria dei gruppi abeliani d'ordine finito per i quali Egli costruisce la cosiddetta base principale; questa ricerca, dice l'Amato, ha «carattere costruttivo, sì da aver promosso generalizzazioni e ampliamenti anche in trattazioni recenti».

Tre Note successive pubblicate dal 1909 al 1912 hanno per punto di partenza la dichiarata esigenza di rappresentare un gruppo « mediante ben determinati sottogruppi abeliani » da Lui chiamati « sottogruppi fondamentali »; Egli introduce i concetti di tipo, genere e rango di un gruppo, trova una limitazione che lega il rango ed il tipo di un gruppo e dimostra che i gruppi di tipo assegnato possono distribuirsi in un numero finito di classi.

Tre Note successive del 1914 sono appunto dedicate alla costruzione di tutti i gruppi di tipo 1, 2, 3. Egli « non solo mette in maggiore evidenza l'importanza dei risultati » ottenuti nelle Note precedenti, « ma traccia anche una via per la risoluzione dell'arduo problema dei gruppi di un dato tipo ».

La rappresentazione dei gruppi di tipo 1, 2, 3 per mezzo dei sottogruppi fondamentali « è quanto di meglio si possa fare per mettere in vista tutte le proprietà principali del gruppo ».

E prima di parlare del Suo volume sui gruppi desidero accennare ad un'altra Sua ricerca del 1924 « I sottogruppi fondamentali di un gruppo di Hölder », preceduta da una Nota riassuntiva con lo stesso titolo e che segna l'ultimo Suo contributo originale alla teoria dei gruppi. Lo studio dei gruppi non abeliani; il cui ordine sia il prodotto di numeri primi tutti differenti era stato fatto da O. Hölder nel 1895; A. Maroni iniziò nel 1915 lo studio dei sottogruppi fondamentali di questi gruppi da Lui chiamati « gruppi di Hölder »; lo studio fu poi continuato nel 1924 dalla signorina F. Massara, scolara del Cipolla, ma il problema viene ripreso e condotto a termine dal Nostro con « una discussione alquanto minuta e delicata » e i risultati, dice Lui, « son belli, semplici, generali e perciò crediamo meritino di esser conosciuti ».

Era naturale che Egli dedicatesse qualcuno dei Suoi corsi alla teoria dei gruppi e per i Suoi studenti scrisse dal 1920 al 1922 il ricordato volume *Teoria dei gruppi di ordine finito e sue applicazioni*, suddiviso in tre parti dedicate ai gruppi astratti, ai gruppi di sostituzioni, alla teoria delle equazioni algebriche secondo Galois. In Italia questo volume era stato preceduto da quello del Bianchi *Teoria dei gruppi di sostituzione e delle equazioni algebriche secondo Galois*, comparso in litografia nel 1896-97 e a stampa nel 1900. Era un volume estremamente conciso, di quelli che fanno pensare e che incidono fortemente sulla formazione dei lettori. Il Bianchi, sollecitato più volte verso il 1920 a ristamparlo rispondeva « vi è quello del Cipolla e aspettiamo il volume della Scorza ».

Il volume del Cipolla, scritto in forma impeccabile e aggiornato alla luce delle Sue ricerche, ebbe una notevole diffusione in Italia e determinò molte altre ricerche sui gruppi ad opera dei Suoi scolari: V. Amato, Gaspare Mignosi, S. Amante e di altri studiosi; nella teoria dei gruppi, così astratta e pur così importante per tanti rami della matematica pura ed applicata, il Nostro deve annoverarsi tra coloro che muovendo ai primi attacchi con coraggio di pionieri aprono la strada alle conquiste definitive.

# 5. LE RICERCHE SUI FONDAMENTI DELLA MATEMATICA E IL TRATTATO « ANALISI ALGEBRICA E INTRODUZIONE AL CALCOLO INFINITESIMALE ».

Nei primi studi della teoria degli insiemi non si ha difficoltà ad ammettere la cosiddetta « relazione selettiva » ossia la proposizione: Per ogni classe  $\Sigma$  di insiemi  $S$  esiste una relazione che fa corrispondere ciascun  $S$  ad un solo elemento di  $S$ . E. Zermelo nel 1908 aveva ritenuto di poter dimostrare la seguente proposizione che a prima vista sembra un caso particolare della prima: Dato un insieme qualunque ad ogni insieme contenuto in esso si può far corrispondere uno dei suoi elementi, ma C. S. Whitehead e B. Russel mostrarono l'equivalenza di quest'ultima proposizione, detta ora « postulato di Zermelo » con la « relazione selettiva ».

Sull'uso illecito della relazione selettiva, già usata da alcuni costruttori dell'analisi come B. Bolzano, A. Cauchy, C. T. W. Weierstrass scrisse prima G. Peano (1890) e successivamente F. E. B. Jourdain (1907), Beppo Levi (1908) ed A. N. Whitehead-B. Russel nei loro *Principia mathematica* (1910-1912).

È noto che la teoria dei limiti delle funzioni, ove si ammetta il postulato di Zermelo, acquista semplicità ed eleganza collegandola con la teoria dei limiti delle successioni numeriche, perché vale allora la proposizione: Se un insieme ammette un valore limite si può dall'insieme staccare una successione che tende a quel valore limite.

Il Cipolla nel 1912 arrivava brillantemente a questa semplificazione senza far uso del postulato di Zermelo estendendo la nozione di valor limite ad una classe di insiemi e così pure estendendo le proposizioni fondamentali sulle successioni numeriche alle successioni di insiemi. La grande importanza dell'apporto del Nostro alla teoria dei limiti era subito colta da Leonida Tonelli che nei Suoi famosi *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* per liberarsi dell'uso del postulato di Zermelo nella teoria della misura secondo Lebesgue si poneva appunto nella corrente del Cipolla.

D. Hilbert nei suoi studi sui fondamenti logici della matematica « nell'intento - com'egli dice - di bandire definitivamente dal mondo ogni dubbio sulla certezza delle conclusioni matematiche » pubblicava nel 1923 una sua Memoria nella quale, introduceva una funzione che soddisfa al cosiddetto « assioma del transfinito ».

Poco dopo, nell'aprile del 1923, il Cipolla teneva una conferenza a Catania alla XII<sup>a</sup> riunione della Società italiana per il Progresso delle Scienze « Sui fondamenti della matematica secondo le recenti vedute di Hilbert » e dimostrava che « ammettere l'esistenza della funzione transfinita di Hilbert equivale perfettamente ad ammettere il principio di Zermelo nella sua forma più generale ».

Ritornando nel 1934 sul « Problema del transfinito e la soluzione di Hilbert » in una Sua conferenza ad un corso post-universitario di filosofia matematica presso la Biblioteca filosofica di Palermo, a proposito del simbolismo di Hilbert che riduce le proposizioni a figure costituite da segni privi di significato, per le quali è lecito un gioco formale regolato da certe convenzioni (me-

talogica e metamatematica) dice «Tale simbolismo è certamente suggestivo per l'intento che si vuole raggiungere, ma sembrami che ai simboli si chieda troppo; né i simboli, né l'intuizione, da soli, possono darci la Matematica, che è creazione del pensiero» e sull'esistenza della funzione di Hilbert soggiunge «Tale affermazione è come quella dell'esistenza di un tesoro; a che mi giova essa se non so dove il tesoro sia nascosto, se non ho i mezzi per rintracciarlo? Ecco l'ostacolo che ancora mi impedisce di schierarmi tra i logici hilbertiani».

E mi piace qui riportare le parole con le quali Egli chiuse la Sua conferenza: «Ma come l'infinito e l'infinitesimo matematico, dopo secolari vicende, riuscirono a trionfare nella Scienza così è da credere che in un avvenire più o meno lontano, anche il transfinito avrà il suo assetto definitivo nella Logica. Ed allora? Allora la mente sarà assillata da altri formidabili problemi! Perché è così che il pensiero vive e s'eterna!».

Da queste ricerche risulta manifesto il temperamento filosofico del Cipolla che naturalmente doveva avere un riflesso nei Suoi corsi, nei Suoi trattati e nella redazione di una collezione di testi da Lui preparati in collaborazione con Vincenzo Amato e Gaspere Mignosi per l'insegnamento della matematica nelle scuole medie.

Qui mi soffermo sul Suo famoso trattato *Analisi algebrica e introduzione al calcolo infinitesimale* la cui prima edizione apparve nel 1914, la seconda nel 1927 e la terza, postuma, nel 1948, trattato che, dice il Mignosi, «...con la ricchezza degli apporti originali, nella purezza analitica delle deduzioni e nella organicità di insieme rivela la Sua fede logica e la Sua grande Arte matematica!».

Il Cipolla arrivava al Suo trattato dopo aver meditato su due opere basilari, il *Formulario* di G. Peano e i *Principia Mathematicae* di A. N. Whitehead e B. Russell. Due opere fondamentali dominavano l'insegnamento dell'Analisi algebrica nel periodo in cui il Cipolla si accingeva alla Sua fatica: le *Istituzioni di Analisi algebrica* di Alfredo Capelli e il *Corso di Analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale* di Ernesto Cesaro; piano e completo il primo, pungolante e ricco di visioni il secondo. Il Nostro, che dopo un biennio trascorso a Pisa alla scuola del Bianchi, del Dini e del Bertini era ritornato per ragioni di famiglia alla natia Palermo aveva trovato a Palermo gli echi del magistero che ivi avevano esercitato i due maestri Capelli e Cesaro prima del loro trasferimento a Napoli.

Forte di tanti studi e delle Sue esperienze didattiche alla Scuola matematica di Catania dove Egli entrò a far parte nel 1911, compreso che «Chi scrive un trattato di Analisi algebrica è costretto a manifestare il suo credo» premise al trattato una magnifica introduzione intesa a dare «un'idea precisa sui fondamenti logici della matematica» e un capitolo sui fondamenti dell'aritmetica dove spicca la nozione di «isomorfismo aritmetico» da Lui posta in luce fin dal 1909 in un Suo scritto sui numeri reali.

Innumerevoli sono i perfezionamenti contenuti nel trattato alla teoria dei determinanti, delle sostituzioni, delle serie; la teoria dei limiti fondata, come s'è detto, sul Suo metodo delle successioni di insiemi lo libera dal po-

stulato di Zermelo; ampio è lo sviluppo che Egli dà alle classiche teorie algebriche, sì che Egli può concludere con consapevole soddisfazione la Prefazione alla seconda edizione dicendo la Sua opera « nitida e bella ».

## 6. LO STORICO DELLA MATEMATICA E L'UOMO ERUDITO.

Fu scelto da G. Gentile come collaboratore all'*Enciclopedia Italiana* per le voci « Aritmetica superiore », « Nulla e zero » e per le biografie di Evaristo Galois, Carlo Federigo Gauss, Leopoldo Kronecker, Ernesto Eduardo Kummer; ricchezza di notizie ed eleganza di esposizione caratterizzano questa Sua collaborazione.

« Nulla e zero » Gli offre lo spunto di un'arguta conferenza tenuta alla Biblioteca filosofica di Palermo nell'ottobre 1936 per mettere in luce l'ufficio dello zero nello sviluppo delle Scienze matematiche, che Lo fa arrivare a questa conclusione: « Un matematico, dunque, si esprimerebbe erroneamente e tradirebbe la Sua Scienza se giudicando di persona o cosa che nulla vale dicesse che "vale uno zero". Voi mi fareste se mai un grazioso complimento giudicando così questo mio panegirico su "Nulla e zero". Se volete essere veramente precisi dite invece di queste mie chiacchiere come disse Catullo il leggiadro Poeta di Lesbia a riguardo del brontolio dei vecchi severi "Omnes unius aestimemus assis!" ».

Sulla storia delle matematiche Egli tenne nel 1933 un corso post-universitario alla Biblioteca filosofica di Palermo. Egli intendeva « dare uno sguardo allo sviluppo che la scienza matematica ha assunto attraverso i secoli, mettendo in particolare rilievo i nomi di coloro che crearono le teorie più importanti o meglio contribuirono al loro sviluppo, e specialmente di quelle che sono insegnate » e trattare, dice Lui, « ... la storia della matematica nelle sue grandi linee, soffermandomi a rilevare, per ciascun periodo storico, gli elementi che lo caratterizzano, al fine di venire, quanto più presto, ai tempi moderni per discuterne gli indirizzi e metodi di ricerca. Prenderò allora l'occasione di parlare della critica moderna in merito ai fondamenti della matematica ».

La Sua squisita cultura umanistica si nota ad ogni passo.

A proposito della quadratura del cerchio ricorda i versi di Dante (3.13, 123-126):

... chi pesca per lo vero e non ha l'arte.  
E di ciò sono al mondo aperte prove,  
Parmenide, Melisso, Brisso e molti,  
Lì quali andavano, e non sapean dove.

sull'angolo inscritto in mezzo cerchio e sugli angoli di un triangolo i versi (Dante 3.13, 101-102):

... o se del mezzo cerchio far si puote  
triangol sì ch'un retto non avesse.

e (Dante 3.17, 15):

...non capére in triangolo due ottusi,

e ancora sulla quadratura del cerchio la famosa terzina (Paradiso 33,133-135):

... Qual'è il geomètra che tutto s'affige  
per misurar lo cerchio, e non ritrova  
pensando, quel principio ond'elli indige;  
...

Di Platone Egli ricorda alcuni detti « Dio sempre geometrizza », « Il numero governa il mondo », « Nessuno ignaro di geometria entri sotto il mio tetto », « La geometria dirige l'anima verso l'essere eterno »; della vita di Archimede riporta l'elogio scritto da Plutarco a proposito dell'assedio di Siracusa del console Marco Claudio Marcello; di Cicerone il solenne riconoscimento che egli fece della matematica greca, e di Gerolamo Cardano richiama il mirabile singolare autoritratto: « Io ho ricevuto dalla natura uno spirito filosofico e inclinato alle scienze; sono ingegnoso, accessibile, elegante, voluttuoso, allegro, pio, amico della verità, appassionato per la meditazione, intraprendente, desideroso di imparare, dotato di talento inventivo, pieno io stesso di dottrina, sono avido di cognizioni mediche, entusiasta per il meraviglioso, astuto, furbo, ingannatore, satirico, esercitato nelle arti occulte, sobrio, laborioso, applicato, non curante, ciarliero, detrattore della religione, vendicativo, invidioso, tristo, finto, perfido, mago, in preda a mille contrarietà, a carico dei miei, lascivo, amico della solitudine, dotato della facoltà di indovinare, geloso, rozzo, calunniatore, officioso ed incostante a cagione del contrasto che vi è tra la mia natura ed i miei costumi ».

Per Isacco Newton Egli ricorda un verso premesso dall'astronomo Halley ai *Philosophiae naturalis principia mathematica*:

Nec fas est propius mortali attingere divos.

e chiude il Suo corso con un passo di C. G. J. Jacobi: « È vero che il signor Fourier è d'avviso che lo scopo principale delle matematiche è l'utilità pubblica e la spiegazione dei fenomeni naturali; ma un filosofo come lui dovrebbe sapere che il solo fine della Scienza è l'onore dello spirito umano e che a tale riguardo una questione concernente i numeri ha tanto pregio quanto una questione relativa al sistema dei mondi ».

L'edizione di questo volume fu con grande amore curata da Gaspare Mignosi che vi premise una bella prefazione: il Cipolla raggiungeva appieno lo scopo di scrivere un corso che fondandosi essenzialmente sulle nozioni matematiche acquisite dai giovani nei corsi liceali e in quelli universitari le ripresentasse unificate alla luce di una trattazione a carattere storico-umanistico.

## 7. L'OPERA DI MICHELE CIPOLLA PER L'INSEGNAMENTO E COME INSEGNANTE.

Il problema dell'insegnamento medio che lo aveva certamente interessato nel settennato del Ginnasio di Corleone, Lo portò a considerare la formazione degli insegnanti medi di matematica ed a scrivere per essi *La matematica elementare nei suoi fondamenti, nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori*, volume che nel periodo 1927-1949 ha avuto la giusta fortuna di tre edizioni.

La dedica « A Gabriele Torelli questo libro che s'illumina di quella fiamma d'amore per la scuola che Egli accese ed animò devotamente dedico » dice con quale fede Egli lo redasse.

Questo volume Lo fa maestro di un'intera generazione di insegnanti medi provenienti da tutte le scuole italiane. In forma sintetica e perspicua questi sono informati sui problemi connessi all'insegnamento medio. Matematici italiani e stranieri di alta fama, investigando questi problemi, hanno tracciato i binari da percorrere perché l'insegnamento matematico conservi il suo tradizionale carattere formativo, ed il Cipolla, da consumato Maestro, indica appunto i binari più sicuri.

Sulla Sua passione per l'insegnamento orale così mi scriveva il figlio, Cino Cipolla: « Egli aveva l'idea che i giovani devono entusiasarsi con la lezione perché appunto con l'entusiasmo potessero bene apprendere. Per ciò stesso in un primo momento quando l'esigenza lo imponeva sacrificava il rigore scientifico ed offriva agli studenti una lezione interessante, suggestiva e panoramica, mentre poi in un secondo tempo approfondiva il problema... ».

Certamente Michele Cipolla non è lo scienziato che si isola nel Suo studio tra i Suoi più vicini e sperimentati scolari; Egli crede nella virtù dell'insegnamento orale, dona con passione agli scolari, li trascina e suscita in loro la fiducia che potranno arrivare con onore alla mèta.

## 8. RICORDI DELLA SUA VITA.

Io conobbi il Cipolla a Palermo nel 1906. Ero studente di matematica a Pisa e avevo sentito ricordare questo valorosissimo giovane che aveva fatto un primo biennio di studi in quella Università e che si era da tempo affermato nella Teoria dei Numeri, materia che suscitava allora nel mio spirito tanti interessi.

Ricordo l'incontro: io, il principiante che vive di speranze, Egli, lo studioso che ha già saggiato le sue forze e assaporato le prime soddisfazioni. Egli fu estremamente affabile, e, come fanno in simili circostanze coloro che amano che la Scienza da essi coltivata acquisti dei neofiti, mi fu prodigo di auguri.

Mi fece impressione il Suo sorriso dolce e la Sua fisionomia bionda che direi nordica, fisionomia che si riscontra talvolta negli uomini della mia Sicilia.

Col progredire degli anni, dopo la prima guerra mondiale, entrammo in rapporti amichevoli che divennero assai cordiali nell'ultimo periodo della Sua vita terrena. Appresi così tanti particolari della Sua carriera.

Al Liceo Egli emergeva negli studi letterari, filosofici e scientifici. Sulla via da scegliere all'Università influi il Suo professore di fisica, Ezio Crescini, un antico normalista che Lo portò a dedicarsi alla matematica.

Due anni dopo la laurea, nel 1904, passò al Ginnasio di Corleone, a circa 30 chilometri da Palermo, insegnante di matematica e di scienze naturali e vi rimase fino al 1911.

Periodo di grande raccoglimento: Egli trova le formule apiristiche risolutive delle congruenze numeriche e scrive alcune delle Sue famose Note sulla struttura dei gruppi finiti, e meditando sui fondamenti dell'algebra arriva al concetto di isomorfismo aritmetico.

Dopo pochi mesi passati al Liceo di Potenza, nel 1911 Egli fu nominato titolare di Analisi algebrica all'Università di Catania per passare definitivamente alla cattedra di Analisi matematica di Palermo nel 1923.

Ebbe nella vita accademica molte distinzioni: vicepresidente del Circolo Matematico di Palermo, direttore delle « Esercitazioni matematiche » di Catania, membro della Commissione scientifica dell'Unione Matematica Italiana, membro del Comitato di redazione degli « Annali di matematica pura ed applicata », dottore *honoris causa* dell'Università di Sofia, socio dell'Accademia Gioenia di Catania, dell'Accademia di Lettere e Scienze di Palermo, dell'Accademia di Napoli e dal 1947 di quella dei Lincei.

I Suoi scolari furono anche Suoi amici: due di essi, Vincenzo Amato e Gaspare Mignosi, arrivarono alla cattedra universitaria, altri, Salvatore Amante, Giuseppe Mignosi, Benedetto Pettineo, alla docenza.

Furono pure Suoi amici i Suoi compagni di studio, Corradino Mineo e Pasquale Calapso, Vittorio Strazzeri che Egli ricorda affettuosamente insieme a Lui e a Gaspare Mignosi alla Scuola di Magistero di Giovanni Maisano. Per questo classico algebrista e per il Suo maestro Gabriele Torelli Egli scrisse due necrologi, tanto ricchi di umanità. Di Maisano tratteggia l'austera personalità e alla « nobilissima figura » di Gabriele Torelli si rivolge come « venerato e indimenticabile Maestro ».

Compagno inseparabile della Sua vita fu Gaspare Mignosi, vicino a Lui nelle ore liete e anche nelle tristi. Un comune dolore legò i due amici: la morte di Luigi Cipolla, figlio del Nostro e genero del Mignosi, perito in un bombardamento di Palermo durante l'ultima guerra.

Fu un grande algebrista. Egli operò in un periodo in cui in Italia l'algebra cedeva il campo alla geometria algebrica che, creata da Cremona, Bertini, Segre, Veronese, si affermava in modo superbo per opera di Castelnuovo, Enriques, Severi. Oggi l'algebra astratta, la teoria dei gruppi e la teoria dei numeri, tutte teorie care al Cipolla, si sviluppano nel mondo matematico vigorosamente e in maniera autonoma e porgono alla geometria algebrica nuovi strumenti di indagine; noi abbiamo la certezza che i pionieri della nuova scuola algebrica italiana opereranno con la stessa fede e con lo stesso grande successo di Michele Cipolla.

## 9. ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI.

## MEMORIE E NOTE.

1. *La determinazione assintotica dell' $n^{\text{mo}}$  numero primo.* «Rend. R. Acc. sc. fis. e mat. Napoli», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 8, pp. 132-166 (1902).
2. *Sui numeri perfetti e sui numeri di Mersenne.* «Periodico Mat.», ser. 2<sup>a</sup>, vol. 5, pp. 285-288 (1902-3).
3. *Un metodo per la risoluzione della congruenza di secondo grado.* «Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 9, pp. 154-161 (1903).
4. *Delle congruenze binomie rispetto ai numeri primi della forma  $2^m q + 1$ , essendo  $q$  un numero primo.* «Periodico Mat.», ser. 2<sup>a</sup>, vol. 5, pp. 330-335 (1902-3).
5. *Sui numeri composti  $P$  che verificano la congruenza di Fermat  $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$ .* «Annali Mat.», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 9, pp. 113-160 (1903).
6. *Su di una classe di polinomi.* «Periodico Mat.», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 6, pp. 24-33 (1903-4).
7. *Sull' algoritmo della divisione.* «Suppl. Period. Mat.», a. VII, pp. 69-73, (1903-4).
8. *Applicazione della teoria delle funzioni numeriche del secondo ordine alla risoluzione della congruenza di secondo grado.* «Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 10, pp. 135-161 (1904).
9. *Teoria dei numeri complessi ad  $n$  unità: Corpi associativi, corpi hankeliani,* «Periodico Mat.», pp. ser. 3<sup>a</sup>, vol. 2, pp. 97-106, 162-173, (1904-5).
10. *Formule di risoluzione della congruenza binomia quadratica e biquadratica.* «Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 11, pp. 13-17 (1905).
11. *Estensione delle formule di Meissel-Rogel e di Torelli sulla totalità dei numeri primi che non superano un numero assegnato.* «Annali Mat.», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 11, pp. 253-267 (1905).
12. *Teoria dei numeri complessi ad  $n$  unità: Corpi commutativi di Weierstrass.* «Periodico Mat.», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 2, pp. 209-219 (1904-5).
13. *Estensione di un metodo di Legendre alla risoluzione della congruenza  $x^{2^m} \equiv a \pmod{2^k}$ .* «Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 11, pp. 304-309 (1905).
14. *Intorno alle differenze di  $O_q$  e alle identità aritmetiche.* «Periodico Mat.», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 3, pp. 13-17 (1905-6).
15. *Theoria de congruentias intra numeros integro.* «Revue de Math.» (Torino), vol. 8, pp. 89-117 (1905).
16. *Sulle funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più congruenze secondo un modulo primo.* «Periodico Mat.», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 4, pp. 36-41 (1906-7).
17. *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo.* «Math. Annalen», vol. 63, pp. 54-61 (1906).
18. *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie, Nota I.* «Rend. R. Acc. Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol. 16 (I sem.), pp. 603-608 (1907).
19. *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie, Nota II.* «Rend. R. Acc. Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol. 16, (I sem.), pp. 732-741 (1907).
20. *Intorno ad un radicale continuo.* «Periodico Mat.», ser. 3., vol. 5, pp. 179-185 (1907-8).
21. *Sulla teoria dei gruppi abeliani.* «Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 14, pp. 77-102 (1908).
22. *Specimen de Calculo arthmetico-integrale.* «Rivista de Math.» (Torino), vol. 9, p. 20 (1909).
23. P. BACHMANN: *Grundlehren der neuen Zahlentheorie* (Recensione). «Boll. bibl. st. sc. mat.», a. II, pp. 51-59 (1909).
24. J. SOMMER: *Vorlesungen über Zahlentheorie.* (Recensione). «Boll. bibl. st. sc. mat.», a. II, pp. 51-53 (1909).
25. *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito. Nota I.* «Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli», ser. 3<sup>a</sup>, vol. 15, pp. 44-54 (1909).

26. *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*. Nota II. « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 15, pp. 113-124 (1909).
27. *I numeri reali*. « Periodico Mat. », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 7, pp. 87-118 (1909-10).
28. *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*. Nota III. « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 17, pp. 226-232 (1911).
29. *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*. Nota IV. « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 18, pp. 29-35 (1912).
30. VINCENZO MOLLAME (Necrologio). « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. 5, p. 4 (1912).
31. M. DE FRANCHIS: *Complementi di Geometria*. (Recensione). « Boll. bibl. st. sc. mat. », a. 14, 4 p. (1912).
32. *Sul teorema di Hadamard, relativo al modulo massimo di un determinante*. « Giorn. Mat. Battaglini », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 3, p. 5 (1912).
33. (ANALYTICUS) *Sulla teoria dell'equivalenza dei poliedri*. « Il Pitagora », a. XIX, pp. 1-4 (1912-13).
34. *Intorno ad una definizione di equivalenza per le figure poligonali e poliedriche*. « Il Pitagora », a. XX, pp. 63-69 (1913-14).
35. *Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni*. « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. 6, Mem. V, pp. 13 (1913).
36. *Le sostituzioni ortogonali non cayleyane*. « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. 7, Mem. II, p. 17 (1914).
37. *Sulle equazioni algebriche le cui radici sono tutte radici dell'unità*. « Rend. Circolo Mat. Palermo », t. 38, (2. sem.), pp. 370-375 (1914).
38. *I gruppi finiti dei primi tre tipi*. Nota I (Preliminari). « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 20, pp. 118-125 (1914).
39. *I gruppi finiti dei primi tre tipi*. Nota II (I gruppi di tipo 3). « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 20, pp. 126-135 (1914).
40. *I gruppi finiti dei primi tre tipi*. Nota III (I gruppi di tipo 3). « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 20, pp. 136-146 (1914).
41. *Sui principii del Calcolo aritmetico-integrale*. « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. 8, Mem. XI, p. 34 (1915).
42. *Determinanti della Teoria dei numeri*. « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. 8, Mem. XII, p. 10 (1915).
43. *Sui sistemi di funzioni ortogonali che ammettono un sistema complementare finito*. « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 21, pp. 235-248 (1915).
44. *Il discriminante e il numero delle radici immaginarie di un'equazione algebrica a coefficienti reali*. « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. 10, Mem. XIX, p. 8 (1917).
45. *Sulla determinazione della base canonica di un ideale in un corpo quadratico*. « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. 10, Mem. XX, p. 11 (1917).
46. *Sulle serie semplicemente convergenti*. « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 23, pp. 88-94 (1917).
47. *I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli*. « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. II, Mem. XI, p. 49 (1918).
48. *Su talune relazioni di uso frequente in teoria dei limiti*. « Il Pitagora », ser. 2<sup>a</sup>, vol. 2, p. 1-5, (1918).
49. G. TORELLI. *Lezioni di Analisi infinitesimale*. (Recensione). « Boll. bibl. st. sc. mat. », ser. 2<sup>a</sup>, vol. I, pp. 107-111, (1918).
50. *Sulla risoluzione in numeri interi dell'equazione  $x^2 = 8y^4 + z^4$* . « Atti Acc. Gioenia (Catania) », ser. 5<sup>a</sup>, vol. 12, Mem. I, 7 p. (1919-20).
51. *Sul criterio di convergenza di Hardy*. Nota I. « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 26, pp. 96-108 (1920).
52. *Sul criterio di convergenza di Hardy*. Nota II. « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 26, pp. 151-161 (1920).

53. *Criteri di convergenza riducibili a quello di Hardy-Landau*. « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 27, pp. 28-37 (1921).
54. *Sistemi di numerazione e proprietà dipendenti da essi*. « Esercitazioni mat. (Catania) », a. I, pp. 28-32, 75-87 (1921).
55. *Riduzione di una sostituzione lineare a forma canonica*. « Esercitazioni mat. (Catania) », a. I, pp. 209-220 (1921).
56. *Bellezze palesi e bellezze ascose dell'Aritmetica*. « Esercitazioni mat. (Catania) », a. II, pp. 61-79 (1922).
57. G. SCORZA. *Corpi numerici e algebre*. (Recensione). « Esercitazioni mat. (Catania) », a. III, pp. 52-65 (1923).
58. *Relazione sui libri di testo per l'insegnamento dell'Aritmetica esaminati dalla Commissione Centrale*. Roma 1923 (Relazioni pubblicate dal Min. della P. Istruz., fasc. III), II p.
59. *Sui fondamenti logici della Matematica secondo le recenti vedute di Hilbert*. « Annali di Mat. », ser. 4, t. I, pp. 19-29 (1923-24).
60. *Il teorema della continuità delle radici di un'equazione algebrica*. « Esercitazioni mat. (Catania) », a. IV, pp. 17-22 (1924).
61. *Alcune estensioni dei teoremi sulle caratteristiche delle sostituzioni lineari*. « Esercitazioni mat. (Catania) », a. IV, pp. 55-59 (1924).
62. *Considerazioni intorno alla teoria della divisibilità*. « Esercitazioni mat. (Catania) », a. IV, pp. 129-136 (1924).
63. *I sottogruppi fondamentali di un gruppo di Hölder* (Nota riassuntiva). « Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 30, pp. 192-193 (1924).
64. *I sottogruppi fondamentali di un gruppo di Hölder*. « Atti R. Acc. Sc. fis. mat. Napoli », ser. 2<sup>a</sup>, vol. 17, N. 6, p. 38 (1925).
65. *La posizione odierna della Matematica di fronte al problema della conoscenza*. « Note ed Eserc. mat. (Catania) », vol. V, pp. 191-204 (1929).
66. *Teoria dei Numeri. Analisi indeterminata*. « Enciclopedia delle Mat. elem. », (Milano, U. Hoepli ed.) p. 72 (1929).
67. *Aritmetica superiore*. « Enciclopedia italiana » (Roma, Istituto G. Treccani, 1929), 18 col.
68. *Formule di risoluzione algebrica delle equazioni di grado qualunque in un corpo finito*. « Rend. Circ. mat. Palermo », t. 54, pp. 199-206 (1930).
69. *Algoritmo per la determinazione del termine generale di una data successione di numeri interi crescenti*. « Atti della R. Acc. di sc., lett. arti, Palermo », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 15, p. 6 (1928-29).
70. *Sulle funzioni numeriche del massimo divisore e del minimo multiplo comune a due numeri*. « Atti R. Acc. sc. lett. arti, Palermo », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 15, p. 11, (1928-29).
71. GIOVANNI MAISANO (Commemorazione). « Atti R. Acc. sc., lett. ed arti, Palermo », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 16, p. II, (1930-31).
72. *Sulla tecnica del calcolo delle funzioni simmetriche elementari delle radici primitive  $n$ -ime dell'unità*. « Gior. di Scienze Naturali ed Economiche di Palermo », vol. 36, p. 18 (1931).
73. *Sulle matrici espressioni analitiche di un'altra*. « Rendic. Circ. Mat. Palermo », t. 56, pp. 144-154 (1932).
74. GIOVANNI MAISANO (Necrologia). « Giorn. Mat. Battaglini », ser. 3<sup>a</sup>, vol. 23, p. 6 (1932).
75. GABRIELE TORELLI (Necrologia). « Giorn. Mat. Battaglini », ser. 3<sup>a</sup> vol. 23, p. 17 (1932).
76. GALOIS EVARISTE. « Enciclopedia Italiana », Roma, Istituto G. Treccani (1932).
77. GAUSS KARL FRIEDRICH. « Enciclopedia Italiana », Roma, Istituto G. Treccani (1930), 3 col.
78. GIUSEPPE PEANO « L'Avvento », 16 maggio 1932, N. 20, col. 2 <sup>1</sup>/<sub>2</sub>.
79. *Evaristo Galois nel primo centenario della sua morte*. « L'Avvento », 25 luglio e 1 agosto 1932, nn. 30-31, 3 col.
80. KRONECKER LEOPOLD. « Enciclopedia Italiana », Roma, Istituto G. Treccani (1932), 1 c.
81. KUMMER ERNST EDUARD. « Enciclopedia italiana », Roma, Istituto G. Treccani (1932).
82. *Evariste Galois, in primo centenario de sua morte*. « Schola et Vita », a. VII, pp. 259-265 (1932).

83. *Evaristo Galois, nel primo centenario della sua morte*. «Esercitazioni Matematiche», ser. 2<sup>a</sup>, vol. VII, pp. 3-9 (1933).
84. *Conferenze di Filosofia Matematica* (Riassunto). «Esercitazioni Matematiche», ser. 2<sup>a</sup>, vol. VII, pp. 146-9, 206-8, (1934).
85. *Il contributo italiano alla rinascita della Matematica nel Duecento*. «Esercitazioni Matematiche», ser. 2<sup>a</sup>, vol. VIII, pp. 1-12 (1934).
86. *Dedotte e controdedotte dei vari ordini di una funzione numerica*. «Scritti matematici offerti a L. Berzolari», Rossetti, Pavia, pp. 183-193 (1935).
87. *Sul programma d'Aritmetica razionale per il corso superiore dell'Ist. Magistrale*. «Esercitazioni Mat.», ser. 2<sup>a</sup>, vol. X, pp. 1-4 (1937).
88. *Su due diverse estensioni della funzione  $\mu(n)$  di Möbius*. «Esercitazioni Mat.», ser. 2<sup>a</sup>, vol. X, pp. 1-5 (1937).
89. *Nulla e zero*. «Esercitazioni Mat.», ser. 2<sup>a</sup>, vol. X, pp. 1-10 (1937).
90. *Indagini antiche e nuove sui misteri dell'Aritmetica*. «Esercitazioni Mat.», ser. 2<sup>a</sup>, vol. X, pp. 1-10 (1937).

#### TRATTATI E CORSI DI LEZIONI UNIVERSITARIE.

1. *Analisi algebrica e introduzione al Calcolo infinitesimale* (prima edizione). Palermo 1914, D. Capozzi ed., pp. XXIV + 420.
2. *Questioni di Analisi algebrica* (Note ed Esercizi). Palermo 1916, litogr., D. Capozzi. 172 p.
3. *Teoria dei gruppi d'ordine finito. PARTE I: Gruppi astratti*. Catania «Circ. Mat.», 1920-21, litogr., 259 p.
4. *Teoria dei gruppi d'ordine finito. PARTE II: Gruppi di sostituzioni*. Catania «Circ. Mat.» 1921-22, litogr., 101 p.
5. *Teoria dei gruppi di sostituzioni. PARTE III: Teoria delle equazioni algebriche secondo Galois*. Catania «Circ. Mat.», 1922, litogr., 187 p.
6. *Analisi algebrica e introduzione al Calcolo infinitesimale* (seconda edizione). Palermo 1921, D. Capozzi ed., pp. XXIII + 505.
7. *Lezioni di Calcolo infinitesimale* (prima edizione). Palermo 1925, litogr. pp. VIII + 412.
8. *La matematica elementare nei suoi fondamenti, nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori* (Conferenze). Palermo 1927, litogr., p. 477.
9. *Lezioni di Analisi algebrica con introduzione al Calcolo infinitesimale*. Palermo 1926, litogr. pp. VIII + 382.
10. *Lezioni di Calcolo infinitesimale* (seconda edizione). Palermo 1927, litogr., pp. VI + 374.
11. *La matematica elementare nei suoi fondamenti, nei riguardi didattici e negli sviluppi superiori* (nuova edizione). Palermo 1929, pp. XIV + 328.
12. *Lezioni di Calcolo infinitesimale* (terza edizione). Palermo 1933, litogr. G. Castiglia, pp. VIII + 432.
13. *Lezioni di Analisi algebrica con introduzione al Calcolo infinitesimale* (seconda ediz. litogr.), Palermo 1934, G. Castiglia, pp. IV + 362.

#### OPERE SCOLASTICHE.

In collaborazione col Prof. V. Amato n. 23 volumetti; in collaborazione col Prof. G. Mignosi n. 9 volumetti.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Giordani dà la parola al Socio Sansone che rievoca la figura e l'opera del compianto Collega Michele Cipolla.

Il Presidente ringrazia il prof. Sansone per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del Socio Cipolla presenti alla seduta, l'espressione del più vivo cordoglio della Classe e suo personale per la scomparsa del valoroso scienziato.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Severi presenta il volume I (1893-1898) delle «Memorie scelte di Geometria» di Federico Enriques, pubblicate dalla Casa Zanichelli, a cura di un Comitato accademico, presieduto dal prof. Giordani, Presidente della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, e composto dai Soci U. Amaldi, Bompiani, Chisini, Segre, Severi e dal prof. Luigi Campedelli.

Il Socio Severi pensa di essere stato prescelto per la presentazione del volume, forse per la sua qualità di ultimo superstite di quel periodo eroico nel quale la produzione italiana diede al nostro Paese una posizione di primo piano nel campo delle discipline matematiche; e si considera quindi onorato di assolvere l'incarico. Ricorda poi di avere già commemorato Federico Enriques all'Università di Roma il primo dicembre e non desidera ripetersi, perché in quella sede egli parlò dell'illustre Collega scomparso, e disse tutto quanto credeva più significativo, senza entrare in troppi particolari tecnici, che il prof. Togliatti doveva ulteriormente illustrare; e disse tutta la verità, sino al punto da ricordare persino i contrasti che talvolta sorsero tra lui e l'Enriques, e che furono determinati dalla somiglianza, sotto certi aspetti, dei loro temperamenti, emotivi e impulsivi. Tali contrasti però non diminuirono mai la stima reciproca dei due studiosi.

Il Socio Severi confida che il proprio spirito conservi ancora un grado di giovanilità sufficiente a intendere i nuovi aspetti e le nuove esigenze dello sviluppo matematico, ma non può fare a meno di osservare con preoccupazione come oggi, non solo nelle matematiche, ma anche nell'arte, si tenda all'astrattismo, e alla soverchia generalizzazione, cosa questa ch'egli reputa pericolosissima. La stessa preoccupazione fu manifestata con parole incisive, ch'egli riassume, da Guido Castelnuovo nella prefazione dell'ultima opera (postuma) di Enriques. Pertanto in questo momento la pubblicazione delle più antiche e principali Memorie di Geometria di Federico Enriques costituisce una iniziativa particolarmente lodevole, perché il lavoro di Enriques fu sempre dominato da una forte intuizione; ed è quanto mai opportuna, perché richiama alla necessità della produzione sostanziale (e non meramente formale o generalizzativa) coloro che, nel campo matematico, si limitano a

sfruttare con travestimenti o generalizzazioni il cospicuo capitale accumulato dai grandi Maestri, loro predecessori. Uno di questi fu Federigo Enriques che, insieme a Guido Castelnuovo, a lui legato da profondi vincoli di amicizia e di parentela, diede alla geometria algebrica contributi di grande importanza, raggiungendo sovente la genialità. È vero che in Italia vi erano già stati illustri geometri algebristi quali il Cremona (il primo promotore di tale branca di studi) e i suoi discepoli diretti, Veronese e Bertini, che avevano arrecato cospicui contributi a questo ramo di geometria; ma è anche vero che, al tempo dell'Enriques, era tuttora necessario di ricondurre sulla via maestra la geometria, impaludatasi in quello che d'Ovidio chiamò tic-tac geometria. Il primo ad additare con l'opera magistrale il nuovo indirizzo fu Corrado Segre, diretto Maestro dello stesso prof. Severi, del quale anche Castelnuovo ed Enriques furono in un certo senso discepoli. L'Enriques si trovò a dover bonificare una selva selvaggia, irta di fatti grezzi, d'intuizioni talora non analizzate a fondo e spesso prive di ogni precisione, quali derivavano dalla geniale mente di Max Noether. Ma ciò nonostante egli riuscì a costruire un edificio mirabile, armonioso e chiaro.

Il prof. Severi ricorda, terminando, che nella prefazione testé citata del nostro compianto Presidente Castelnuovo vien posta la questione se presto sarebbe sorto qualcuno che potesse raccogliere la grandiosa eredità della scuola geometrica italiana, e di quella francese, capeggiata da Poincaré e da Picard.

Castelnuovo è in questo piuttosto pessimista, perché oggi più che ai risultati si guarda di frequente ai metodi e, come dice lo stesso Castelnuovo, la via viene disseminata da ostacoli artificiali e da macchinose astrazioni. Si rischia così (anche secondo l'indirizzo di certa moderna filosofia) di ridurre tutta la scienza a metodologia, mentre si trascura o si guarda talora perfino con dispregio all'intuizione, prima e più abbondante fonte della scoperta scientifica.

Motivo di conforto e di speranza è per noi, come sarebbe stato per Castelnuovo ed Enriques, di richiamare le parole che nel 1951 scrisse un giovane valoroso matematico francese, Pietro Samuel, esimio cultore degli indirizzi moderni e conoscitore delle teorie classiche della nostra scuola e di quella francese di Poincaré-Picard.

«Le diatribe fra scuole son fiorite sempre e in tutti i rami delle matematiche. Siccome si tratta qui della geometria algebrica, il lettore crederà che io faccia allusione ai dibattiti fra la scuola italiana e gli algebristi moderni; non è così!

«Una pleiade di grandi ricercatori tedeschi, francesi, americani, ha già infatti mostrato che è possibile d'applicare alla geometria algebrica i metodi dell'algebra astratta. Ci si è ugualmente accorti che i fondamentali risultati ottenuti da lampi d'intuizione d'italiani privilegiati, potevano dimostrarsi coi metodi rigorosi dell'algebra. Così si è temperata a poco a poco la diffidenza degli algebristi di fronte ai metodi italiani e non è forse lontano il tempo in cui un metodo universale di traduzione permetterà, senza cambiare

le idee generali, di far rientrare ogni dimostrazione italiana ("toute démonstration italienne", dice esattamente il testo francese) nel quadro rigoroso dell'algebra astratta ».

« Quel giorno - termina Samuel - ci sarà una fioritura di Memorie di sfruttamento analoga alla sovrapproduzione contemporanea di iperassiomatizzatori in fregola di generalizzazioni ».

Il Socio Severi, dopo aver auspicato che i giovani matematici possano ritrovare la giusta via, rinnovando profondi contatti con gl'indirizzi della scuola italiana, nella piena conoscenza dei nuovi pregevoli metodi che l'algebra astratta fornisce, conclude elogiando la Casa Zanichelli per l'accuratezza e l'eleganza della edizione.

Il Socio E. Bompiani presenta sette volumi. Uno contiene le *Lezioni di Topologia* », dettate dal prof. E. Martinelli nel 1955-56 nell'Istituto Matematico dell'Università di Roma.

Gli altri sei volumi documentano, in parte, l'attività svolta dal Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) negli anni 1954 e 1955. Essi contengono in ordine agli argomenti appresso indicati corsi e conferenze svolti da matematici italiani e stranieri:

I. - *Quadratura delle superficie e questioni connesse* (R. Caccioppoli, L. Cesari, Ch. Pane).

II. - *Equazioni differenziali non lineari* (I. L. Massera, W. Wasow, G. Sansone, D. Graffi; G. Aymerich, G. Colombo, R. Conti).

III. - *Teoria dei numeri* (H. Davenport, L. I. Mordell, C. A. Rogers; P. Erdős, G. Ricci).

IV. - *Topologia* (K. Kuratowski, G. Scorza-Dragoni, E. Sperner; G. Darbo, M. Dolcher, M. Vaccaro).

V. - *Teorie non linearizzate in elasticità, idrodinamica, aerodinamica* (A. Signorini, B. Finzi, F. H. van den Dungen).

VI. - *Geometria proiettivo-differenziale* (E. Bompiani, B. Segre, E. Čech).

La direzione del C.I.M.E. ha la convinzione di aver notevolmente contribuito, sia con i corsi (ciascuno frequentato da 35 a 40 studiosi ricercatori) sia con la loro pubblicazione, a promuovere la ricerca matematica in Italia; e ringrazia il Consiglio Nazionale delle Ricerche e il Ministero della P. I. per aver permesso l'attuazione di essi.

Il Socio Pavari presenta le pubblicazioni n. 9 e n. 10 della Stazione Sperimentale di Selvicoltura di Firenze, da lui diretta, l'una delle quali del prof. Lucio Susmel, dal titolo: « Riordinamento su basi bio-ecologiche delle abetine di S. Vito di Cadore » e l'altra, del dott. Riccardo Morandini, su « Il Larice nella Venezia Tridentina ». Il primo lavoro è un pregevole esempio di un piano di assestamento forestale basato su un vasto e dettagliato studio bio-ecologico, in una delle più importanti regioni forestali italiane come il Cadore.

In merito alla seconda pubblicazione, il Socio Pavari ricorda che lo studio sulla distribuzione del larice nelle Alpi Orientali fu iniziato nel 1933 dalla Stazione Sperimentale di Selvicoltura di Firenze, in collaborazione con il

prof. Tschermak, allora Direttore della Stazione Federale di Ricerche Forestali di Mariabrunn (Austria). Nel 1936 il prof. Fenaroli pubblicava il 1° volume della serie « Il Larice nelle Alpi Orientali Italiane » dedicato alla montagna lombarda, al quale segue ora l'opera del dott. Morandini, che costituisce uno studio completo della distribuzione del larice nella Venezia Tridentina. Seguirà, prossimamente, un terzo volume, riguardante la Venezia Euganea.

Il prof. Pavari presenta, infine, la pubblicazione n. 3 del « Centro di Studio sul Castagno » del Consiglio Nazionale delle Ricerche, che si inizia con un lavoro del dott. Umberto Bagnaresi dal titolo: « Osservazioni morfo-biologiche sulle provenienze di castagno giapponese coltivate in Italia ». Tale pubblicazione contiene, inoltre, una relazione sulle origini, gli scopi e l'attività finora svolti dalla Commissione Internazionale del Castagno della F.A.O., che pone in evidenza l'interessamento di molti Paesi d'Europa e d'oltre oceano per i problemi riguardanti il castagno e, insieme, illustra i motivi che hanno determinato la costituzione del Centro in Italia dove il castagno ha una particolare importanza.

Il Socio Giulio C. Pupilli presenta il primo volume dei « Lavori di Neurofisiologia eseguiti negl'Istituti di Fisiologia umana delle Università di Bologna e di Pisa durante il triennio 1954-1956 » e riferisce brevemente sull'attività scientifica che negl'Istituti medesimi si è svolta in tali anni. Ad essa attengono anche altre pubblicazioni, ora in corso di stampa, le quali formeranno il secondo volume di detta raccolta.

È stato attuato un vasto piano d'indagini intorno alle funzioni del sistema nervoso. A tale scopo il Consiglio Nazionale delle Ricerche aveva stanziato un apposito fondo e la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei aveva segnalato i nomi di coloro a cui si sarebbe dovuta affidare la direzione delle ricerche. Oltre ai direttori e agli assistenti universitari di ruolo dei due Istituti, hanno atteso alla indagine sperimentale complessivamente 35 ricercatori; 15 nell'Istituto di Bologna e 20 in quello di Pisa, dei quali 9 stranieri.

L'attività scientifica dei due Istituti è stata più specialmente diretta allo studio della fisiologia dei centri nervosi e si è svolta in un'atmosfera d'intensa e cordiale collaborazione. Un buon numero di ricerche è il risultato diretto dell'opera compiuta in comune e i lavori rispettivi sono stati pubblicati, o lo saranno, sotto il nome degli Istituti di Fisiologia umana di Bologna e di Pisa.

Le ricerche eseguite nell'Istituto di Bologna concernono i seguenti argomenti: 1° la fisiologia generale della corteccia cerebrale, studiata nel lembo isolato; 2° l'allestimento di un preparato che consente una lunga sopravvivenza della corteccia cerebellare, privata di ogni connessione nervosa; 3° la stimolazione chimica della corteccia del cervelletto, eseguita a fine d'indagare sia le espressioni elettrografiche dell'attività unitaria corticocerebellare, sia gli effetti che la stimolazione medesima provoca in strutture connesse anatomicamente col cervelletto; 4° le risposte cerebellari a impulsi trasmessi per le vie ottiche.

Nell'Istituto di Pisa sono state compiute indagini intorno ai seguenti argomenti: 1° la fisiologia della sostanza reticolare del tronco dell'encefalo, con riferimento alla regolazione del sonno e della veglia; 2° la fisiologia della corteccia cerebrale, e in specie delle aree visiva e motrice, e i rapporti funzionali talamo-corticali; 3° la epilessia sperimentale e le convulsioni iperossiche.

Le ricerche che sono opera dei due Istituti in comune, riguardano in grande prevalenza la fisiologia del cervelletto e particolarmente la sua azione regolatrice sul tono di postura, nell'animale normale e in quello decerebrato.

Durante il triennio studiosi stranieri sono stati ospiti dell'uno come dell'altro Laboratorio, ove essi hanno preso visione delle attrezzature elettrofisiologiche approntatevi per le specifiche indagini in corso o hanno assistito ad esperimenti. Hanno visitato l'Istituto di Bologna i professori P. Buser (Institut Marey, Paris), M. Monnier (Laboratoire de Neurophysiologie appliquée, Genève), J. F. Tönnies (Laboratorium für Elektrophysik, Freiburg i. Br.), P. Rijlant (Institut Solvay de Physiologie, Bruxelles), O. Larsell (Department of Anatomy, Minneapolis), M. Portmann (Clinique otorhinolaryngologique, Bordeaux), M. Bramerie (Clinique otorhinolaryngologique, Bordeaux), P. Dieterle (Clinique ophtalmologique de l'Hôpital cantonal, Genève) e B. Hedbys (Ophthalmic Clinic of University, Lund).

Hanno visitato l'Istituto di Pisa i professori A. Brodal (Anatomical Institute, Oslo), P. Buser (Institut Marey, Paris), P. Dell (Laboratoire de Physiologie de l'Hôpital Rousselle, Paris), A. Fessard (Collège de France e direttore dell'Istitut Marey, Paris), V. Söderberg (Nobel Institute for Neurophysiology, Stockholm), C. Elkes (Department of experimental Psychiatry, Birmingham), O. Larsell (Department of Anatomy, Minneapolis), N. Yoshii (Department of Physiology, Osaka), J. Cole (Department of Physiology, Oxford), K. Aki-moto (Neurological Laboratory, Kanazawa), T. Tokizane (Department of Physiology, Tokyo) e T.D.M. Roberts (Physiological Laboratory, Glasgow).

Il prof. Olof Larsell, al cui nome si ricollegano le moderne concezioni di embriologia e anatomia comparata del cervelletto, durante il suo soggiorno nell'Istituto di Bologna ha preso in esame i risultati ivi conseguiti intorno all'attività elettrica della corteccia cerebellare isolata e alle risposte elettriche del cervelletto allo stimolo fotico, discutendo in varie sedute i documenti presentatigli. E su problemi di morfologia e fisiologia cerebellare egli ha poi tenuto una conferenza nell'Istituto medesimo ed una in quello di Pisa.

Il prof. Alf Brodal, fruendo di una borsa di studio del Governo norvegese, si è trattenuto nel Laboratorio di Pisa per oltre un mese, attendendo a ricerche sulle proiezioni reticolari ascendenti.

A Bologna come a Pisa, si sono svolti settimanalmente seminari, ai quali erano di volta in volta invitati a partecipare studiosi stranieri di passaggio o gli ospiti stranieri permanenti. Le discussioni fatte in questi convegni, hanno grandemente giovato allo sviluppo delle indagini in corso nei due Istituti.

Alcuni dei giovani avviati alla ricerca hanno conseguito un titolo, che ad essi ha dato agio di continuare in Laboratori dell'estero gli studi intrapresi. I dottori A. Zanchetti (dell'Istituto di Pisa) e O. Pompeiano (dell'Istituto di

Bologna) hanno ottenuto una borsa Rockefeller: il primo ha frequentato per un anno solare il Department of Physiology dell'Università dell'Oregon, il secondo è dallo scorso agosto ospite dell'Istituto di Anatomia dell'Università di Oslo e vi si tratterrà per altri otto mesi. Il dott. G. F. Rossi (dell'Istituto di Pisa), fruendo di una borsa di studio norvegese, ha frequentato per otto mesi l'Istituto di Anatomia dell'Università di Oslo; e il dott. M. Parma (dell'Istituto di Pisa), fruendo di una borsa di studio francese, ha frequentato per sei mesi i laboratori di Fisiologia e di Neurologia della Facoltà di Medicina di Marsiglia. Il dott. P. L. Parmeggiani (dell'Istituto di Bologna) occupa, dall'ottobre scorso, un posto retribuito di assistente presso l'Istituto di Fisiologia di Zurigo.

Il prof. Giuseppe Moruzzi, che nel triennio ha tenuto varie conferenze all'estero, è stato relatore su « Spontaneous and evoked electrical activity in the brain stem reticular formation » al XX Congresso internazionale di Fisiologia (Bruxelles, luglio 1956). A tale congresso hanno partecipato anche il direttore dell'Istituto di Bologna e tutti i collaboratori di detto Istituto, come di quello di Pisa, esponendo i risultati delle proprie ricerche compiute nel corrente anno.

Il Socio Pupilli, dopo avere espresso la propria fiducia che quanto è stato fatto corrisponda realmente ai nobili intenti a cui si era mirato nell'istituire posti di « ricercatore », significa alla Presidenza del Consiglio Nazionale delle Ricerche e alla Presidenza della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali dell'Accademia dei Lincei il fervidissimo sentimento di obbligo suo come del collega Moruzzi, e la viva riconoscenza dei giovani studiosi che con tanta tenacia e severità hanno atteso al proprio compito di ricerca.

Il Socio Cotronei, nella sua qualità di membro anziano della Categoria V, desidera esprimere il suo più vivo compiacimento ai Colleghi Pupilli e Moruzzi e, insieme, rallegrarsi della deliberazione della Classe che designò, a suo tempo, i loro nomi. Egli è veramente felice nel constatare come la morfologia si sia sviluppata nel campo della fisiologia con risultati così soddisfacenti.

Il Socio Pupilli ringrazia il Collega Cotronei e desidera mettere in evidenza che molto merito di tali progressi va ai giovani studiosi, la cui opera è stata veramente ricca di fecondi risultati.

Il Presidente Giordani ringrazia i Colleghi che hanno offerto opere in omaggio.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni pervenute all'Accademia.

## PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente Giordani presenta i seguenti plichi suggellati:

1. Dott. Alfredo Adragna – manoscritto dal titolo: « Della misura della velocità della luce – Considerazioni teoriche », pervenuto all'Accademia il 12 novembre 1956.

2. Sig. Giacomo Lolli - una monografia dattiloscritta dal titolo: «Genesi dell'energia raggiante», pervenuta all'Accademia il 13 novembre 1956.

3. Sig. A. Haeckeli - originale di un lavoro scientifico (d'ordine matematico) firmato con lo pseudonimo «A. Haeckeli», pervenuto all'Accademia il 21 novembre 1956. Detto plico contiene anche, come risulta da quanto annotato sulla busta, la indicazione delle generalità esatte della persona fisica cui corrisponde lo pseudonimo suddetto.

Dopo aver constatato l'integrità dei sigilli, la Classe dispone che i plichi di cui trattasi siano trasmessi all'Archivio accademico a disposizione degli interessati.

### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Natta, Tonzig, Cambi, Graffi, Caglioti, Bonino, G. Bompiani, Signorini, Picone, Cotronei, Sergi, Armellini e Pupilli.

Viene letto e approvato l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

NATTA G., CORRADINI P. e CESARI M. - Determinazione quantitativa della cristallinità del prolipropilene (pres. dal Socio G. NATTA).

APARO E. - Sulle equazioni algebriche matriciali (pres. dal Socio M. PICONE).

ARDUINI A. e POMPEIANO O. - Modificazioni dell'attività di singole unità nel nucleo del tetto per stimolazioni della corteccia cerebellare e della periferia sensitiva (pres. dal Socio G. C. PUPILLI).

ARRIGONI O. - Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XX. Effetto dell'acido ascorbico e dell'acido deidroascorbico sull'attività fosfoglucomutase (pres. dal Socio S. TONZIG).

BIOCCA E. e LE ROUX P. L. - Su un nuovo genere (*Angulocirrus* gen. nov.) e su due nuove specie di tricostrongilidi (*Angulocirrus orycteropi* sp. nov. *Angulocirrus minor* sp. nov.) parassiti di mammiferi africani (pres. dal Socio G. COTRONEI).

CARINI G. - Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magnetoidrodinamica. Nota II (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

CHIORBOLI P. e TEDESCHI E. - Spettro Raman del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa e allo stato cristallino (pres. dal Socio G. B. BONINO).

DANUSSO F. e PAJARO G. - Analisi di  $^{14}\text{C}$  in etilene o polietilene marcati (pres. dal Socio G. NATTA).

FORTINI T. e CAPRIOLI G. - Variazione dal centro al lembo del Sole del tripletto del magnesio  $\lambda$  5167,3- $\lambda$  5172,7- $\lambda$  5183,6. Nota I (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

LE ROUX P. L. e BIOCCA E. - Su una nuova specie del genere *Uncinaria* e su due nuove specie del genere *Ancylostoma* (pres. dal Socio C. COTRONEI).

MARCUS S. — Sur certaines classes de fonction scontinues de deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota I (pres. dal Socio M. PICONE).

MARCUS S. — Sur certaines classes de fonctions continues de deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

MARRE E., ARRIGONI O. e FORTI G. — Reazioni metaboliche dell'auxina. — II. Effetto di concentrazioni sopraottimali di auxina sui sistemi del glutatione e dell'acido ascorbico e sul metabolismo energetico in segmenti di internodio di pisello (pres. dal Socio S. TONZIG).

MARRE E. e SERVETTAZ O. — Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. — II. Sulla termoresistenza « in vitro » del sistema citocromo riduttasico di *Cianofcee termali* (pres. dal Socio S. TONZIG).

TRUESDELL C. — Sulle basi della termomeccanica. Nota I (pres. dal Corrisp. D. GRAFFI).

TRUESDELL C. — Sulle basi della termomeccanica. Nota II (pres. dal Corrisp. D. GRAFFI).

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Carobbi, anche a nome del Collega Bianchi, legge la relazione sulla Memoria di P. Comucci e F. Mazzi, dal titolo: « Le vulcaniti della Dancalia ».

La relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, viene messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

## CONGRESSI

Il Socio Carobbi, anche a nome dei Colleghi Desio e Penta, riferisce sul Congresso internazionale di geologia, svoltosi a Città del Messico nello scorso settembre; Congresso nel quale essi hanno rappresentato l'Accademia.

La XX sessione del predetto Congresso ha lavorato, nella nuova città universitaria di Città del Messico, dal 4 all'11 settembre, su 15 sezioni che hanno trattato i più diversi temi, di geologia generale, vulcanologia, paleontologia, micropaleontologia, mineralogia, petrografia e geochimica.

Contemporaneamente si sono svolti alcuni simposi, sopra i giacimenti di petrolio e gas, sopra i giacimenti di manganese, sul cretaceo e sulla esplorazione geochimica.

Per il gran numero di comunicazioni presentate e svolte per quello degli aderenti, circa 4000, rappresentanti 83 nazioni, per il lavoro di organizzazione svolto dal consiglio e dalle numerose commissioni da esso dipendenti, può ben dirsi che la XX sessione del Congresso geologico internazionale ha avuto risultati scientifici e organizzativi degni della massima considerazione.

« Nel portarvi l'eco di questo avvenimento scientifico — conclude il Socio Carobbi — ringrazio, anche a nome dei Colleghi, l'Accademia per averci incaricato di rappresentarla ».

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente, comunica che alcuni Colleghi delle Sezioni di Fisiologia e Patologia hanno segnalato i seguenti nomi per il II Premio Internazionale Saint Vincent per le Scienze Mediche, istituito dalla Regione Valle d'Aosta e dalla Società Incremento Turistico Alberghiero Valdostano di Saint Vincent e messo a concorso dall'Accademia di Medicina di Torino:

David Keilin, professore di biologia e Direttore del Molteno Institute of Biology and Parasitology della Università di Cambridge (segnalato dal Socio Pupilli);

H. Laborit, chirurgo presso gli Ospedali della Marina Francese (segnalato dal Socio Meneghetti);

Henry Gastaut, professore di anatomia patologica e di medicina sperimentale all'Università di Marsiglia e Direttore dei Servizi Elettrobiologici degli Ospedali di Marsiglia (segnalato dal Socio Meneghetti);

Wilder Penfield, professore di neurochirurgia alla McGill University di Montreal (Canada) e Direttore del Montreal Neurological Institute (segnalato dal Socio Meneghetti);

D. W. Wolley, del Rockefeller Institute for Medical Research di New York (segnalato dal Socio Aloisi).

Il Presidente chiede se qualche Collega desideri formulare nuove proposte e il Socio Puntoni, anche a nome di altri membri della Sezione di Patologia, propone il nome del prof. Aldo Castellani e dà lettura di una relazione predisposta d'intesa con il Collega Califano.

Dopo matura discussione, la proposta è approvata dalla Classe e il Presidente assicura che provvederà a segnalare all'Accademia di Medicina di Torino il nome del prof. Castellani con la seguente motivazione:

«La Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei si onora di proporre la candidatura di Aldo Castellani al 2° Premio Internazionale Saint Vincent per le Scienze Mediche per le sue ricerche sugli agenti etiologici di dermatiti ulcerose ed erimatose:

*Corynebacterium mycetoides*,

*Bacillus cascaianensis*,

*Micrococcus violagabriellae*.

Questi studi, che vengono citati perché rientrano nell'ultimo quinquennio dell'attività scientifica di Aldo Castellani (termine richiesto per l'ammissibilità al concorso), non fanno che completare la eminente figura dello scienziato, che vanta una corona di scoperte e di studi originali, i quali possono essere così riassunti:

1° Scoperta della etiologia della malattia del sonno o tripanosomiasi.

2° Scoperta della etiologia della Framboesia (o Pian, o Yaws), spirochetosi che colpisce milioni di persone.

3° Scoperta dei batteri metadissenterici.

4° Scoperta di nuove specie di miceti patogeni, agenti di tricofizie, di dermatofizie e di altre micosi.

5° Ideatore della reazione di assorbimento delle agglutinine che ha avuto infinite applicazioni in sierologia.

6° Primo ideatore dei vaccini misti.

7° Prima dimostrazione del fenomeno di fermentazione simbiotica.

Si aggiunga a questa grande attività svolta nel campo della osservazione sperimentale, la descrizione di molte nuove affezioni tropicali, di nuove sindromi, di nuovi mezzi terapeutici, nonché la pubblicazione di pregevoli trattati che lo hanno reso noto in tutto il mondo.

Il riconoscimento degli eccezionali meriti di Aldo Castellani, oltre che dall'essere stato chiamato a reggere la Cattedra di Malattie tropicali di Roma, risulta dalla fiducia che gli è stata accordata dalle seguenti Università e dai sottoindicati Istituti esteri che lo hanno chiamato ad insegnare:

Medical College di Ceylon

Gouvernement bacteriological Institute di Ceylon

Clinica delle malattie tropicali di Colombo

Università Tulane di New Orleans (U.S.A.)

Physician Charity Hospital di New Orleans (U.S.A.)

Università dello Stato di Louisiana (U.S.A.)

Ross Institute e Ross Hospital for Tropical Diseases di Londra

School of Hygiene and Tropical Medicine di Londra

Istituto di Medicina Tropicale di Lisbona ».

Il Presidente invita quindi i Soci a far pervenire alla Cancelleria della Accademia le loro proposte per il conferimento del Premio Santoro per il 1957, destinato a scoperte o invenzioni operate da ingegni italiani, sia in Patria che fuori, nella fisica, o nella chimica, o nella meccanica, o nella agronomia, o nella biologia, o nella patologia, o nella geologia, o nella mineralogia, o nella geografia, o nella astronomia, e in generale in quelle scienze donde vengono maggiori benefici e reali utilità all'agricoltura, all'industria, al commercio, al benessere sociale.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 15 dicembre 1956*

ANTONELLI Ferruccio e SECCIA Maria. — *Psiche e tubercolosi*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1956. Pp. 282, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 40).

BROGLIO Luigi. — *Un metodo generale per lo studio del campo supersonico dietro onda d'urto aderente*. Roma, Tip. Operaia Romana, 1956. Pp. 75, in-4° (Monografie Scientifiche di Aeronautica, n. s., n. 1).

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO. — *Equazioni differenziali non lineari*. 3° Ciclo. Varenna-Villa Monastero, 15-24 settembre 1954. Pagin. varia, in-4° (In ciclostile).

— *Geometria proiettivo-differenziale*. 5° Ciclo. Pavia, Università degli Studi, 26 settembre-5 ottobre 1955. Paginaz. varia, in-4° (In ciclostile).

- CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO. — *Quadratura delle superficie e questioni connesse*. 2° Ciclo. Varenna, Villa Monastero, 16-25 agosto 1954. Paginaz. varia, in-4° (In ciclostile).
- *Teoria dei numeri*. 2° Ciclo. Varenna, Villa Monastero, 16-25 agosto 1955. Paginaz. varia, in-4° (In ciclostile).
- *Teorie non linealizzate in elasticità idrodinamica, aerodinamica*. 4° Ciclo. Fondazione Giorgio Cini-Isola S. Giorgio (Venezia), 20-28 settembre 1955. Paginaz. varia, in-4° (In ciclostile).
- *Topologia*. 3° Ciclo. Varenna, Villa Monastero, 26 agosto-3 settembre 1955. Paginaz. varia, in-4° (In ciclostile).
- CONGRESSO (31°) DI STOMATOLOGIA. — *Atti*. Firenze, 24-29 settembre 1956. Estr. da « Rivista Italiana di Stomatologia », a XI, 1956, n. 7.
- CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. CENTRO DI STUDIO SUL CASTAGNO. — Pubblicaz. n. 3: BAGNARESI Umberto. — *Osservazioni morfo-biologiche...*; PAVARI Aldo, BIRAGHI Antonio, BREVIGLIERI Nino. — *L'attività della Commissione Internazionale del Castagno*. Roma, 1956. Pp. 74, in-8°, con figg. (Suppl. a « La Ricerca Scientifica »).
- DE LEEUW Joseph. — *The calculation of  $\pi$  and its nearest consequences*. Pp. 54, in-8° (In ciclostile).
- GUTENBERG Beno. — *Damping of the Earth's Free Nutation*. Estr. da « Nature », vol. CLXXVII, 1956.
- GUTENBERG Beno and RICHTER C. F. — *Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XLVI, 1956, n. 2.
- *Magnitude and energy of earthquakes*. Estr. da « Annali di Geofisica », vol. XI, 1956, n. 1.
- ISTITUTI DI FIOLOGIA UMANA DELLE UNIVERSITÀ DI BOLOGNA E DI PISA. — *Ricerche di neurofisiologia eseguite nel triennio 1954-1956*. Vol. I, in-8° (III Monografie).
- MARTINELLI Enzo. — *Lezioni di topologia*. Vol. I (Anno accademico 1955-56). Roma, Istituto Matematico dell'Università, 1956. Pp. 162, in-4° (In ciclostile).
- MASINI Romeo. — *L'idrografia del Serchio nell'epoca preistorica e storica*. Estr. da « Memorie della Società Toscana di Scienze Naturali », serie A, vol. LXIII.
- MASINI Romeo. — *Le Tirrenidi*. Pisa, Nistri-Lischi, 1955. Pp. XI-152, con figg. e tavv.
- MORANDINI Riccardo. — *Il tarice nella Venezia Tridentina*. Firenze, Tip. L'Impronta, 1956 (Pubblicazioni della Stazione Sperimentale di Selvicoltura. Firenze, n. 10).
- PANNARIA Francesco. — *Attualità di Avogadro*. Estr. da « Nuova Antologia », n. 1867, 1956.
- $N = 6,006 \cdot 10^{23}$ . *Riconoscenza ad Avogadro*. Estr. da « Civiltà delle Macchine », 1956, n. 3.
- *Il pensiero di Avogadro*. Estr. da « Bollettino della Federazione Nazionale degli Ordini dei Chimici », a. V, 1956, n. 5-6.
- PELLEGRINI Giovanni. — *La lotta antidacica ad una svolta*. Estr. da « Informatore Fito-patologico », 1956, n. 16.
- PRESTIGIACOMO Antonino. — *I gravitoni*. Torino, Editrice 2000, 1956. Pp. 132, in-16°.
- Progress Report, Seismological Laboratory California Institute of Technology*, 1955. Estr. da « Transactions of the American Geophysical Union », vol. XXXVII, 1956, n. 2.
- RICHTER C. F. — Vedi: GUTENBERG Beno and RICHTER F.
- SECCIA Maria. — Vedi: ANTONELLI Ferruccio e SECCIA Maria.
- SPENCER T. W. — *Reflection of an acoustical pressure pulse from a liquid-solid plane boundary*. Estr. da « Geophysics », vol. XXI, 1956, n. 1.
- SUSMEL LUCIO. — *Riordinamento su basi bio-ecologiche delle abetine di S. Vito di Cadore*. Firenze, 1955 (Pubblicazioni della Stazione Sperimentale di Selvicoltura. Firenze, n. 9).
- Travaux de l'Institut Géophysique de l'Académie Tchecoslovaque des Sciences*. N. 20-35, 1955. Volume dedicato al prof. dr. B. Šalamon per il suo 75° anniversario. Praha, 1956. Paginaz. varia, in-8°, con figg. e tavv.
- VAGLIASINDI Carmelo. — *Il policronismo delle ère glaciali*. Randazzo, Arti Grafiche Palermo, 1956. Pp. 23, in-4°.
- VALLAURI Giancarlo. — *Azioni elettromagnetiche fra sistemi in rotazione*. Estr. da « Memorie della Accademia delle Scienze di Torino », ser. 3ª, vol. III, parte I, 1956.

## INDICI DEL VOLUME



## INDICE PER AUTORI

## A

- ALBERTI G., vedi BETTINALI C.  
 ALIETTI A., Il minerale a strati misti sapo-  
 nite-talco di Monte Chiaro (Val di Taro,  
 Appennino Emiliano) 201.  
 ARMELLINI G., Sopra l'orbita descritta da  
 un astro in un ammasso stellare sferico.  
 Nota I, 8.  
 ARNESE G., Contributo al problema delle  
 funzioni quasi continue composte, 387.  
 ARRIGHI G., Sui modelli anisotropi nella co-  
 smologia newtoniana, 79.  
 ARRIGONI O., vedi MARRÈ E.  
 ASCENZI A., vedi SERGI S.  
 ATZORI M., vedi BARGONI N.

## B

- BABUDIERI B., Un nuovo tipo serologico di  
 leptospira patogena per l'uomo, 122.  
 BAFFONI G.M., Il nucleo della cellula ner-  
 vosa dei Vertebrati. Osservazioni in An-  
 fibi anuri, 491.  
 BARGONI N. e ATZORI M. A., Su alcune pro-  
 prietà del protide contrattile del tessuto  
 muscolare del piede di « *Solen siliqua* » L.,  
 210.  
 — e LUZZATI A., Di una adenosin-5-fosfa-  
 tasi in tessuti vegetali, 450.  
 BATINI C., MORUZZI G. e POMPEIANO O.,  
 Componenti labirintiche ed estralabirin-  
 tiche nelle manifestazioni spastiche del  
 Gatto decerebrato e decerebellato, 328.  
 — Origine e meccanismi di compensazione  
 dei fenomeni dinamici di Luciani, 474.  
 BENEDETTI E. L. e COPPOLA G., Sulle glo-  
 meruliti nella nefropatia sperimentale  
 « tipo Masugi » nel ratto, 486.  
 BENETTI M. P., vedi BIOCCA E.  
 BERGER VON G. P., FADIGA E. e PUPIL-  
 LI G. C., Gli effetti della stimolazione di-  
 retta del N. ottico sull'elettrogramma della  
 corteccia cerebellare di Gatto, 35.  
 — Le reazioni elettriche provocate nel cer-  
 velletto di Gatto dallo stimolo fotico e  
 derivate in profondità, 160.

BETTINALI C., Rapporto tra il contenuto di  
 Uranio e  $P_2 O_5$  nei calcari fosfatici del Sa-  
 lento, 443.

— SALVETTI F. e ALBERTI G., Riparti-  
 zione di radioelementi tra i minerali di  
 alcune lave: contenuto in radio di leuciti  
 recenti, 310.

BETTINI S., NATALIZI G. e BOCCACCI M.,  
 Osservazioni sul meccanismo di azioni  
 degli acidi iodo-, bromo- e cloroacetico  
 nella blatta, « *Periplaneta americana* »,  
 138.

BETTINI S., vedi BOCCACCI M.

BIOCCA E., Schema di classificazione dei  
 protozoi e proposta di una nuova classe,  
 453.

— e BENETTI M. P., *Opisthorchis starkovi*  
 n. sp. parassita di *Felis serval*, 456.

BOCCACCI M. e BETTINI S., Contenuto di  
 Coenzima A nella blatta (« *Periplaneta*  
*americana* » L.) e nella mosca domestica  
 (« *Musca domestica* » L.), 218.

BOCCACCI M., vedi BETTINI S.

BONDI C., Esemplari di « *Dugesia lugubris* »  
 come « test » biologico nell'esame della  
 tossicità degli estratti embrionali di anfibi  
 anuri (« *Bufo vulgaris* »), 340.

BONINO G. B. e FABBRI G. F., Sullo spettro  
 ultrarosso di assorbimento del cobalti-  
 cianuro di potassio allo stato cristallino  
 ed in soluzione acquosa, 246.

— e MIRONE P., Sullo spettro ultrarosso d'as-  
 sorbimento del 2,2'-dipirrilchetone, 242.

BOURGIN D. G., Un indice dei punti uniti.  
 Nota III, 395.

BOVET D., vedi GATTI G. L.

## C

CAHEN M. vedi DEBEVER R.

CAMBI L. e PAGLIA E., Cianuri cobalto di-  
 piridilici e fenantrolinici, 372.

CAPRIOLI G. e GIALANELLA G., Osservazioni  
 fotografiche del pianeta Marte, eseguite  
 in occasione della grande opposizione del  
 settembre 1956 all'Osservatorio astrono-  
 mico di Roma su Monte Mario, 420.

- CARINI G., Sulle equazioni della magneto-idrodinamica, 436.
- CASARINI B. e PUCCI E., Specificità d'azione degli anticrittogamici, 305.
- CAVINATO A., Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna. - II. Gli scisti cristallini, 22.
- Depositi italiani magmatogeni e idrotermali da attività vulcaniche sottomarine, 154.
- CELLITTI C., Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie, primitive di prima e di seconda specie rispettivamente, di determinante  $D \equiv 1 \pmod{8}$ , 57.
- CESARI M., vedi NATTA G.
- CLAUSER E., Movimento di particelle nel campo unitario einsteiniano, 408.
- CLEMENTI A., L'azione agglutinante della bilirubina sui globuli rossi in assenza di ioni calcio e in presenza di ioni magnesio, 29.
- COPPOLA G., vedi BENEDETTI E. L.
- CORRADINI P., vedi NATTA G.
- CREPAX P. e INFANTELLINA F., Le proprietà della corteccia cerebrale dei Cani predisposti e di quelli non predisposti alla epilessia riflessa, indagate dopo recisione delle connessioni nervose estrinseche della corteccia stessa, 479.
- e PARMEGGIANI P. L., Ricerche elettroforetiche intorno ai costituenti proteici solubili a debole forza ionica contenuti nel miocardio ventricolare, in quello atriale e nel tessuto nodale di Cane, Bue e Cavallo, 334.
- ### D
- DEBEVER R. e CAHEN M., Systèmes dynamiques intégrables qui admettent des transformations infinitésimales en involution, 185.
- DEDÒ M., Analisi e costruzione effettiva dei gruppi continui di trasformazioni di De Jonquières, 71.
- DEMICHIELIS F., Determinazione dell'intensità assoluta di deboli sorgenti di  $^{226}_{88}\text{Ra}$  e  $^{228}_{90}\text{Th}$ , 91.
- D'ONOFRIO F., vedi PONTIERI G.
- ### F
- FABBRI G. F., vedi BONINO G. B.
- FADIGA E., vedi BERGER VON G. P.
- FANTOLI A., Orbita del Sistema Binario  $\mu$  Draconis Nota I, 430.
- FAVERO P. e VIANELLO E., Misura del potenziale di picco in polarografia oscillografica, 313.
- FERASIN F., Scogliere dolomitiche nel Malm superiore e nel Cretaceo inferiore delle Prealpi venete, 193.
- FERRONI E. e GABRIELLI G., Del « Polimorfismo molecolare ». Punto di trasformazione e di fusione del Solfo in nitrobenzolo, 96.
- — e MICHELI C., Del « Polimorfismo molecolare ». Soluzioni di naftalina in toluolo, 100.
- FICHERA G., Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Nota I, 46.
- Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Nota II, 166.
- FORTI G. e TESTA G., Attività respiratoria dei mitocondri di piselli eziolati, 468.
- FORTI G., vedi MARRÈ E.
- FUSCO R. e ROSSI S., Sopra una nuova reazione di apertura dell'anello pirazolico. Nuova sintesi delle triazine asimmetriche, 208.
- ### G
- GABRIELLI G., vedi FERRONI E.
- GALLARATI D., Una proprietà caratteristica delle rigate algebriche, 55.
- GALLITELLI P., Sulla presenza di un minerale a strati misti clorite-vermiculite (« swelling chlorite ») nei diabasi di Rossena e Campotrera nell'Appennino emiliano, 146.
- GASAPINA U., Sulle calotte a centri allineati appartenenti a superficie algebriche, 262.
- GATTI G. L. e BOVET D., Piezografo a trasmissione ad aria e a pressione controllata, 128.
- GAUDIANO A., Un nuovo carotenoide: la micoxantina, 308.
- e TOFFOLI F., Ricerche sulla saccarina, 109.
- GAUDIANO G., QUILICO A. e RICCA A., Nuova sintesi dell'isossazolo e del pirazolo, 253.
- GERRIT LEKKERKERKER C., Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici. Nota I, 179.

GERRIT LEKKERKERKER C., Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici. Nota II, 257.

GIALANELLA G., vedi CAPRIOLI G.

GIANNUZZI M. A., Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili ad eclisse. Nota I, 424.

GINEVRI A., vedi MOSCOVICI C.

GRILLO M. A., vedi LENTI C.

## I

ILLUMINATI G. e MARINO G., Cinetica di sostituzione nucleofila con lo ione  $\text{CH}_3\text{O}^-$  nei sistemi aza-naftalenici. Confronto tra gli effetti dei sostituenti Cl e  $p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$  in tre diverse reazioni, 318.

INFANTELLINA F., vedi CREPAX P.

## J

JOLY S., vedi VERONA O.

## K

KIRBY D., Invarianti topologici d'un insieme di elementi differenziali curvilinei. Nota I, 66.

— Invarianti topologici d'un insieme di elementi differenziali curvilinei. Nota II, 189.

## L

LATTANZI F., Sopra alcune relazioni fra momenti del I e II ordine del peso elastico longitudinale di un'asta, 279.

LENTI C., Sulla glicolisi nella retina, 446.

— e GRILLO M. A., Effetto dell'alta montagna sull'adenilicocinasi del tessuto muscolare scheletrico e del cuore, 215.

LEONARDI P., Dislocazioni triassiche non orogeniche in Val di Fassa (Dolomiti occidentali), 111.

LUZZATI A., vedi BARGONI N.

## M

MACCHI G., Sulla ridistribuzione plastica dei momenti nelle travi iperstatiche, 416.

MACRIS C., Sur la durée d'existence des flocculi brillants de la chromosphère solaire, 303.

— Sur la grandeur et la vie moyenne des spicules en projection sur le disque solaire, 419.

MAJORANA Q., Sul significato, non einsteiniano della relatività fisica, 14.

MANCUSO V., Citocromo-ossidasi nei mitocondri dell'uovo di *Sphaerechinus granularis* (Echinodermi), 504.

MARINO G., vedi ILLUMINATI G.

MARRÈ E., FORTI G., e ARRIGONI O., Sui rapporti di interdipendenza tra gli effetti dell'auxina sul glutatione, sulla respirazione, sul tenore in legami fosforici ad alto contenuto in energia e sulla crescita, 460.

MARTINELLI E., Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana, 267.

— Sulle varietà kähleriane dotate di isotropia caratteristica, 400.

MAZZARACCHIO V., vedi MOSCOVICI C.

MICHELI C., vedi FERRONI E.

MIRONE P., vedi BONINO G. B.

MORUZZI G., vedi BATINI C.

MORUZZI G. e POMPEIANO O., Effetti di lesioni croniche del nucleo del tetto sulle risposte alla stimolazione elettrica della corteccia cerebellare vermiana del «lobus anterior», 333.

MOSCOVICI C., GINEVRI A. e MAZZARACCHIO V., Isolamento su coltura di tessuti di un virus da enterite suina, 123.

## N

NATALIZI G., vedi BETTINI S.

NATTA G., CORRADINI P. e CESARI M., Sulla struttura cristallina del polipropilene isotattico, 365.

NICOLAUS R., vedi SCROCCO M.

NOBILE V., Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota II, 235.

## O

OSSICINI A., Sulla convergenza di serie multiple, 382.

## P

PACELLI M., Compressione e torsione di due corpi elastici a contatto, 296.

PAGLIA E., vedi CAMBI L.

PARMEGGIANI P. L., vedi CREPAX P.

PICCARDI G., Una ipotesi solare, 84.

- POMPEIANO O., vedi BATINI C.  
 POMPEIANO O., vedi MORUZZI G.  
 PONTIERI G. e D'ONOFRIO F., Sulla inibizione della biosintesi indotta della  $\beta$ -galattosidasi nelle pettenkoferie di *E. coli*, 229.  
 PUCCI C., Sulla inscrivibilità di un ottaedro regolare in un insieme convesso limitato dello spazio ordinario, 61.  
 PUCCI E., vedi CASARINI B.  
 PUPILLI G. C., vedi BERGER VON G. P.

## Q

- QUILICO A., vedi GAUDIANO G.

## R

- RICCA A., vedi GAUDIANO G.  
 ROSSI S., vedi FUSCO R.

## S

- SABAN G., Su particolari deformazioni infinitesime di superficie rigate, 274.  
 SACCO A., Sali di bis-trifenilfosfina, triscarbonile-cobalto (I), 442.  
 SALVETTI F., vedi BETTINALI C.  
 SANSONE G., Commemorazione del Corrispondente Michele Cipolla, 507.  
 SCROCCO M. e NICOLAUS R., Studio spettrofotometrico nell'infrarosso di alcuni derivati del 4-metil-3,5-dicarbetossi-pirrolo, 103.  
 SEBASTIAO E SILVA J., Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes. Nota II, 40.  
 — Sui funzionali che sono funzioni di funzionali lineari dei loro argomenti, 172.  
 SERGI S. e ASCENZI A., I caratteri della Mandibola Neandertaliana Circeo III, 375.  
 SIGNORINI A., Commemorazione del Socio Carlo Somigliana, 343.  
 SILVA G., Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale in uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. - II. Formule risolutive, 3.

- SILVA G., Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. - III. Procedimento per la determinazione delle irregolarità, 141.  
 SIMONETTA A., Alcune osservazioni preliminari sull'orecchio medio e la regione sfenoidale di «Chrysocloris asiatica», 134.  
 STEFANI R., L'autoinfestazione per ferita di una Gregarina parassita dell'Embiottero «Haploembia solieri» Ramb., 124.

## T

- TESTA G., vedi FORTI G.  
 TOFFOLI F., vedi GAUDIANO A.  
 TORALDO DI FRANCIA G., Il metodo variazionale di Levine e Schwinger, applicato agli schermi a conduttività unidirezionale, 86.  
 — Sulla gittata massima di un missile, 404.  
 TREZZI F., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XIX. Variazioni sperimentalmente indotte del rapporto AA/DHA e corrispondenti variazioni della crescita e dell'attività respiratoria di segmenti di fusto di Pisello. Nota I, 220.  
 — Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XIX. Variazioni sperimentalmente indotte del rapporto AA/DHA e corrispondenti variazioni della crescita e dell'attività respiratoria di segmenti di fusto di Pisello. Nota II, 323.

## U

- URBANI E., Studio delle lipasi e dei lipidi nello sviluppo embrionale e larvale di «Bufo vulgaris» e «Rana esculenta», 498.

## V

- VÂLCOVICI V., Sur le mouvement des fluides barotropes, 288.  
 VERONA O. e JOLY S., Nuova specie di «Volutella» isolata dal terreno: «Volutella piracicabana», n. sp. 119.  
 VIANELLO E., vedi FAVERO P.

## INDICE PER MATERIE

## A

**Analisi matematica.** — Contributo al problema delle funzioni quasi continue composte. ARNESE G., 387.

— Sulla convergenza di serie multiple. OSICINI A., 382.

— Sulla inscrivibilità di un ottaedro regolare in un insieme convesso limitato dello spazio ordinario. PUCCI C., 61.

**Antropologia.** — I caratteri della mandibola Neandertaliana Circeo III. SERGI S. e ASCENZI A., 375.

**Astrofisica.** — Una ipotesi solare. PICCARDI G., 84.

**Astronomia.** — Sopra l'orbita descritta da un astro in un ammasso stellare sferico. Nota I. ARMELLINI G., 8.

— Osservazioni fotografiche del pianeta Marte, eseguite in occasione della grande opposizione del settembre 1956 all'Osservatorio astronomico di Roma su Monte Mario. CAPRIOLI G. e GIALANELLA G., 420.

— Orbita del Sistema Binario  $\mu$  Draconis. Nota I, FANTOLI A., 430.

— Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili ad eclisse. Nota I. GIANNUZZI M. A., 424.

— Sur la durée d'existence des flocculi brillants de la chromosphère solaire. MACRIS C., 303.

— Sur la grandeur et la vie moyenne des spicules en projection sur le disque solaire. MACRIS C., 419.

— Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota II. NOBILE V., 235.

**Astronomia geodetica.** — Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale in uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. — II. Formule risolutive. SILVA G., 3.

— Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale

di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. — III. Procedimento per la determinazione delle irregolarità. SILVA G., 141.

## B

**Biochimica.** — Contenuto di Coenzima A nella blatta (« Periplaneta americana » L.) e nella mosca domestica (« Musca domestica » L.). BOCCACCI M. e BETTINI S., 218.

— L'azione agglutinante della bilirubina sui globuli rossi in assenza di ioni calcio e in presenza di ioni magnesio. CLEMENTI A., 29.

**Biologia.** — Il nucleo della cellula nervosa dei Vertebrati. Osservazioni in Anfibi anuri. BAFFONI G. M., 491.

— Osservazioni sul meccanismo di azione degli acidi iodo-, bromo- e cloroacetico nella blatta, « Periplaneta americana ». BETTINI S., NATALIZI G. e BOCCACCI M., 138.

— Esemplari di « Dugesia lugubris » come « test » biologico nell'esame della tossicità degli estratti embrionali di anfibi anuri (« Bufo vulgaris »). BONDI C., 340.

— Citocromo-ossidasi nei mitocondri dell'uovo di *Sphaerechinus granularis* (Echinodermi). MANCUSO V., 504.

— Alcune osservazioni preliminari sull'orecchio medio e la regione sfenoidale di « Chrysochloris asiatica ». SIMONETTA A., 134.

— Studio delle lipasi e dei lipidi nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris » e « Rana esculenta ». URBANI E., 498.

## C

**Chimica.** — Di una adenosin-5-fosfatasi in tessuti vegetali. BARGONI N. e LUZZATI A., 450.

— Rapporto tra il contenuto di Uranio e  $P_2O_5$  nei calcari-fosfatici del Salento. 443.

— Ripartizione di radioelementi tra i minerali di alcune lave: contenuto in radio

- di leuciti recenti. BETTINALI C., SALVETTI F. e ALBERTI G., 310.
- Chimica.** — Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del cobaltocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa. BONINO G. B. e FABBRI G., 246.
- Sullo spettro ultrarosso d'assorbimento del 2,2'-dipirrilchetone. BONINO G. B. e MIRONE P., 242.
- Misura del potenziale di picco in polarografia oscillografica. FAVERO P. e VIANELLO E., 313.
- Un nuovo carotenoide: la micoxantina. GAUDIANO A., 308.
- Ricerche sulla saccarina. GAUDIANO A. e TOFFOLI F., 109.
- Cinetica di sostituzione nucleofila con lo ione  $\text{CH}_3\text{O}^-$  nei sistemi aza-naftalenici. Confronto tra gli effetti dei sostituenti Cl e  $\text{p-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$  in tre diverse reazioni. ILLUMINATI G. e MARINO G., 318.
- Sulla glicolisi nella retina. LENTI C., 446.
- Effetto dell'alta montagna sull'adenilicocinasi del tessuto muscolare scheletrico e del cuore. LENTI C. e GRILLO M. A., 215.
- Sulla struttura cristallina del polipropilene isotattico. NATTA G., CORRADINI P. e CESARI M., 365.
- Studio spettrofotometrico nell'infrarosso di alcuni derivati del 4-metil-3,5-dicarbetossi-pirrolo. SCROCCO M. e NICOLAUS R., 103.
- Chimica agraria.** — Specificità d'azione degli anticrittogamici. CASARINI B. e PUCCI E., 305.
- Chimica biologica.** — Su alcune proprietà del protide contrattile del tessuto muscolare del piede di «Solen siliqua». BARGONI N. e ATZORI M. A., 210.
- Chimica fisica.** — Del «Polimorfismo molecolare». Punto di trasformazione e di fusione dello Solfo in nitrobenzolo. FERRONI E. e GABRIELLI G., 96.
- Del «Polimorfismo molecolare». Soluzioni di naftalina in toluolo. FERRONI E., GABRIELLI G. e MICHELI C., 100.
- Chimica inorganica.** — Cianuri cobalto-dipiridilici e fenantrolinici. CAMBI L. e PAGLIA E., 372.
- Sali di bis-trifenilfosfina, tris-carbonilecobalto. SACCO A., 442.
- Chimica organica.** — Sopra una nuova reazione di apertura dell'anello pirazolico. Nuova sintesi delle triazine asimmetriche. FUSCO R. e ROSSI S., 208.
- Chimica organica.** — Nuova sintesi dell'isossazolo e del pirazolo. GAUDIANO G., QUILICO A. e RICCA A., 253.
- Commemorazioni.** — Commemorazione del Socio Carlo Somigliana. SIGNORINI A., 343.
- Commemorazione del Corrispondente Michele Cipolla. SANSONE G., 507.
- Comunicazioni varie,** 356, 532.
- Congressi,** 353, 531.
- Cosmologia.** — Sui modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana. ARRIGHI G., 79.

## F

- Fisica.** — Determinazione dell'intensità assoluta di deboli sorgenti di  $^{226}_{88}\text{Ra}$  e  $^{228}_{90}\text{Th}$ . DEMICHELIS F., 91.
- Sul significato, non einsteiniano, della relatività fisica. MAJORANA Q., 14.
- Fisica matematica.** — Sulle equazioni della magneto-idrodinamica. CARINI G., 436.
- Il metodo variazionale di Levine e Schwinger, applicato agli schermi a conduttività unidirezionale. TORALDO DI FRANCIA G., 86.
- Fisiologia.** — Componenti labirintiche ed estralabirintiche nelle manifestazioni spastiche del Gatto decerebrato e decerebellato. BATINI C., MORUZZI G. e POMPEIANO O., 328.
- Origine e meccanismi di compensazione dei fenomeni dinamici di Luciani. BATINI C., MORUZZI G. e POMPEIANO O., 474.
- Gli effetti della stimolazione diretta del N. ottico sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto. BERGER (von) G. P., FADIGA E. e PUPILLI G. C., 35.
- Le reazioni elettriche provocate nel cervello di Gatto dallo stimolo fottico e derivate in profondità. BERGER (von) G. P., FADIGA E. e PUPILLI G. C., 160.
- Le proprietà della corteccia cerebrale dei Cani predisposti e di quelli non predisposti alla epilessia riflessa, indagate dopo recisione delle connessioni nervose estrinseche della corteccia stessa. CREPAX P. e INFANTELLINA F., 479.
- Ricerche elettroforetiche intorno ai costituenti proteici solubili a debole forza

ionica contenuti nel miocardio ventricolare, in quello atriale e nel tessuto nodale di Cane, Bue e Cavallo. CREPAX P. e PARMEGGIANI P. L., 334.

**Fisiologia.** — Piezografo a trasmissione ad aria e a pressione controllata. GATTI G. L. e BOVET D., 128.

— Effetti di lesioni croniche del nucleo del tetto sulle risposte alla stimolazione elettrica della corteccia cerebellare vermiana del «lobus anterior». MORUZZI G. e POMPEIANO O., 333.

**Fisiologia vegetale.** — Attività respiratoria dei mitocondri di piselli eziolati. FORTI G. e TESTA G., 468.

— Sui rapporti di interdipendenza tra gli effetti dell'auxina sul glutazione, sulla respirazione, sul tenore in legami fosferici ad alto contenuto in energia e sulla crescita. MARRÈ E., FORTI G. e ARRIGONI O., 460.

— Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XIX. Variazioni sperimentalmente indotte del rapporto AA/DHA e corrispondenti variazioni della crescita e dell'attività respiratoria di segmenti di fusto di Pisello. Nota I. TREZZI F., 220.

— Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XIX. Variazioni sperimentalmente indotte del rapporto AA/DHA e corrispondenti variazioni della crescita e dell'attività respiratoria di segmenti di fusto di Pisello. Nota II. TREZZI F., 323.

## G

**Geologia.** — Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna. — II. Gli scisti cristallini. CAVINATO A., 22.

— Scogliere dolomitiche nel Malm superiore e nel Cretaceo inferiore delle Prealpi venete FERASIN F., 193.

— Dislocazioni triassiche non orogeniche in Val di Fassa (Dolomiti occidentali). LEONARDI P., 111.

**Geometria.** — Analisi e costruzione effettiva dei gruppi continui di trasformazioni di De Jonquières. DEDÒ M., 71.

— Sulle calotte a centri allineati appartenenti a superficie algebriche. GASAPINA U., 262.

— Invarianti topologici d'un insieme di elementi differenziali curvilinei. Nota I. KIRBY D., 66.

**Geometria.** — Invarianti topologici d'un insieme di elementi differenziali curvilinei. Nota II. KIRBY D., 189.

— Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana. MARTINELLI E., 267.

— Sulle varietà kähleriane dotate di isotropia caratteristica. MARTINELLI E., 400.

— Su particolari deformazioni infinitesime di superficie rigate. SABAN G., 274.

**Giacimenti minerari.** — Depositi italiani magmatogeni e idrotermali da attività vulcaniche sottomarine. CAVINATO A., 154.

## M

**Matematica.** — Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie, primitive di prima e di seconda specie rispettivamente, di determinate  $D \equiv 1 \pmod{8}$ . CELLITTI C., 57.

— Systèmes dynamiques intégrables qui admettent des transformations infinitésimales en involution. DEBEVER R. e CAHEN M., 185.

— Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Nota I. FICHERA G., 46.

— Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Nota II. FICHERA G., 166.

— Una proprietà caratteristica delle rigate algebriche. GALLARATI D., 55.

— Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici. Nota I. GERRIT LEKKERKERKER C., 179.

— Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici. Nota II. GERRIT LEKKERKERKER C., 257.

— Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes. Nota II. SEBASTIÃO e SILVA J., 40.

— Sui funzionali che sono funzioni di funzionali lineari dei loro argomenti. SEBASTIÃO e SILVA J., 172.

**Meccanica.** — Movimento di particelle nel campo unitario einsteiniano. CLAUSER E., 408.

— Sopra alcune relazioni fra momenti del I° e II° ordine del peso elastico longitudinale di un asta. LATTANZI F., 279.

**Meccanica.** — Compressione e torsione di due corpi elastici a contatto. PACELLI M., 296.

— Sulla gittata massima di un missile. TORALDO DI FRANCIA G., 404.

— Sur le mouvement des fluides barotropes. VÂLCOVICI V., 288.

**Microliologia.** — Un nuovo tipo serologico di leptospira patogena per l'uomo. BAFUDIERI B., 122.

— Isolamento su coltura di tessuti di un virus da enterite suina. MOSCOVICI C., GINEVRI A., e MAZZARACCHIO V., 123.

— Nuova specie di « Volutella » isolata dal terreno: « Volutella piracicabana », n. sp. VERONA O. e JOLY S., 119.

**Mineralogia.** — Il minerale a strati misti saponite-talco di Monte Chiaro (Val di Taro, Appennino Emiliano). ALIETTI A., 201.

— Sulla presenza di un minerale a strati misti clorite-vermiculite (« swelling chlorite ») nei diabasi di Rossena e Campoterra nell'Appennino emiliano. GALLITELLI P., 146.

## O

**Opere pervenute in dono all'Accademia,** 360, 533.

## P

**Parassitologia.** — L'autoinfestazione per ferita di una Gregarina parassita dell'Embiottero « Haploembia solieri » Ramb. STEFANI R., 124.

**Patologia.** — Sulle glomeruliti nella nefropatia sperimentale « tipo Masugi » nel ratto. BENEDETTI E. L. e COPPOLA G., 486.

— Sulla inibizione della biosintesi indotta della  $\beta$ -galattosidasi nelle pettenkoferie di *E. coli*. PONTIERI G. e D'ONOFRIO F., 229.

**Personale accademico,** 351, 524.

**Plichi suggerati,** 353, 529.

**Presentazione di libri,** 356, 524.

**Presentazione di Note e Memore,** 359, 530.

## R

**Relazioni di Commissioni,** 531.

## S

**Scienza delle costruzioni.** — Sulla ridistribuzione plastica dei momenti nelle travi iperstatiche. MACCHI G., 416.

## T

**Temi per discussioni.** 355.

**Topologia.** — Un indice dei punti uniti. Nota III. BOURGIN D. G., 395.

## Z

**Zoologia.** — Schema di classificazione dei protozoi e proposta di una nuova classe. BIOCCA E., 453.

— *Opisthorchis starkovi* n. sp. parassita di *Felis serval*. BIOCCA E. e BENETTI M. P., 456.

## INDICI DEI FASCICOLI

## FASCICOLO 1-2.

LUGLIO-AGOSTO 1956.

## NOTE DI SOCI

|   |        |
|---|--------|
| SILVA G., Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale in uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. - II. Formule risolutive . . . . . | Pag. 3 |
| ARMELLINI G., Sopra l'orbita descritta da un astro in un ammasso stellare sferico. Nota I . . . . .   | 8      |
| MAJORANA Q., Sul significato, non einsteiniano, della relatività fisica . . . . .   | 14     |
| CAVINATO A., Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna. - II. Gli scisti cristallini . . . . .  | 22     |
| CLEMENTI A., L'azione agglutinante della bilirubina sui globuli rossi in assenza di ioni calcio e in presenza di ioni magnesio . . . . .  | 29     |

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

|   |         |
|---|---------|
| VON BERGER G. P., FADIGA E. e PUPILLI G. C., Gli effetti della stimolazione diretta del N. ottico sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto (pres. dal Socio G. C. Pupilli) . . . . .                                       | Pag. 35 |
| SEBASTIÃO E SILVA J., Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes. Nota II (pres. dal Socio M. Picone) . . . . .  | 40      |
| FICHERA G., Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Nota I (pres. dal Socio M. Picone) . . . . .   | 46      |
| GALLARATI D., Una proprietà caratteristica delle rigate algebriche (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .   | 55      |
| CELLITTI C., Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie, primitive di prima e di seconda specie rispettivamente, di determinante $D = 1 \pmod{8}$ (pres. dal Socio G. Armellini) . . . . . | 57      |
| PUCCI C., Sulla inscrivibilità di un ottaedro regolare in un insieme convesso limitato dello spazio ordinario (pres. dal Socio M. Picone) . . . . .   | 61      |
| KIRBY D., Invarianti topologici d'un insieme di elementi differenziali curvilinei. Nota I (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .  | 66      |
| DEDÒ M., Analisi e costruzione effettiva dei gruppi continui di trasformazioni di De Jonquières (pres. dal Socio O. Chisini) . . . . .  | 71      |
| ARRIGHI G., Sui modelli anisotropi nella cosmologia newtoniana (pres. dal Corrisp. F. Zagar) . . . . .  | 79      |
| PICCARDI G., Una ipotesi solare (pres. dal Socio G. Abetti) . . . . .   | 84      |
| TORALDO DI FRANCIA G., Il metodo variazionale di Levine e Schwinger, applicato agli schermi a conduttività unidirezionale (pres. dal Socio A. Signorini) . . . . .  | 86      |
| DEMICHÉLIS F., Determinazione dell'intensità assoluta di deboli sorgenti di $^{226}_{88}\text{Ra}$ e $^{228}_{90}\text{Th}$ (pres. dal Socio E. Perucca) . . . . .  | 91      |
| FERRONI E. e GABRIELLI G., Del « Polimorfismo molecolare ». Punto di trasforma-   |         |

|   |         |
|---|---------|
| zione e di fusione dello Solfo in nitrobenzolo (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i> )   | Pag. 96 |
| FERRONI E., GABRIELLI G. e MICHELI C., Del « Polimorfismo molecolare ». Soluzioni di naftalina in toluolo (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i> )  | 100     |
| SCROCCO M. e NICOLAUS R., Studio spettrofotometrico nell'infrarosso di alcuni derivati del 4-metil-3,5-dicarbetossi-pirrolo (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i> )                                  | 103     |
| GAUDIANO A. e TOFFOLI F., Ricerche sulla saccarina (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> )  | 109     |
| LEONARDI P., Dislocazioni triassiche non orogeniche in Val di Fassa (Dolomiti occidentali) (pres. dal Socio <i>G. B. Dal Piaz</i> )   | 111     |
| VERONA O. e JOLY S., Nuova specie di « Volutella » isolata dal terreno: « Volutella piracicabana », n. sp. (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i> )  | 119     |
| BABUDIERI B., Un nuovo tipo serologico di leptospira patogena per l'uomo (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> )  | 122     |
| MOSCOVICI C., GINEVRI A. e MAZZARACCHIO V., Isolamento su coltura di tessuti di un virus da enterite-suina (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> )  | 123     |
| STEFANI R., L'autoinfestazione per ferita di una Gregarina parassita dell'Embiottero « Haploembia solieri » Ramb. (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> )   | 124     |
| GATTI G. L. e BOVET D., Piezografo a trasmissione ad aria e a pressione controllata (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> )   | 128     |
| SIMONETTA A., Alcune osservazioni preliminari sull'orecchio medio e la regione sfenoidale di « Chrysochloris asiatica » (pres. dal Corrisp. <i>G. Colosi</i> )  | 134     |
| BETTINI S., NATALIZI G. e BOCCACCI M., Osservazioni sul meccanismo di azione degli acidi iodo-, bromo- e cloroacetico nella blatta, « Periplaneta americana » (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> ) | 138     |

## FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE-OTTOBRE 1956.

## NOTE DI SOCI

|   |          |
|---|----------|
| SILVA G., Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. - III. Procedimento per la determinazione delle irregolarità | Pag. 141 |
| GALLITELLI P., Sulla presenza di un minerale a strati misti clorite-vermiculite (« swelling chlorite ») nei diabasi di Rossena e Campotrera nell'Appennino emiliano   | 146      |
| CAVINATO A., Depositi italiani magmatogeni e idrotermali da attività vulcaniche sottomarine   | 154      |
| VON BERGER G. P., FADIGA E. e PUPILLI G. C., Le reazioni elettriche provocate nel cervelletto di Gatto dallo stimolo fotico e derivate in profondità (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> )  | 160      |

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

|  |          |
|--|----------|
| FICHERA G., Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> )                     | Pag. 166 |
| SEBASTIÃO E SILVA J., Sui funzionali che sono funzioni di funzionali lineari dei loro argomenti (pres. dal Corrisp. <i>L. Fantappiè</i> )                          | 172      |
| GERRIT LEKKERKERKER C., Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici. Nota I (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) | 179      |

|   |          |
|---|----------|
| DEBEVER R. e CAHEN M., Systèmes dynamiques intégrables qui admettent des transformations infinitésimales en involution (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )  | Pag. 185 |
| KIRBY D., Invarianti topologici d'un insieme di elementi differenziali curvilinei. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> )   | 189      |
| FERASIN F., Scogliere dolomitiche nel Malm superiore e nel Cretaceo inferiore delle Prealpi venete (pres. dal Socio <i>G. B. Dal Piaz</i> )   | 193      |
| ALIETTI A., Il minerale a strati misti saponite-talco di Monte Chiaro (Val di Taro, Appennino Emiliano) (pres. dal Corrisp. <i>P. Gallitelli</i> )  | 201      |
| FUSCO R. e ROSSI S., Sopra una nuova reazione di apertura dell'anello pirazolico. Nuova sintesi delle triazine asimmetriche (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> )  | 208      |
| BARGONI N. e ATZORI M. A., Su alcune proprietà del protide contrattile del tessuto muscolare del piede di « <i>Solen siliqua</i> » L. (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> )   | 210      |
| LENTI C. e GRILLO M. A., Effetto dell'alta montagna sull'adenilicocinasi del tessuto muscolare scheletrico e del cuore (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> )  | 215      |
| BOCCACCI M. e BETTINI S., Contenuto di Coenzima A nella blatta (« <i>Periplaneta americana</i> » L.) e nella mosca domestica (« <i>Musca domestica</i> » L.) (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> )  | 218      |
| TREZZI F., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XIX. Variazioni sperimentalmente indotte del rapporto AA/DHA e corrispondenti variazioni della crescita e dell'attività respiratoria di segmenti di fusto di Pisello. Nota I (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) | 220      |
| PONTIERI G. e D'ONOFRIO F., Sulla inibizione della biosintesi indotta della $\beta$ -galattosidasi nelle pettenkoferie di <i>E. coli</i> (pres. dal Corrisp. <i>L. Califano</i> )   | 229      |

## FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1956.

## NOTE DI SOCI

|  |          |
|--|----------|
| NOBILE V., Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota II | Pag. 235 |
| BONINO G. B. e MIRONE P., Sullo spettro ultrarosso d'assorbimento del 2,2'-dipirrilchetone (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> )  | 242      |
| BONINO G. B. e FABBRI G., Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del cabalticianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> )          | 246      |
| GAUDIANO G., QUILICO A. e RICCA A., Nuova sintesi dell'isossazolo e del pirazolo (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i> )  | 253      |

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

|   |          |
|---|----------|
| GERRIT LEKKERKERKER C., Una questione di approssimazione diofantea e una proprietà caratteristica dei numeri quadratici. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) | Pag. 257 |
| GASAPINA U., Sulle calotte a centri allineati appartenenti a superficie algebriche (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )  | 262      |

|   |          |
|---|----------|
| MARTINELLI E., Sulla curvatura delle superficie caratteristiche in una varietà kähleriana (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .   | Pag. 267 |
| SABAN G., Su particolari deformazioni infinitesime di superficie rigate (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .  | 274      |
| LATTANZI F., Sopra alcune relazioni fra momenti del I e II ordine del peso elastico longitudinale di un asta (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .   | 279      |
| VÂLCOVICI V., Sur le mouvement des fluides barotropes (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .   | 288      |
| PACELLI M., Compressione e torsione di due corpi elastici a contatto (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i> ) . . . . .   | 296      |
| MACRIS C., Sur la durée d'existence des flocculi brillants de la chromosphère solaire (pres. dal Corrisp. <i>G. Righini</i> ) . . . . .   | 303      |
| CASARINI B. e PUCCI E., Specificità d'azione degli anticrittogamici (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .  | 305      |
| GAUDIANO A., Un nuovo carotenoide: la micoxantina (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> ) . . . . .   | 308      |
| BETTINALI C., SALVETTI F. e ALBERTI G., Ripartizione di radioelementi tra i minerali di alcune lave: contenuto in radio di leuciti recenti (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i> ) . . . . .   | 310      |
| FAVERO P. e VIANELLO E., Misura del potenziale di picco in polarografia oscillografica (pres. dal Corrisp. <i>G. Semerano</i> ) . . . . .   | 313      |
| ILLUMINATI G. e MARINO G., Cinetica di sostituzione nucleofila con lo ione $\text{CH}_3\text{O}^-$ nei sistemi aza-naftalenici. Confronto tra gli effetti dei sostituenti Cl e $p\text{-CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{S}$ in tre diverse reazioni (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i> ) . . . . . | 318      |
| TREZZI F., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. -- XIX. Variazioni sperimentalmente indotte del rapporto AA/DHA e corrispondenti variazioni della crescita e dell'attività respiratoria di segmenti di fusto di Pisello. Nota II (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .             | 323      |
| BATINI C., MORUZZI G. e POMPEIANO O., Componenti labirintiche ed estralabirintiche nelle manifestazioni spastiche del Gatto decerebrato e decerebellato (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .   | 328      |
| MORUZZI G. e POMPEIANO O., Effetti di lesioni croniche del nucleo del tetto sulle risposte alla stimolazione elettrica della corteccia cerebellare vermiciana del «lobus anterior» (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .  | 333      |
| CREPAX P. e PARMEGGIANI P. L., Ricerche elettroforetiche intorno ai costituenti proteici solubili a debole forza ionica contenuti nel miocardio ventricolare, in quello atriale e nel tessuto nodale di Cane, Bue e Cavallo (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .                         | 334      |
| BONDI C., Esemplari di « <i>Dugesia lugubris</i> » come «test» biologico nell'esame della tossicità degli estratti embrionali di anfibii anuri (« <i>Bufo vulgaris</i> ») (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .   | 340      |

#### COMMEMORAZIONI

|  |          |
|--|----------|
| SIGNORINI A., Commemorazione del Socio Carlo Somigliana . . . . .                            | Pag. 343 |
| Personale accademico . . . . .   | 351      |
| Plichi suggellati . . . . .  | 353      |
| Congressi . . . . .  | 353      |
| Temi per discussioni . . . . .   | 355      |
| Comunicazioni varie . . . . .  | 356      |
| Presentazione di libri . . . . .   | 356      |
| Presentazione di Note e Memorie . . . . .  | 359      |
| Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 novembre 1956 . . . . . | 360      |

## FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1956.

## NOTE DI SOCI

|   |          |
|---|----------|
| NATTA G., CORRADINI P. e CESARI M., Sulla struttura cristallina del polipropilene isotattico (pres. dal Socio <i>G. Natta</i> ) . . . . . | Pag. 365 |
| CAMBI L. e PAGLIA E., Cianuri cobalto dipiridilici e fenantrolinici (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .                          | 372      |
| SERGI S. e ASCENZI A., I caratteri della Mandibola Neandertaliana Circeo III (pres. dal Socio <i>S. Sergi</i> ) . . . . .                 | 375      |

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

|  |          |
|--|----------|
| OSSICINI A., Sulla convergenza di serie multiple (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .   | Pag. 382 |
| ARNESE G., Contributo al problema delle funzioni quasi continue composte (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .   | 387      |
| BOURGIN D. G., Un indice dei punti uniti. Nota III (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .   | 395      |
| MARTINELLI E., Sulle varietà kähleriane dotate di isotropia caratteristica (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .  | 400      |
| TORALDO DI FRANCIA G., Sulla gittata massima di un missile (pres. dal Socio <i>A. Siginorini</i> ) . . . . .   | 404      |
| CLAUSER E., Movimento di particelle nel campo unitario einsteiniano (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .  | 408      |
| MACCHI G., Sulla ridistribuzione plastica dei momenti nelle travi iperstatiche (pres. dal Socio <i>G. Colonnetti</i> ) . . . . .   | 416      |
| MACRIS C., Sur la grandeur et la vie moyenne des spicules en projection sur le disque solaire (pres. dal Corrisp. <i>G. Righini</i> ) . . . . .  | 419      |
| CAPRIOLI G. e GIALANELLA G., Osservazioni fotografiche del pianeta Marte, eseguite in occasione della grande opposizione del settembre 1956 all'Osservatorio astronomico di Roma su Monte Mario (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .             | 420      |
| GIANNUZZI M. A., Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili ad eclisse. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .  | 424      |
| FANTOLI A., Orbita del Sistema Binario $\mu$ Draconis. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .   | 430      |
| CARINI G., Sulle equazioni della magneto-idrodinamica (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .  | 436      |
| SACCO A., Sali di bis-trifenilfosfina, tris-carbonile-cobalto (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .   | 442      |
| BETTINALI C., Rapporto tra il contenuto di Uranio e $P_2O_5$ nei calcari fosfatici del Salento (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i> ) . . . . .  | 443      |
| LENTI C., Sulla glicolosi nella retina (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .   | 446      |
| BARGONI N. e LUZZATI A., Di una adenosin-5-fosfatasi in tessuti vegetali (pres. dal Socio <i>G. Levi</i> ) . . . . .   | 450      |
| BIOCCA E., Schema di classificazione dei protozoi e proposta di una nuova classe (pres. dal Socio <i>V. Puntoni</i> ) . . . . .  | 453      |
| BIOCCA E. e BENETTI M. P., « <i>Opisthorchis starkovi</i> » n. sp. parassita di « <i>Felis serval</i> » (pres. dal Socio <i>V. Puntoni</i> ) . . . . .   | 456      |
| MARRÈ E., FORTI G. e ARRIGONI O., Sui rapporti di interdipendenza tra gli effetti dell'auxina sul glutazione, sulla respirazione, sul tenore in legami fosferici ad alto contenuto in energia e sulla crescita (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . . | 460      |
| FORTI G. e TESTA G., Attività respiratoria dei mitocondri di piselli eziolati (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .  | 468      |

|  |          |
|--|----------|
| BATINI C., MORUZZI G. e POMPEIANO O., Origine e meccanismi di compensazione dei fenomeni dinamici di Luciani (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .   | Pag. 474 |
| CREPAX P. e INFANTELLINA F., Le proprietà della corteccia cerebrale dei Cani predisposti e di quelli non predisposti alla epilessia riflessa, indagate dopo recisione delle connessioni nervose estrinseche della corteccia stessa (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . . | 479      |
| BENEDETTI E. L. e COPPOLA G., Sulle glomeruliti nella nefropatia sperimentale « tipo Masugi » nel ratto (pres. dal Corrisp. <i>G. Bompiani</i> ) . . . . .   | 486      |
| BAFFONI G. M., Il nucleo della cellula nervosa dei Vertebrati. Osservazioni in Anfibi anuri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .  | 491      |
| URBANI E., Studio delle lipasi e dei lipidi nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo Vulgaris » e « Rana esculenta » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .  | 498      |
| MANCUSO V., Citocromo-ossidasi nei mitocondri dell'uovo di « Sphaerechinus granularis » (Echinodermi) (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .  | 504      |

### COMMEMORAZIONI

|  |          |
|--|----------|
| SANSONE G., Commemorazione del Corrispondente Michele Cipolla . . . . .                      | Pag. 507 |
| Personale accademico . . . . .   | 524      |
| Presentazione di libri . . . . .   | 524      |
| Plichi suggellati . . . . .  | 529      |
| Presentazione di Note e Memorie . . . . .  | 530      |
| Relazioni di Commissioni . . . . .   | 531      |
| Congressi . . . . .  | 531      |
| Comunicazioni varie . . . . .  | 532      |
| Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 15 dicembre 1956 . . . . . | 533      |
| Indice per Autori . . . . .  | 537      |
| Indice per materie . . . . .   | 541      |
| Indici dei fascicoli . . . . .   | 545      |



